

# Modèle de Potts avec champ externe et algorithme de type EM pour la segmentation d'image

G. Celeux<sup>1</sup>

F. Forbes<sup>2</sup>

N. Peyrard<sup>3</sup>

<sup>1</sup> INRIA Futurs - 91405 Orsay cedex  
Gilles.Celeux@math.u-psud.fr

<sup>2</sup> INRIA Rhône-Alpes  
655 av. de l'Europe - Montbonnot - 38334 Saint Ismier Cedex  
florence.forbes@inrialpes.fr

<sup>3</sup> INRA - Unité de Biométrie  
Domaine Saint Paul, Site Agroparc - 84914 Avignon cedex 9  
nathalie.peyrard@avignon.inra.fr

## Résumé

*La segmentation markovienne d'image demande de savoir estimer les paramètres d'un modèle de champ de Markov caché, problème pour lequel l'algorithme EM est largement utilisé. En pratique, on choisit souvent pour prendre en compte la dépendance entre pixels un modèle simple : le modèle de Potts homogène isotropique. Il n'implique qu'un seul paramètre d'interaction et conduit souvent à de bons résultats. Cependant, l'absence de champ externe suppose que toutes les couleurs dans la segmentation sont équiprobables. Nous étudions, d'un point de vue expérimental, l'influence de l'ajout d'un champ externe dans le modèle. Les paramètres correspondants jouent un rôle similaire à celui des proportions dans un modèle de mélange indépendant et devraient autoriser des segmentations plus flexibles. Pour contourner la difficulté de mise en œuvre de l'algorithme EM, nous utilisons une approximation dérivée de l'approximation en champ moyen.*

## Mots-Clés

Segmentation d'image, modèle de Potts, estimation du champ externe, algorithme EM, approximation de type champ moyen.

## Abstract

*Image segmentation using Markov random fields involves parameter estimation in hidden Markov models for which the EM algorithm is widely used. In practice, a simple Markov model is often used to take into account spatial dependencies between pixels, namely*

*the isotropic homogeneous Potts model. It has the advantage to involve a single interaction parameter and leads in a lot of cases to good results. However, the absence of an external field parameter implies that all colors have the same weight. In this paper, we investigate, from an experimental point of view, the use of additional parameters (external field) that would play the role of the weight terms in independent mixture models and would allow more flexibility for the segmentations. To deal with the difficulties arising from the dependence structure in Markov random fields, we use a EM-like algorithm based on the mean field approximation principle.*

## Keywords

Image segmentation, Potts model, external field estimation, EM algorithm, mean field like approximation.

# 1 Introduction

La formalisation des problèmes en analyse d'image conduit souvent à des situations avec données incomplètes, pour lesquelles une partie des données est manquante. C'est le cas par exemple lorsque l'objectif est de retrouver une image (données cachées) à partir d'une version bruitée ou dégradée de cette image (données observées). Plus généralement, les observations peuvent être des mesures uni ou multidimensionnelles relevées en chaque pixel et l'image que l'on cherche à retrouver est un ensemble d'étiquettes, l'étiquette d'un pixel codant son appartenance à une classe et devant être estimée à partir des observations. Il s'agit dans ce cas d'un problème de segmentation d'image. Un modèle probabiliste simple pour traiter ce problème est le modèle de mélange indépendant. Cependant, un tel modèle fait l'hypothèse que chaque observation est indépendante des observations sur les autres pixels et de même pour les étiquettes. Dans le cas des images, cette hypothèse n'est pas raisonnable et un modèle plus adapté est le modèle de champ de Markov caché, qui permet de prendre en compte les dépendances spatiales. C'est le modèle que nous considérons ici. Notons  $S$  l'ensemble des pixels, associé à un système de voisinage, et  $N(i)$  l'ensemble des pixels voisins du pixel  $i$ , pour  $i \in S$  (les choix les plus classiques sont les 4 ou les 8 plus proches pixels). Si on représente les données cachées par les variables aléatoires  $\mathbf{Z} = \{Z_i, i \in S\}$ , alors chaque variable  $Z_i$  est à valeur dans l'ensemble fini  $E = \{e_1, \dots, e_K\}$  où  $K$  est le nombre de classes dans l'image segmentée et où  $e_k$  est le vecteur de dimension  $K$  dont la  $k^{\text{ième}}$  composante vaut 1 et les autres 0. Dans un modèle de Markov caché, un modèle souvent choisi pour représenter  $\mathbf{Z}$  est le modèle de Potts à  $K$  classes (ou  $K$  couleurs). La version la plus simple de ce modèle est le modèle de Potts homogène et isotrope sans champ externe, qui est décrit par un seul paramètre  $\beta$  qui traduit la force des interactions entre pixels. La distribution de probabilité de ce modèle est, pour une réalisation  $\mathbf{z}$  de  $\mathbf{Z}$  :

$$P_G(\mathbf{z}|\beta) = W(\beta)^{-1} e^{\beta \sum_{i \sim j} z_i^t z_j^t} \quad (1)$$

où  $W(\beta)$  est la constante de normalisation et  $\sum_{i \sim j}$  désigne la somme sur toutes les paires de pixels voisins. En pratique, on constate que le paramètre  $\beta$  joue assez bien son rôle et l'utilisation du modèle (1) conduit à des segmentations raisonnables dans de nombreux cas ([3], [9], [4], [11], [12], [8], [2], [5]). Cependant, cette version simple du modèle de Potts implique que les  $K$  classes ont la même probabilité  $\frac{1}{K}$  d'apparaître, ce qui peut être contraignant dans le cas de segmenta-

tion avec des classes en proportions très différentes. À l'inverse, le modèle de mélange indépendant où  $P(\mathbf{z})$  est de la forme  $\prod_{i \in S} P_i(z_i)$  avec  $P_i(z_i)$  indépendant de  $i$ , autorise des classes non équiprobables, mais ne prend pas en compte les dépendances spatiales. Une généralisation naturelle du modèle (1) et qui permet de lever la contrainte d'équiprobabilité des classes est le modèle de Potts avec champ externe qui est décrit avec un paramètre  $K$ -dimensionnel supplémentaire  $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_K)^t$ ,

$$P_G(\mathbf{z}|\beta, \mathbf{V}) = W(\beta, \mathbf{V})^{-1} e^{\beta \sum_{i \sim j} z_i^t z_j^t + \sum_{i \in S} z_i^t \mathbf{V}} \quad (2)$$

Le vecteur  $\mathbf{V}$  permet de pondérer l'importance des classes dans l'image segmentée. Il est souvent appelé champ externe. Pour  $\beta = 0$ , on retrouve le modèle de mélange indépendant. Le modèle (2) est plus souple, par contre son utilisation implique l'estimation de paramètres supplémentaires. Ainsi, ce modèle est rarement choisi en segmentation d'image sans qu'une réelle mise en comparaison des deux modèles n'existe. L'objectif de cet article est d'étudier s'il existe un gain à utiliser le modèle de Potts avec champ externe, en terme de qualité de la segmentation et ce dans le cas d'images présentant des classes en proportions très différentes.

Cela demande de savoir estimer les paramètres des deux modèles (1) et (2). Dans le cas de problèmes avec données cachées, l'algorithme EM est un algorithme classique d'estimation. Il est largement utilisé notamment pour la classification basée sur les modèles de mélanges indépendants. Pour ces modèles, la mise en œuvre de EM est simple du fait de l'hypothèse d'indépendance (cf. [10]). Par contre, dans le cas des modèles de champs de Markov cachés des approximations sont nécessaires du fait de la complexité des modèles. Nous utilisons pour cela une méthode d'approximation dérivée de l'approximation en champ moyen qui conduit à un algorithme d'estimation aussi simple à mettre en œuvre que pour les modèles de mélanges indépendants tout en préservant l'information spatiale ([5]).

Dans la partie 2, les modèles paramétriques utilisés pour représenter les données observées et les données cachées sont précisés. Dans la partie 3, nous décrivons l'algorithme d'estimation des paramètres dans le cas du modèle de Potts afin de mettre en évidence la complexité supplémentaire due à l'ajout du champ externe. Les comportements des deux modèles sont comparés sur des images synthétiques et réelles dans la partie 4. Enfin, une conclusion termine l'article (partie 5).

## 2 Champ de Markov caché

En segmentation d'image, deux types de données entrent en jeu : les données observées et les données manquantes (ou cachées) à retrouver. Dans cet article, les données manquantes (l'image segmentée) sont représentées par un modèle de Potts à  $K$  couleurs (ou classes) défini par la distribution (2). Lorsque le vecteur de paramètres  $\mathbf{V}$  est nul (modèle alors défini par la distribution (1)) aucune couleur n'est favorisée par le modèle : si aucune information n'est disponible sur la valeur du champ dans le voisinage de site  $i$  alors le site  $i$  peut se voir attribué chacune des  $K$  couleurs avec la même probabilité. Par contre les probabilités conditionnelles, sachant le voisinage, sont différentes. Inversement, si dans le modèle (2) le paramètre  $\beta$  est nul, il n'y a pas d'interaction entre les pixels et les variables  $Z_i$  sont indépendantes. Dans ce dernier cas, pour tout  $i$  dans  $S$  et pour tout  $k$  dans  $\{1, \dots, K\}$ ,

$$P_G(Z_i = e_k) = \frac{\exp(v_k)}{\sum_{l=1}^K \exp(v_l)},$$

de sorte que les couleurs ne sont pas équiprobables. Le vecteur  $\mathbf{V} = (v_1, \dots, v_K)$  joue donc directement sur la proportion des couleurs dans l'image  $\mathbf{Z}$ . Notons ici que  $\mathbf{V}$  est défini à une constante  $c$  quelconque près, puisque le vecteur  $\mathbf{V}' = (v_1 + c, \dots, v_K + c)^t$  conduit au même modèle de Potts. L'unicité des paramètres peut être assurée en imposant une contrainte du type  $\sum_{k=1}^K \exp(v_k) = 1$ .

Dans un modèle de champ de Markov caché, les données observées  $\mathbf{Y} = \{Y_i, i \in S\}$  sont supposées indépendantes conditionnellement à la connaissance de  $\mathbf{Z}$ , la densité conditionnelle  $f$  étant de la forme suivante, pour une réalisation  $\mathbf{y}$  de  $\mathbf{Y}$  :

$$f(\mathbf{y} | \mathbf{z}, \theta) = \prod_{i \in S} f(y_i | z_i, \theta)$$

où  $\theta$  est un paramètre et on suppose que les  $f(y_i | z_i, \theta)$  sont non nulles. Ce modèle présente des similarités avec le modèle de mélange indépendant (cf. [10]) : un modèle de mélange indépendant peut être vu comme un modèle de champ de Markov caché où les variables  $Z_i$  sont indépendantes et identiquement distribuées.

Les densités conditionnelles  $f(y_i | z_i, \theta)$  sont souvent supposées gaussiennes, de sorte que si  $z_i = e_k$  alors  $f(y_i | e_k, \theta)$  est la densité d'une loi gaussienne de paramètres  $\mu_k$  et  $\sigma_k$ . Ces deux paramètres sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la loi dans

le cas réel et le vecteur moyenne et la matrice de covariance dans le cas multidimensionnel. Le vecteur des paramètres des modèles de champs de Markov cachés que nous considérons est donc  $\Psi = (\beta, \mathbf{V}, \theta)$  avec  $\theta = \{(\mu_k, \sigma_k), k = 1, \dots, K\}$ .

L'objectif en segmentation d'image est de retrouver l'image  $\mathbf{z}$ , interprétée comme une classification en  $K$  classes des pixels de l'image, à partir des données observées  $\mathbf{y}$ . Cela nécessite d'estimer  $\Psi$ , qui en général n'est pas disponible. Une méthode classique d'estimation est l'algorithme EM, décrit maintenant.

## 3 Estimation des paramètres à partir de l'algorithme EM

Si le paramètre  $\Psi$  n'est pas connu, un estimateur possible est l'estimateur du maximum de vraisemblance obtenu en maximisant la log-vraisemblance du modèle :

$$\begin{aligned} L(\Psi) &= \log P_G(\mathbf{y} | \Psi) \\ &= \log \sum_{\mathbf{z}} P_G(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \Psi). \end{aligned}$$

Dans un contexte avec données manquantes, l'algorithme EM [7] est un algorithme itératif qui vise à maximiser cette log-vraisemblance en maximisant à chaque itération la quantité suivante par rapport à  $\Psi$  :

$$Q(\Psi | \Psi^{(q)}) = \mathbb{E}_{\Psi^{(q)}} [\log P_G(\mathbf{y}, \mathbf{Z} | \Psi) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}],$$

qui est l'espérance de la vraisemblance des données complètes  $(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ , conditionnellement aux données observées  $\mathbf{y}$  et à une valeur courante du paramètre  $\Psi^{(q)}$ . D'après la propriété de Bayes,  $Q$  se réécrit :

$$\begin{aligned} Q(\Psi | \Psi^{(q)}) &= \mathbb{E}_{\Psi^{(q)}} [\log P_G(\mathbf{y} | \mathbf{Z}, \theta) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}] \\ &+ \mathbb{E}_{\Psi^{(q)}} [\log P_G(\mathbf{Z} | \beta, \mathbf{V}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}]. \end{aligned}$$

Dans le membre de droite de cette égalité, le premier terme ne dépend que de  $\theta$  alors que le second terme ne dépend que de  $\beta$  et  $\mathbf{V}$ . Nous noterons donc

$$Q(\theta | \Psi^{(q)}) = \mathbb{E}_{\Psi^{(q)}} [\log P_G(\mathbf{y} | \mathbf{Z}, \theta) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}], \quad (3)$$

soit encore

$$Q(\theta | \Psi^{(q)}) = \sum_{i \in S} \sum_{z_i} P_G(z_i | \mathbf{y}, \Psi^{(q)}) \log f(y_i | z_i, \theta),$$

et

$$Q(\beta, \mathbf{V} | \Psi^{(q)}) = \mathbb{E}_{\Psi^{(q)}} [\log P_G(\mathbf{Z} | \beta, \mathbf{V}) | \mathbf{Y} = \mathbf{y}], \quad (4)$$

soit

$$Q(\beta, \mathbf{V} | \Psi^{(q)}) = -\log W(\beta, \mathbf{V}) - \sum_{i \in S} \sum_{\mathbf{z}_{i \cup N(i)}} z_i^t (\mathbf{V} + \frac{1}{2} \beta \sum_{j \in N(i)} z_j) P_G(\mathbf{z}_{i \cup N(i)} | \mathbf{y}, \Psi^{(q)})$$

où pour tout sous-ensemble  $A$  de  $S$ , la notation  $\mathbf{z}_A$  désigne l'ensemble  $\{z_i, i \in A\}$ . La mise en œuvre directe de l'algorithme EM dans le cas des champs de Markov cachés n'est pas possible pour deux raisons : la constante de normalisation  $W(\beta, \mathbf{V})$  ainsi que les probabilités conditionnelles  $P_G(z_i | \mathbf{y}, \Psi^{(q)})$  et  $P_G(\mathbf{z}_{i \cup N(i)} | \mathbf{y}, \Psi^{(q)})$  ne peuvent pas être calculées directement et des approximations sont nécessaires. Nous utilisons ici une méthode d'approximation dite *en champ simulé* (voir [5]) qui est dérivée de l'approximation *en champ moyen* d'un champ de Markov ([6]). Le principe de l'approximation *en champ simulé* consiste à se ramener à un système de variables aléatoires indépendantes en fixant la valeur du champ dans le voisinage de chaque pixel à une constante, qui est simulée selon la loi a posteriori de  $\mathbf{Z}$ . L'algorithme consiste à itérer les deux pas suivants :

- (P1)** Simulation, à partir des observations  $\mathbf{y}$  et de la valeur courante des paramètres  $\Psi^{(q-1)}$ , d'une configuration  $\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}$  selon la loi  $P_G(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \Psi^{(q-1)})$  (par échantillonnage de Gibbs). Approximation de la distribution marginale  $P_G(\mathbf{z} | \beta, \mathbf{V})$  par

$$P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{z} | \beta, \mathbf{V}) = \prod_{i \in S} P_G(z_i | \tilde{\mathbf{z}}_{N(i)}^{(q)}, \beta, \mathbf{V}). \quad (5)$$

- (P2)** Application de EM pour le modèle défini par (3) et (5), avec pour valeurs initiales  $\theta^{(q-1)}$ ,  $\beta^{(q-1)}$  et  $\mathbf{V}^{(q-1)}$ , pour mettre à jour les estimations  $\theta^{(q)}$ ,  $\beta^{(q)}$  et  $\mathbf{V}^{(q)}$ . La distribution jointe  $P_G(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \Psi)$  est ainsi remplacée par

$$P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{y}, \mathbf{z} | \Psi) = \prod_{i \in S} \{f(y_i | z_i, \theta) P_G(z_i | \tilde{\mathbf{z}}_{N(i)}^{(q)}, \beta)\} \quad (6)$$

L'introduction du pas **(P1)** à chaque itération permet de contourner les difficultés de calcul rencontrées avec la distribution jointe exacte, du fait de la propriété de factorisation de la distribution (5). En effet, d'une part la constante de normalisation du modèle  $P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{z} | \beta, \mathbf{V})$  se calcule directement, et d'autre part à l'intérieur du pas **(P2)**, l'étape E de EM se réduit au calcul, dans (3) et (4), des probabilités conditionnelles correspondant à

l'approximation de  $P_G(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \Psi^{(q)})$ . Cette approximation découle de l'approximation (5) de  $P_G(\mathbf{z} | \beta)$  :

$$P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \Psi^{(q)}) = \frac{f(\mathbf{y} | \mathbf{z}, \theta^{(q)}) P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{z} | \beta^{(q)}, \mathbf{V}^{(q)})}{P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{y} | \Psi^{(q)})}$$

qui se simplifie grâce à (3) et (5),

$$\begin{aligned} P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(\mathbf{z} | \mathbf{y}, \Psi^{(q)}) &= \prod_{i \in S} \left\{ \frac{f(y_i | z_i, \theta^{(q)}) P_G(z_i | \tilde{\mathbf{z}}_{N(i)}^{(q)}, \beta^{(q)}, \mathbf{V}^{(q)})}{\sum_{z_i} f(y_i | z_i, \theta^{(q)}) P_G(z_i | \tilde{\mathbf{z}}_{N(i)}^{(q)}, \beta^{(q)}, \mathbf{V}^{(q)})} \right\} \\ &= \prod_{i \in S} P_G(z_i | y_i, \tilde{\mathbf{z}}_{N(i)}^{(q)}, \Psi^{(q)}) \\ &= \prod_{i \in S} P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(z_i | y_i, \Psi^{(q)}). \end{aligned}$$

On en déduit les approximations suivantes de  $Q(\theta | \Psi^{(q)})$  et de  $Q(\beta, \mathbf{V} | \Psi^{(q)})$ , puisque les  $Z_i$  sont indépendantes,

$$Q(\theta | \Psi^{(q)}) \approx \sum_{i \in S} \sum_{z_i} P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(z_i | y_i, \Psi^{(q)}) \log f(y_i | z_i, \theta), \quad (7)$$

et

$$\begin{aligned} Q(\beta, \mathbf{V} | \Psi^{(q)}) & \approx \sum_{i \in S} \sum_{z_i} P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(z_i | y_i, \Psi^{(q)}) \log P_{\tilde{\mathbf{z}}^{(q)}}(z_i | \beta, \mathbf{V}). \end{aligned} \quad (8)$$

Ensuite, l'étape M de l'algorithme EM se déroule sans difficulté. En effet, dans le cas où les densités conditionnelles  $f(y_i | e_k, \theta)$  sont gaussiennes, une expression explicite de  $\theta^{(q+1)}$  est disponible. La maximisation de (8) peut se faire par recherche de la valeur qui annule son gradient. Si  $q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V})$  et  $p_k^{(q)}(\Psi)$  représentent respectivement

$$\begin{aligned} q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V}) &= P_G(Z_i = e_k | \mathbf{Z}_{N(i)} = \tilde{\mathbf{z}}_{N(i)}^{(q)}, \beta, \mathbf{V}) \\ &= \frac{\exp(e_k^t \mathbf{V} + \beta e_k^t \sum_{j \in N(i)} \tilde{\mathbf{z}}_j^{(q)})}{\sum_{l=1}^K \exp(e_l^t \mathbf{V} + \beta e_l^t \sum_{j \in N(i)} \tilde{\mathbf{z}}_j^{(q)})} \end{aligned}$$

et

$$p_k^{(q)}(\Psi) = f(y_i | e_k, \theta) q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V}).$$

alors il s'agit de trouver  $\beta$  et  $\mathbf{V}$  satisfaisant

$$\forall k = 1 \dots K, \quad \sum_{i \in S} q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V}) - p_k^{(q)}(\Psi^{(q)}) = 0$$

et

$$\sum_{i \in S} \sum_{k=1}^K e_k^t \sum_{j \in N(i)} \tilde{z}_j^{(q)}(q_k^{(q)}(\beta, \mathbf{V}) - p_k^{(q)}(\Psi^{(q)})) = 0.$$

Par rapport au modèle de Potts simple (modèle (1)), l'utilisation du modèle (2) et l'introduction du paramètre  $\mathbf{V}$  demande de résoudre en plus la première équation. Si sa résolution ne présente pas de difficulté, on passe néanmoins d'un problème à une dimension à un problème à  $K$  dimensions.

## 4 Résultats expérimentaux

Du fait du nombre de paramètres supplémentaires, et du coût correspondant, le modèle de Potts avec champ externe est rarement utilisé en segmentation d'image. Cependant, la flexibilité qu'il induit peut être intéressante puisqu'elle permet de supposer des couleurs a priori non équiprobables. Nous avons réalisé plusieurs expériences de segmentation afin de comparer les performances du modèle complet (2) et du modèle sans champ externe (1). Nous avons ainsi mis en œuvre les algorithmes d'estimation/restauration selon le modèle de Potts utilisé avec dans tous les cas le choix d'un système de voisinage du second ordre, c'est-à-dire les huit plus proches voisins. Les algorithmes d'estimation ont été initialisés avec la même classification : celle fournie par l'algorithme EM pour un modèle de mélange indépendant. À partir de ces estimations des paramètres du modèle, une restauration est obtenue selon le principe du *maximum a posteriori* appliqué à une approximation en champ simulé du modèle de Potts.

Les premières images traitées sont des images synthétiques bruitées : les images dégradées ont été obtenues par ajout d'un bruit gaussien, de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , aux images d'origine en  $K$  couleurs. Pour une image, les couleurs ont été dégradées en utilisant la même variance pour toutes les couleurs. Nous avons considéré des images d'origine présentant des classes (ou couleurs) avec des différences de proportions plus ou moins marquées. Les figures 1 (a) et 2 (a) sont ainsi des images synthétiques qui présentent chacune une classe en faible proportion (moins de 10 %) alors que dans l'image de la figure 3 (a) les proportions des couleurs sont toutes supérieures à 20 % et que pour l'image de la figure 4 (a) les proportions des couleurs sont pratiquement égales (voir tableau 2). Les restaurations obtenues avec le modèle de Potts simple (1) et le modèle de Potts avec champ externe (2) sont présentées sur les figures 1 à 4 (c) et (d) respectivement. Les estimations correspondantes des paramètres de bruit sont

données dans le tableau 1. Les taux d'erreur globaux (proportions de pixels mal classés) et les taux d'erreur par classe (proportion de pixels mal classés pour une classe donnée) sont reportés dans le tableau 2. Ces résultats montrent qu'il y a bien un intérêt à utiliser le modèle de Potts complet pour des images avec des proportions des couleurs très différentes, en particulier lorsque l'une des proportions est petite (voir figures 1 et 2). Les algorithmes d'estimation ont été arrêtés après 500 itérations mais nous avons remarqué qu'avec un plus grand nombre d'itérations le choix du modèle complet conduisait à de meilleurs résultats alors que le choix du modèle simple conduisait finalement à une dégradation des estimations et à la disparition de la classe de plus petite proportion. Ainsi, en présence d'une classe en petite proportion, il apparaît que l'utilisation du modèle complet mène à une meilleure estimation des paramètres et donc à une restauration plus satisfaisante. En revanche, dans le cas de l'image du damier en trois couleurs, avec des proportions quasiment égales, les deux modèles conduisent à des résultats équivalents. Notons également que même si la qualité des restaurations peut parfois paraître similaire pour les deux modèles en termes d'erreur globale, on constate qu'avec le modèle complet la classe minoritaire est mieux restaurée, pour un taux d'erreur équivalent dans la classe majoritaire (cf. tableau 2 images Ji et Kin).

Les performances des deux modèles de Potts ont ensuite été comparées sur une image réelle de cellule (figure 5, [1]). On observe sur cet exemple que, bien que l'une des classes dans l'image (le centre de la cellule) soit en proportion faible, on obtient des résultats équivalents. La classification utilisée pour initialiser les algorithmes d'estimation (classification obtenue par EM pour mélanges indépendants, voir figure 5 (b)) est déjà relativement satisfaisante. Par contre, si on initialise les algorithmes avec une classification moins satisfaisante, leurs comportements diffèrent. Ainsi avec une initialisation par simple tri des valeurs des pixels et découpage en 4 classes de tailles égales, la restauration obtenue avec le modèle simple n'est plus satisfaisante alors qu'avec le modèle complet elle semble être moins sensible à cette initialisation défavorable (figures 5 (e) et (f)). Cette plus grande souplesse est probablement due aux paramètres supplémentaires.

## 5 Conclusion

Le modèle de Potts simple (sans champ externe), bien que conduisant à des résultats satisfaisants dans beaucoup de situations, ne permet cependant pas toujours

| Image Ji                  |                     |                     |
|---------------------------|---------------------|---------------------|
|                           | $\mu$               | $\sigma$            |
| vraies valeurs            | 1.00 2.00           | 0.70 0.70           |
| pas de champ externe      | 0.82 2.00           | 0.63 0.69           |
| modèle complet            | 1.02 2.01           | 0.71 0.69           |
| Image damier à 4 couleurs |                     |                     |
| vraies valeurs            | 1.00 2.00 3.00 4.00 | 0.50 0.50 0.50 0.50 |
| pas de champ externe      | 1.00 1.45 2.21 4.01 | 0.49 0.00 0.64 0.50 |
| modèle complet            | 1.00 2.00 2.97 4.01 | 0.49 0.50 0.48 0.50 |
| Image Kin                 |                     |                     |
| vraies valeurs            | 1.00 2.00           | 0.90 0.90 0.90 0.90 |
| pas de champ externe      | 0.99 2.00           | 0.89 0.89           |
| modèle complet            | 1.00 1.99           | 0.89 0.89           |
| Image damier à 3 couleurs |                     |                     |
| vraies valeurs            | 0.00 1.00 2.00      | 0.50 0.50 0.50      |
| pas de champ externe      | 0.00 1.00 2.00      | 0.50 0.50 0.50      |
| modèle complet            | 0.00 1.00 2.00      | 0.50 0.50 0.50      |

TAB. 1 – **Images synthétiques.** Estimation des paramètres du modèle à partir des images dégradées, selon qu’est utilisé un modèle de Potts simple ou avec champ externe.

| Image Ji                  |             |             |              |
|---------------------------|-------------|-------------|--------------|
|                           | proportions | err globale | err /couleur |
| vraies valeurs            | 5 95        | -           | -            |
| pas de champ externe      | 3 97        | 3           | 50 0         |
| modèle complet            | 5 95        | 3           | 34 1         |
| Image damier à 4 couleurs |             |             |              |
| vraies valeurs            | 37 34 9 20  | -           | -            |
| pas de champ externe      | 37 0 43 20  | 34          | 1 100 1 0    |
| modèle complet            | 38 33 9 20  | 1           | 0 1 0 1      |
| Image Kin                 |             |             |              |
| vraies valeurs            | 21 79       | -           | -            |
| pas de champ externe      | 20 80       | 6           | 17 3         |
| modèle complet            | 20 80       | 5           | 13 3         |
| Image damier à 3 couleurs |             |             |              |
| vraies valeurs            | 37 34 29    | -           | -            |
| pas de champ externe      | 38 33 29    | 0.6         | 0 1 0        |
| modèle complet            | 37 34 29    | 0.6         | 1 1 0        |

TAB. 2 – **Images synthétiques.** Fréquences des différentes classes, taux d’erreur global et par couleur dans les restaurations selon qu’est utilisé un modèle de Potts simple ou avec champ externe. Les résultats sont exprimés en pourcentage.

| Image cellule          |             |
|------------------------|-------------|
|                        | proportions |
| pas de champ externe   | 5 31 41 23  |
| modèle complet         | 5 31 41 23  |
| modèle de mélange ind. | 4 32 38 26  |

TAB. 3 – **Image cellule.** Proportions (exprimées en pourcentages) des couleurs dans la restauration en 4 couleurs selon qu’est utilisé un modèle de Potts simple, un modèle de Potts avec champ externe ou un modèle de mélange indépendant.

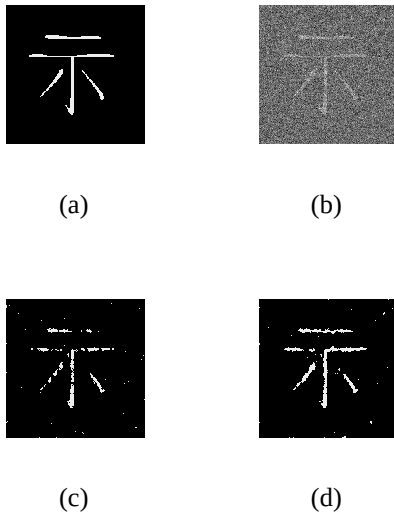


FIG. 1 – **Image Ji à 2 couleurs**, (a) image d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ( $\sigma = 0.7$ ), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

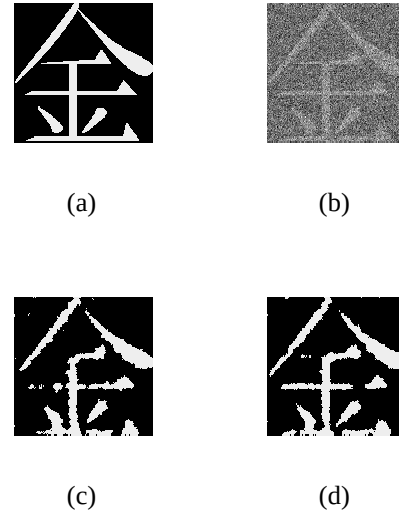


FIG. 3 – **Image Kin à 2 couleurs**, (a) image d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ( $\sigma = 0.9$ ), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

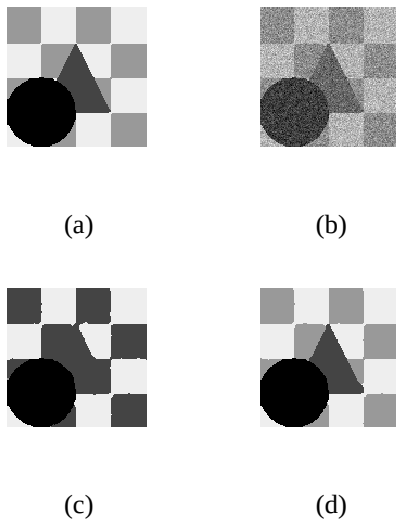


FIG. 2 – **Image damier à 4 couleurs**, (a) image d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ( $\sigma = 0.5$ ), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

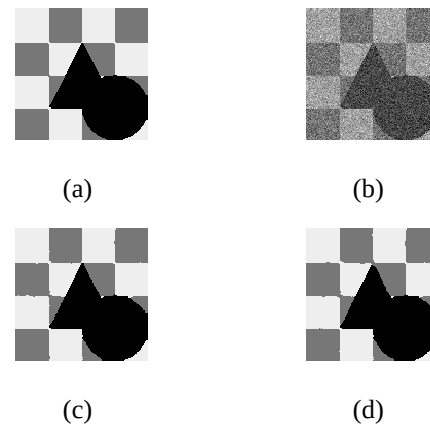


FIG. 4 – **Image damier à 3 couleurs**, (a) image d'origine, (b) image dégradée avec un bruit gaussien ( $\sigma = 0.5$ ), (c) restauration obtenue avec un modèle de Potts sans champ externe, (d) restauration obtenue avec un modèle de Potts avec champ externe.

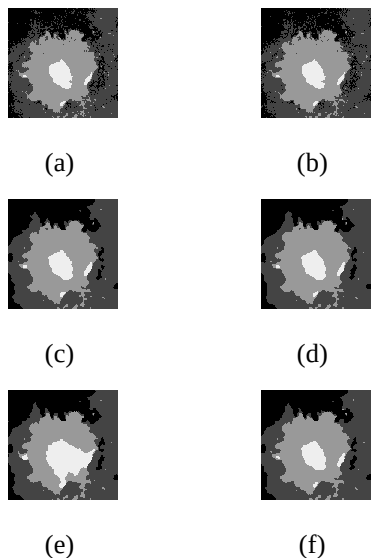


FIG. 5 – **Image cellule**, (a) image observée, (b) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de mélange indépendant et une estimation des paramètres par EM, (c) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts sans champ externe et une initialisation par la restauration (b), (d) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts avec champ externe et une initialisation par la restauration (b), (e) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts sans champ externe et une initialisation par une image segmentée en classes d'égales proportions, (f) restauration en 4 couleurs basée sur un modèle de Potts avec champ externe et une initialisation par une image segmentée en classes d'égales proportions.

de bien cerner les caractéristiques de l'image segmentée que l'on cherche à retrouver. Un moyen simple et naturel de généraliser ce modèle est d'utiliser un modèle de Potts avec des potentiels non nuls sur les singletons, ajoutant ainsi un champ externe. En pratique cela alourdit l'étape d'estimation des paramètres du modèle (puisque ceux-ci sont plus nombreux) mais nous avons observé que d'une part ces modèles sont plus souples et plus appropriés dans le cas d'images avec des couleurs en proportions très différentes et que d'autre part l'algorithme d'estimation correspondant est moins sensible à une initialisation par une segmentation de qualité incertaine. La charge de calcul supplémentaire due à l'ajout du champ externe dépend du nombre de classes. Dans les exemples traités on peut observer des temps d'exécutions de 2 à 3 fois supérieurs au temps nécessaire pour le modèle de Potts simple, ce qui reste raisonnable. Ainsi, de part ces observations, il nous semble avantageux d'utiliser un modèle de Potts avec champ externe pour obtenir des segmentations d'images plus fiables.

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier F. Chouly pour sa participation à la production des résultats expérimentaux présentés.

## Références

- [1] C. Ambrose. *Approche probabiliste en classification automatique et contraintes de voisinage*. PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, France, 1996.
- [2] S.A. Barker and P. J. W. Rayner. Unsupervised image segmentation using Markov random field models. *Pattern Recognition*, 33 :587–602, 2000.
- [3] J. Besag. On the statistical analysis of dirty pictures. *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, 48 :259–302, 1986.
- [4] J. Besag, J. York, and A. Mollié. Bayesian image restoration with two applications in spatial statistics. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 43 :1–59, 1991.
- [5] G. Celeux, F. Forbes, and N. Peyrard. EM procedures using mean field-like approximations for Markov model-based image segmentation. *Pattern Recognition*, 36(1) :131–144, 2003.
- [6] D. Chandler. *Introduction to Modern Statistical Mechanics*. Oxford University Press, 1987.
- [7] A. P. Dempster, N. Laird, and D. B. Rubin. Maximum likelihood from incomplete data via the EM



- algorithm (with discussion). *Journal of the Royal Statistical Society, series B*, 39 :1–38, 1977.
- [8] E. Levitan, M. Chan, and G. T. Herman. Image-modelling gibbs prior. *Graphical Models and Image processing*, 57(2) :117–130, 1995.
  - [9] J. Marroquin, S. Mitter, and T. Poggio. Probabilistic solution of ill-posed problems in computational vision. *Journal of the American Statistical Association*, 82(397) :76–89, 1987.
  - [10] G. J. McLachlan and D. Peel. *Finite Mixture Models*. Wiley, 2000.
  - [11] T. N. Pappas. An adaptive clustering algorithm for image segmentation. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(4) :901–914, 1992.
  - [12] J. Zhang. The Mean Field Theory in EM Procedures for Markov Random Fields. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 40(10) :2570–2583, 1992.