

Segmentation d'images vectorielles par une méthode globale d'évolution de courbes

Segmentation of vectorial images by a global curve evolution method

C. Vázquez

A. Mitiche

I. Ben Ayed

INRS-Télécommunications,
Place Bonaventure, 800 de la Gauchetière Ouest, Suite 6900
Montreal QC, H5A 1K6, Canada
[vazquez,mitiche,benayed]@inrs-emt.quebec.ca

Résumé

Quoique le problème de la segmentation d'une image en deux régions soit facile à énoncer et résoudre, les méthodes actuelles de segmentation en deux régions sont en général difficile à étendre au cas d'un nombre quelconque de régions. Nous présentons une méthode globale de segmentation d'images scalaires aussi bien que vectorielles, en un nombre N donné mais arbitraire de régions formant une partition du domaine d'image. Le problème est présenté comme un problème de groupement, ou quantification, avec contrainte spatiale. La segmentation en N régions est énoncé comme la minimisation simultanée de $N - 1$ fonctionnelles chacune ne considérant que deux régions. Chaque fonctionnelle contient un terme évaluant l'adéquation de l'image dans la région à un modèle, que nous prenons gaussien, et un terme de régularisation pour obtenir des frontières de régions lisses et éviter le fractionnement des régions. On se retrouve à résoudre simultanément un ensemble de problèmes faciles. L'évolution de courbes correspondante, réalisée via courbes de niveau, donne une partition à convergence. Plusieurs résultats de validation sur des images synthétiques et réelles sont montrés.

Mots Clef

Segmentation d'images, groupement, équations d'évolution de courbes, courbes de niveau

Abstract

Segmentation of vector-valued images into multiple regions is a challenging problem addressed in many studies. In this paper, we propose a fully global method to segment a vector-valued image into a fixed but arbitrary number, N , of regions, each modeled by a multivariate Gaussian. We state the N -region segmentation problem in a clustering framework with a spatial constrain. This results in the simultaneous minimisation of $N - 1$ two-regions energy functionals. These $N - 1$ energy functionals are then min-

imized by the evolution of $N - 1$ active contours, each in a two-region segmentation framework. The scheme yields a partition of the image domain at convergence. Curve evolution is implemented using the level set formalism to allow topology changes and numerical stability. We show results on synthetic and natural gray-level images as well as vector images.

Keywords

Image segmentation, clustering, curve evolution equations, level sets

1 Introduction

Problème fondamental en traitement d'images et vision par ordinateur, la segmentation d'images, scalaires ou multivaluées, intervient dans de nombreuses applications comme l'analyse de séquences en imagerie biomédicale et satellitaire, l'interprétation de scènes, l'indexation vidéo, le suivi d'objets en mouvement, et bien d'autres.

Le problème consiste à réaliser une partition du domaine d'image en régions, la restriction de l'image à chaque région répondant à une description donnée, souvent sous forme de modèle. De nombreux travaux ont abordé le problème. L'introduction des contours actifs [1, 2] a permis d'obtenir des résultats encourageants avec des algorithmes basés sur une évolution de courbes, particulièrement ceux où cette évolution est réalisée via courbes de niveau [3, 4]. Il est relativement aisé d'énoncer et de résoudre le problème de segmentation en deux régions. Une seule courbe simple fermée suffit dans ce cas, une région de segmentation étant attribuée à l'intérieur de la courbe et l'autre à son complément. Les méthodes de segmentation en deux régions sont en général difficile à étendre au cas d'un nombre quelconque de régions. La difficulté réside principalement dans le fait que si une courbe simple fermée définit sans ambiguïté une partition du domaine de l'image en deux régions, plusieurs courbes, par contre, peuvent se couper, nécessitant ainsi une méthode de gestion des

régions définies par leurs intersections de manière à obtenir une partition du domaine d'image.

Nous proposons une méthode efficace de segmentation d'images, scalaires aussi bien que vectorielles, en un nombre donné quelconque de régions formant une partition du domaine d'image. Nous posons le problème comme un problème de groupement, ou quantification, avec contrainte spatiale. La segmentation en N régions est alors énoncé comme la minimisation simultanée de $N - 1$ fonctionnelles chacune ne considérant que deux régions. Chacune de ces fonctionnelles contient un terme mesurant l'adéquation de l'image dans cette région à un modèle, que nous prenons gaussien par souci de généraliser le modèle constant couramment retenu, et un terme de régularisation pour obtenir des contours de régions lisses et éviter le morcellement des régions. Nous nous retrouvons ainsi à résoudre simultanément un ensemble de problèmes plus faciles. L'évolution de courbes correspondante est réalisée via courbes de niveaux.

On procède à une revue de travaux antérieurs au chapitre 2 et l'approche proposée est décrite au chapitre suivant. Les résultats de tests de validation sont présentés au chapitre 4. On conclut avec un récapitulatif au chapitre 5.

2 Travaux antérieurs

La méthode de Zhu et Yuille [5] est maintenant classique dans ce domaine. Dans cette méthode, on initialise avec une partition définie par une courbe unique, et on fait évoluer chaque segment de courbe entre deux régions selon une stratégie dite de compétition entre les deux régions. Cette évolution ne se réalise pas par courbes de niveau et on ne retrouve donc pas dans cette approche la stabilité numérique et la gestion automatique des changements de topologie des courbes, propriétés propres aux courbes de niveau et essentielles dans la résolution du problème par évolution de courbes. De plus, les résultats avec cette approche semblent dépendre du choix de la partition initiale. Une autre approche consiste à utiliser plusieurs courbes, l'intérieur de chacune définissant une région de segmentation, et faire évoluer les courbes de façon indépendante. Chan et Vese [6] ont proposé récemment ce qu'ils appellent des contours actifs multi-phases. La formulation a deux inconvénients, cependant: le nombre de régions est une puissance de deux, et l'évolution des courbes se fait finalement par segments n'impliquant que les régions de part et d'autre.

Paragios et Deriche [7], et Samson *et al.* [8], introduisent un terme de pénalité dans la fonctionnelle à minimiser pour biaiser la solution vers une partition. Ce terme de partition est affecté d'un coefficient de pondération. Si ce coefficient est trop faible la solution ne sera pas une partition. Si, en revanche, il est trop élevé, l'évolution des courbes se fait principalement sous l'influence du terme de partition, auquel cas l'image elle-même est pratiquement ignorée. Paragios et Deriche suggèrent de varier le coefficient de partition pour croître avec le temps d'évolution, le

problème étant alors de définir cette variation.

Yezzi *et al.* [9] utilisent une fonctionnelle, dite *globale*, qui résulte en une évolution de courbes où l'évolution de l'une fait référence aux régions intérieures aux autres. Cette méthode résulte en une partition à convergence. Cependant, la fonctionnelle utilisée a deux inconvénients majeurs: une segmentation en N régions ne peut se faire que pour une fonction image vectorielle de dimension au moins égale à $N - 1$, et on minimise le volume d'un polyèdre de $\mathbb{R}^{n-1}$, impliquant une quantité d'opérations excessive au plan pratique.

3 Approche proposée

Soit $\mathbf{I} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'image à segmenter, définie sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Il s'agit de déterminer une partition $\mathcal{R} = \{\mathbf{R}_i\}_{i \in [1, N]}$ de Ω en un nombre donné quelconque de régions et selon une description donnée de $\mathbf{I}$ dans chaque région. Cette description est souvent donnée, comme ce le sera ici, sous forme d'un modèle statistique de $\mathbf{I}$ dans chaque région de la partition. On impose aussi aux frontières de la partition une forme de régularité.

Voyons d'abord le cas simple de deux régions qui sera par la suite généralisé au cas plus complexe de plusieurs régions. Nous présentons le problème comme un problème de quantification avec une contrainte de régularité spatiale.

3.1 Segmentation en deux régions

La segmentation en deux régions est un problème relativement simple dont la solution via évolution de contours par courbes de niveaux est maintenant bien connue.

Le problème est formulé comme un problème de minimisation d'une fonctionnelle regroupant deux types de termes: des termes mesurant l'adéquation de la restriction de l'image à chacune des deux régions à un modèle et un terme de régularité généralement relié à la longueur de la courbe séparant les deux régions.

Soient $e(\mathbf{x})$ et $e^c(\mathbf{x})$ les fonction qui mesurent l'adéquation au modèle des restrictions de $\mathbf{I}$ aux régions $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^c$, respectivement. Faisons correspondre à $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^c$, les fonctionnelles d'énergie $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^c$ suivantes:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathbf{R}} e(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \mathcal{E}^c = \int_{\mathbf{R}^c} e^c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

La partition recherchée est alors celle qui minimise:

$$\mathcal{E}_\Omega = \mathcal{E} + \mathcal{E}^c + \mathcal{L}(\partial\mathbf{R}) \quad (1)$$

où $\partial\mathbf{R}$ est la frontière de la région $\mathbf{R}$ et $\mathcal{L}(\partial\mathbf{R})$ un terme de régularisation relié à la longueur de la frontière.

En considérant un modèle d'image constant par morceaux, la fonction d'adéquation e prend la forme:

$$e(\mathbf{x}) = (\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \mu_{\mathbf{R}})^2 \quad (2)$$

où $\mu_{\mathbf{R}}$ est le paramètre qui sert à décrire l'image à l'intérieur de $\mathbf{R}$. La solution variationnelle au problème de

minimisation de (1) est donné par les équations d'évolution [10]:

$$\mu_{\mathbf{R}} = \frac{\int_{\mathbf{R}} \mathbf{I}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{R}} d\mathbf{x}} \quad \mu_{\mathbf{R}^c} = \frac{\int_{\mathbf{R}^c} \mathbf{I}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{R}^c} d\mathbf{x}} \quad (3)$$

pour les paramètres et

$$\frac{d\partial\mathbf{R}}{dt} = 2(\mu_{\mathbf{R}} - \mu_{\mathbf{R}^c}) \left(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \frac{(\mu_{\mathbf{R}} + \mu_{\mathbf{R}^c})}{2} \right) \vec{n}(\mathbf{x}) + \kappa(\mathbf{x}) \vec{n}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

pour la courbe. Dans cette équation, κ est la courbure moyenne de $\partial\mathbf{R}$ et $\vec{n}$ la normale unitaire extérieure à $\partial\mathbf{R}$. La minimisation de l'énergie (1) peut être vu comme la solution d'un problème de quantification sous contrainte, la contrainte étant une de régularité de $\partial\mathbf{R}_i$. En effet, les équations d'évolution (3) et (4) correspondent, sauf pour le terme de régularisation, au deux étapes de l'algorithme de quantification de Lloyd ([11], page 189). Nous allons utiliser cette similitude pour généraliser l'approche au cas de la segmentation en plusieurs régions.

3.2 Segmentation en N régions comme $N - 1$ segmentations en deux régions liées

Tout comme dans le cas de deux régions, nous présentons le problème comme un problème de quantification sous contrainte, la contrainte étant une de régularité de $\partial\mathbf{R}_i$. Dans le cas de plusieurs régions le problème de quantification, sans le terme de régularisation, consisterait à trouver la partition qui minimise l'énergie:

$$\mathcal{E}_{\Omega} = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i \quad (5)$$

où $\mathcal{E}_i$ est la fonctionnelle d'énergie de la région $\mathbf{R}_i$, défini par:

$$\mathcal{E}_i = \int_{\mathbf{R}_i} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (6)$$

et e_i est la fonction mesurant l'adéquation des valeurs de l'image aux caractéristiques de la région $\mathbf{R}_i$. Afin de trouver le minimum de l'énergie (5) nous la réécrivons de la façon suivante:

$$\mathcal{E}_{\Omega} = \int_{\mathbf{R}_i} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{\mathbf{R}_j} e_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (7)$$

Pour le second des deux termes de droite dans (7) on a les inégalités suivantes:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \int_{\mathbf{R}_j} e_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &\geq \int_{\mathbf{R}_i^c} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N e_j(\mathbf{x}) \chi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &\geq \int_{\mathbf{R}_i^c} \min_{j \neq i} (e_j(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (8)$$

où χ_j est la fonction caractéristique de la région $\mathbf{R}_j$. Notons alors que:

1. Dans le cas où $\mathcal{R} = \mathbf{R}_i|_{i=1,\dots,N}$ est une partition de Ω la première égalité en (8) est vérifiée
2. La deuxième égalité en (8) a lieu si $\mathcal{R}$ est une partition de Ω et $e_j(\mathbf{x}) \chi_j(\mathbf{x}) = \min_{l=1,\dots,N} (e_l(\mathbf{x}))$

Ceci nous amène à poser le problème comme la minimisation simultanée de plusieurs fonctionnelles d'énergie associées aux régions $\mathbf{R}_i$. Pour définir N région nous n'avons besoin que de $N - 1$ courbes puisqu'on peut définir la région $\mathbf{R}_N$ comme l'intersection des compléments des régions $\mathbf{R}_i, i = 1, \dots, N - 1$:

$$\mathbf{R}_N = \bigcap_{i=1}^{N-1} \mathbf{R}_i^c \quad (9)$$

Nous définissons alors les $N - 1$ fonctionnelles d'énergie suivantes associées aux régions $\mathbf{R}_i, i = 1, \dots, N - 1$:

$$\xi_i = \int_{\mathbf{R}_i} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{R}_i^c} \min_{j \neq i} (e_j(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (10)$$

La minimisation simultanée de ces énergies produit un ensemble de régions $\mathbf{R}_i, i = 1, \dots, N - 1$ qui combiné à la région $\mathbf{R}_N$ définie selon (9) forment une partition de Ω . En effet, si ce n'était pas le cas il existerait deux régions distincts $\mathbf{R}_i$ et $\mathbf{R}_j$ tel que $\mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j \neq \emptyset$. Sans perte de généralité, supposons que

$$\int_{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} < \int_{\mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j} e_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (11)$$

Dans ce cas, il existerait une région distincte de $\mathbf{R}_j$, en l'occurrence la région $\mathbf{R}'_j = \mathbf{R}_j \setminus (\mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j)$ pour laquelle $\xi'_j < \xi_j$. Ceci serait en contradiction avec l'optimalité de la solution.

Suivant ce même raisonnement, on peut montrer que la minimisation de $\xi_i, i = 1, \dots, N - 1$ implique que $e_j(\mathbf{x}) \chi_j(\mathbf{x}) = \min_{l=1,\dots,N} (e_l(\mathbf{x}))$. En effet, si cette condition n'est pas vérifiée il suffit de "passer" le point $\mathbf{x}$ de la région $\mathbf{R}_j$ à la région $\mathbf{R}_l$, avec $l = \arg \min_{m=1,\dots,N} (e_m(\mathbf{x}))$ pour

diminuer l'énergie ξ_j , ce qui serait en contradiction avec l'hypothèse que ξ_j est minimal.

Puisque la minimisation des énergies (10) produit une solution qui vérifie les égalités dans (8), cette solution est alors aussi celle qui minimise (5).

Maintenant, pour donner une consistance spatiale à la solution et éviter les petites régions isolées, on introduit un terme de régularité relié à la longueur de la courbe qui définit la région. Nous définissons une nouvelle fonctionnelle d'énergie associée à chaque courbe de la façon suivante:

$$\mathcal{E}_{\Omega}(\partial\mathbf{R}_i|\mathbf{I}) = \int_{\mathbf{R}_i} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\mathbf{R}_i^c} \psi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \mathcal{L}(\partial\mathbf{R}_i) \quad (12)$$

où $\psi_i(\mathbf{x}) = \min_{j \neq i}(e_j(\mathbf{x}))$. La segmentation recherchée est alors définie par:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{R}}_i &= \arg \min_{\mathbf{R}_i} (\mathcal{E}_\Omega(\partial \mathbf{R}_i | \mathbf{I})), \quad i \in [1, N-1] \\ \mathbf{R}_N &= \bigcap_{i=1}^{N-1} \tilde{\mathbf{R}}_i^c \end{cases} \quad (13)$$

Notons que la méthode est globale puisque chaque équation de (13) fait référence à toutes les courbes.

Au prochain chapitre nous dériverons les équations d'Euler-Lagrange pour la minimisation des énergies (12). Ces équations seront résolues par évolution de courbes régies par les équations de descente de gradient d'Euler-Lagrange et nous montrerons qu'à partir d'une partition initial on obtient une partition à convergence.

3.3 Évolution de contours

Un minimum local de l'énergie (12) est obtenue via une descente de gradient par rapport aux paramètres statistiques du modèle choisi et à la courbe $\partial \mathbf{R}_i$. Nous utilisons une distribution gaussienne pour modéliser la probabilité conditionnelle de $\mathbf{I}(\mathbf{x})$ donnée $\mathbf{R}_i$:

$$p_{\varphi_i}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in \mathbf{R}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}_i)} \quad (14)$$

où $\mathbf{x} = (x, y)^T \in \mathbf{R}_i \subset \Omega$ et $\varphi_i = \{\boldsymbol{\mu}_i, \boldsymbol{\Sigma}_i\}$ sont les paramètres de la distribution, c'est-à-dire la moyenne et la matrice de covariance. Avec ce modèle, la fonction e_i qui sert à mesurer l'adéquation de la restriction de $\mathbf{I}$ à la région $\mathbf{R}_i$ prend la forme:

$$\begin{aligned} e_i(\mathbf{x}) &= -\log(p_{\varphi_i}(\mathbf{I})) \\ &= \frac{n}{2} \log(2\pi) + \frac{1}{2} \log(|\boldsymbol{\Sigma}_i|) \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}_i)^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1} (\mathbf{I}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\mu}_i)) \end{aligned} \quad (15)$$

Les équation d'Euler-Lagrange correspondant aux paramètres de la distribution gaussienne peuvent être résolues directement et donnent comme résultat les équations d'évolution suivantes en fonction de la région $\mathbf{R}_i$ [12, 5]:

$$\begin{aligned} \mu_i^{(l)} &= \frac{\int_{\mathbf{R}_i} I^{(l)}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{R}_i} d\mathbf{x}} \\ \Sigma_i^{(lk)} &= \frac{\int_{\mathbf{R}_i} (I^{(l)}(\mathbf{x}) - \mu_i^{(l)})(I^{(k)}(\mathbf{x}) - \mu_i^{(k)}) d\mathbf{x}}{\int_{\mathbf{R}_i} d\mathbf{x}} \end{aligned}$$

où $l, k \in \{1, \dots, n\}$, n étant la dimension de l'image vectorielle $\mathbf{I}$.

Pour obtenir les équation d'Euler-Lagrange par rapport aux courbes $\partial \mathbf{R}_i$, on considère un ensemble de courbes paramétrées, planes, simples et fermées, $\tilde{\gamma}_i : [0, 1] \rightarrow \Omega$, $i = 1, \dots, N-1$, de paramètre $s \in [0, 1]$. On associe la

région $\mathbf{R}_i$ à l'intérieur de la courbe $\tilde{\gamma}_i$. Les équations de descente d'Euler-Lagrange correspondant aux fonctionnelles $\mathcal{E}_\Omega(\tilde{\gamma}_i | \mathbf{I})$ s'obtiennent en inscrivant les courbes $\tilde{\gamma}_i$ dans une famille de courbes paramétrées $\tilde{\gamma}_i(t) : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \Omega$:

$$\frac{d\tilde{\gamma}_i}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{E}_\Omega(\tilde{\gamma}_i)}{\partial \tilde{\gamma}_i} \quad (17)$$

où $\frac{\partial \mathcal{E}_\Omega(\tilde{\gamma}_i)}{\partial \tilde{\gamma}_i}$ est la dérivée fonctionnelle de $\mathcal{E}_\Omega(\tilde{\gamma}_i)$ par rapport à $\tilde{\gamma}_i$. La segmentation recherchée est composée des régions $\mathbf{R}_i$ à convergence, c'est-à-dire, pour $t \rightarrow \infty$ plus la région $\mathbf{R}_N$.

On développe les dérivées fonctionnelles de (17) en considérant individuellement les termes de (12).

Pour le premier terme,

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\gamma}_i} \left(\int_{\mathbf{R}_i} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) \quad (18)$$

et en tenant compte du modèle gaussien adopté (16), on a [12]:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\gamma}_i} \left(\int_{\mathbf{R}_i} e_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) = e_i(\mathbf{x}) \vec{n}_i(\mathbf{x}) \quad (19)$$

où $\vec{n}_i(\mathbf{x})$ est la normale unitaire extérieure à $\tilde{\gamma}_i$ au point $\mathbf{x}$. Pour le deuxième terme, on se réfère à [5] où on montre que la dérivée fonctionnelle par rapport à Γ de:

$$E(\Gamma) = \int_{\mathbf{R}_\Gamma} f(x, y) dx dy \quad (20)$$

est:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} E(\Gamma) = f(x, y) \vec{n}(x, y) \quad (21)$$

où $\nu = \{(x, y) \in \Gamma\}$.

La dérivée fonctionnelle du deuxième terme de (12) est alors:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\gamma}_i} \left(\int_{\mathbf{R}_i^c} \psi_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right) = -\psi_i(\mathbf{x}) \vec{n}_i(\mathbf{x}) \quad (22)$$

Notons qu'on a pu utiliser le résultat dans [5] parce que la fonction ψ_i est indépendante de $\tilde{\gamma}_i$. Quoique ce ne soit pas indiqué dans [5], le résultat reste valide pour des fonctions f continues par morceaux puisque le théorème de Green s'applique à des fonctions de représentation P, Q qui sont C^1 par morceaux [13]. Notre fonction ψ_i est continue par morceaux si on suppose que l'image $\mathbf{I}$ est continue par morceaux, hypothèse souvent retenue en segmentation.

Pour obtenir des frontières de segmentation régulières et éviter un morcellement en petites régions, le terme de régularisation $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_i)$ est défini par:

$$\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_i) = \lambda \oint_{\tilde{\gamma}_i} ds \quad (23)$$

La dérivée fonctionnelle par rapport à $\tilde{\gamma}_i$ est:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\gamma}_i} (\mathcal{L}(\tilde{\gamma}_i)) = \lambda \kappa_i(\mathbf{x}) \vec{n}_i(\mathbf{x}) \quad (24)$$

où κ_i est la fonction de courbure moyenne de $\tilde{\gamma}_i$. En regroupant les trois termes, l'équation d'évolution de $\tilde{\gamma}_i$ est:

$$\frac{d\tilde{\gamma}_i}{dt}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \tilde{\gamma}_i} = -(e_i(\mathbf{x}) - \psi_i(\mathbf{x}) + \lambda\kappa_i(\mathbf{x})) \vec{n}_i(\mathbf{x}) \quad (25)$$

3.4 Partition à convergence

D'après la définition de la région $\mathbf{R}_N$, la seule possibilité de ne pas avoir une partition est que l'intersection des régions ne soit pas nulle:

$$\exists i, j \in [1, N-1], i \neq j \mid \mathbf{R}_i \cap \mathbf{R}_j \neq \emptyset$$

Pour qu'une telle intersection se produise, les courbes respectives devront se couper. Si l'on part d'une initialisation où les courbes forment une partition, alors, pour qu'une intersection apparaisse pendant l'évolution, les courbes devront d'abord être tangentes en un ensemble de points et continuer l'évolution pour se couper. Nous allons montrer qu'avec l'équation d'évolution que nous avons choisie, ceci ne peut pas se produire.

Notons d'abord que dans l'équation d'évolution (25) on peut identifier deux termes, l'un relié à la courbure de la courbe ($\lambda\kappa_i$) et l'autre relié aux données ($d_i(\mathbf{x}) = e_i(\mathbf{x}) - \psi_i(\mathbf{x})$). Analysons le comportement de deux courbes quelconques $\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\gamma}_j$ qui se rencontrent en un point $\mathbf{x}_0$.

Terme de courbure. Les deux configurations géométriques possibles sont montrées aux figures 1 et 2, respectivement.

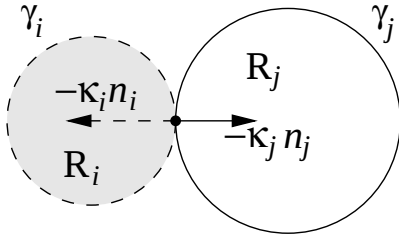


Figure 1: Cas 1

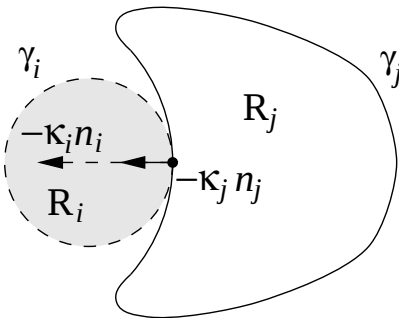


Figure 2: Cas 2

Dans le premier cas les deux courbures sont positives ($\kappa_i(\mathbf{x}_0) \geq 0, \kappa_j(\mathbf{x}_0) \geq 0$). Cette condition implique que

les deux courbes se rétractent empêchant les courbes de se couper.

Dans le deuxième cas, les courbures ont des signes différents, ($\kappa_i(\mathbf{x}_0) \geq 0, \kappa_j(\mathbf{x}_0) \leq 0$), faisant évoluer la courbe $\tilde{\gamma}_i$ dans la direction opposé à son vecteur normal et la courbe $\tilde{\gamma}_j$ dans la direction de son vecteur normal. Avec cette évolution les deux courbes vont dans la même direction mais, puisque $|\kappa_i(\mathbf{x}_0)| \geq |\kappa_j(\mathbf{x}_0)|$, la courbe $\tilde{\gamma}_i$ se rétracte plus vite que $\tilde{\gamma}_j$ avance. Cette évolution implique elle aussi que les courbes ne peuvent pas se couper.

On peut conclure alors que le terme de courbure empêche en tout moment la formation d'une intersection entre deux régions.

Terme de données. Pour le terme de données nous avons aussi deux cas complémentaires à distinguer:

1. $e_i(\mathbf{x}_0) = \min_{l \in [1, N]} (e_l(\mathbf{x}_0))$ ou $e_j(\mathbf{x}_0) = \min_{l \in [1, N]} (e_l(\mathbf{x}_0))$.
2. $e_k(\mathbf{x}_0) = \min_{l \in [1, N]} (e_l(\mathbf{x}_0))$, $k \neq i$; $k \neq j$.

Dans le premier cas, supposons, sans perte de généralité, que $e_i(\mathbf{x}_0) = \min_{l \in [1, N]} (e_l(\mathbf{x}_0))$. Ceci implique que $d_i(\mathbf{x}_0) \leq 0$ et $d_j(\mathbf{x}_0) = e_j(\mathbf{x}_0) - e_i(\mathbf{x}_0) \geq 0$. Les deux courbes $\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\gamma}_j$ se déplacent dans la même direction, avec $\tilde{\gamma}_i$ avançant et $\tilde{\gamma}_j$ se rétractant. Mais, comme $|d_i(\mathbf{x}_0)| \leq |d_j(\mathbf{x}_0)|$, $\tilde{\gamma}_j$ se rétracte plus rapidement que $\tilde{\gamma}_i$ avance. L'évolution empêche alors les courbes de se couper.

Dans le deuxième cas on a: $d_i(\mathbf{x}_0) \geq 0$ et $d_j(\mathbf{x}_0) \geq 0$. Les deux courbes $\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\gamma}_j$ se rétractent.

On conclut donc que, tout comme le terme de courbure, le terme de donnée fait évoluer les courbes sans causer d'intersection. $\square$

3.5 Représentation par courbes de niveau

On utilise le formalisme des courbes de niveau pour réaliser l'évolution des courbes $\tilde{\gamma}_i$ décrite par les équations (25). Les avantages des courbes de niveau, particulièrement pour la segmentation d'images, sont bien connus. Suffit-il ici de rappeler que les courbes de niveau permettent de gérer automatiquement les changements de topologie des courbes durant leur évolution, et de réaliser cette évolution par des méthodes numériques stables [4].

On représente *implicitement* chaque courbe $\tilde{\gamma}_i$ par le niveau zéro d'une fonction $\phi_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tel que $\phi_i > 0$ à l'intérieur de la région délimitée par $\tilde{\gamma}_i$ et $\phi_i < 0$ à l'extérieur. On peut alors montrer que si l'évolution de $\tilde{\gamma}_i$ est décrite par l'équation:

$$\frac{d\tilde{\gamma}_i(s, t)}{dt} = F_i(\tilde{\gamma}_i(s, t), t) \vec{n}_i(s, t) \quad (26)$$

où F_i est une fonction réelle définie dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$, l'évolution de ϕ_i , supposant $\phi_i > 0$ à l'intérieur de $\tilde{\gamma}_i$, est régie par l'équation:

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = F_i(\mathbf{x}, t) \|\vec{\nabla} \phi_i(\mathbf{x}, t)\|, \mathbf{x} \in \tilde{\gamma}_i \quad (27)$$

À tout moment durant l'évolution de ϕ_i , la courbe $\tilde{\gamma}_i$ est le niveau zéro de ϕ_i .

Dans notre cas, l'équation d'évolution de ϕ_i est définie par:

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -(e_i(\mathbf{x}) - \psi_i(\mathbf{x}) + \lambda \kappa_i) \|\vec{\nabla} \phi_i(\mathbf{x}, t)\| \quad (28)$$

où κ_i , la fonction de courbure moyenne de $\tilde{\gamma}_i$ peut s'écrire en fonction de ϕ_i :

$$\kappa_i = \text{div} \left(\frac{\nabla \phi_i}{|\nabla \phi_i|} \right) \quad (29)$$

Nous devons noter que la fonction F_i n'est définie que pour les points sur $\tilde{\gamma}_i$. Afin de pouvoir implanter l'algorithme d'évolution par courbes de niveaux la fonction F_i doit être définie aussi à l'extérieur de la courbe $\tilde{\gamma}_i$. Dans la littérature on trouve plusieurs façons de faire cette extension. Une première méthode à mentionner est celle proposée par Malladi *et al.* [14] où l'on prend la valeur de la fonction au point de la courbe qui est le plus proche. Une autre possibilité est d'utiliser l'approche décrit dans [4, chapitre 11] où l'on construit une extension qui garanti que la fonction ϕ_i est, à tout moment, la fonction distance signé à la courbe $\tilde{\gamma}_i$. Ceux deux approches ont l'inconvénient d'être dépendantes de l'initialisation. En effet l'initialisation doit être telle que les courbes recouvrent au moins partiellement les régions qu'elles doivent segmenter.

Une autre extension possible est d'utiliser la même équation d'évolution pour tous les points de l'image [15, 16]. Une telle extension sera plus robuste à l'initialisation, parce que même si une région n'est pas touché ou à l'intérieur d'une courbe, celle-ci évoluera pour la segmenter.

Dans notre cas nous avons choisi d'utiliser cette dernière extension. Une situation particulière, par contre, pourrait se produire lorsqu'une nouvelle courbe de niveaux apparaît. Nous étudions présentement les implications que pourrait avoir cette condition dans l'intégrité de la partition. Nos résultats expérimentaux suggèrent qu'une partition est encore garantie même dans ce cas, mais une preuve formelle doit encore être produite.

Notons que l'équation d'évolution (28) est identique à celle dans [12] dans le cas d'une segmentation en deux régions. Notons aussi que cette équation a été mentionnée dans [17], quoique non retenue, comme généralisation possible à plusieurs régions d'une méthode de segmentation par le mouvement.

4 Résultats

Pour valider notre formulation et l'implantation de l'algorithme correspondant, nous avons conduit plusieurs essais sur des images synthétiques aussi bien que des images acquises par caméra. Nous montrons d'abord un exemple simple, en l'occurrence la segmentation en trois régions d'une image en niveaux de gris. Nous présentons ensuite des exemples de segmentation d'images vectorielles.

4.1 Images en niveaux de gris

Pour une image en niveaux de gris, le modèle d'image dans les régions de segmentation a une forme simplifiée:

$$p_{\varphi_i}(I(\mathbf{x})) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} e^{-\frac{(I(\mathbf{x}) - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}} \quad (30)$$

Il y a deux paramètres à estimer pour chaque région, à savoir la moyenne (μ_i) et la variance (σ_i^2). Les équations d'évolution dans ce cas sont, pour $i = 1, \dots, N - 1$:

$$\frac{\partial \phi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \left(\frac{1}{2} \log\left(\frac{\sigma_i^2}{\sigma_j^2}\right) + \frac{(I(\mathbf{x}) - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} - \frac{(I(\mathbf{x}) - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2} + \lambda \kappa_i \right) \|\vec{\nabla} \phi_i(\mathbf{x}, t)\|$$

$$\text{où } j = \arg \min_{j \neq i} \left(\log(\sigma_j^2) + \frac{(I - \mu_j)^2}{\sigma_j^2} \right).$$

On montre à la figure 3 les résultats obtenus avec une image bruitée contenant trois régions ayant des moyennes différentes¹. Les moyennes sont les suivantes: 0, 128 et

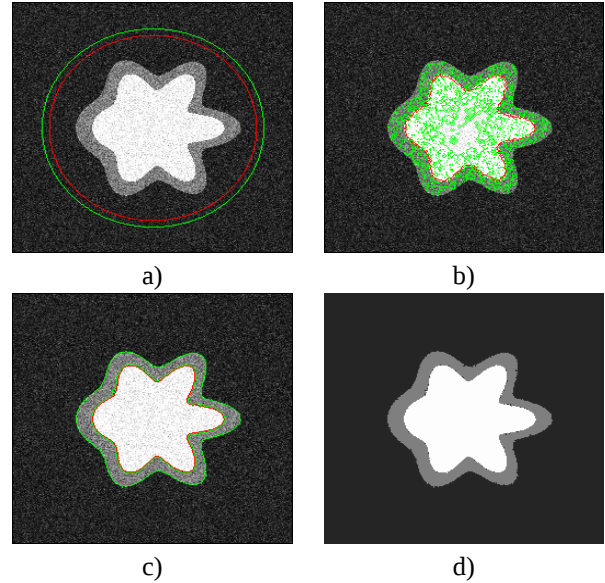


Figure 3: Image synthétique bruitée $\sigma = 30$: a) initialisation, b) évolution c) segmentation finale et d) régions segmentées représentées par leurs moyennes.

256; le bruit est additif gaussien ($\sigma = 30$) pour la région blanche et la région grise. Un bruit de distribution de Rayleigh ($\sigma = 15$) a été ajoutée à l'arrière plan. On constate facilement que la segmentation obtenue est une partition très fidèle de l'image.

4.2 Images en couleurs

Nous présentons maintenant les résultats obtenus pour des images vectorielles. On traite ici le cas des images en

¹Courtoisie de MGH CMA Internet Brain Segmentation Repository (IBSR)

couleurs. Ces images sont vectorielles. L'information de couleur dans les images peut être représentée dans plusieurs espaces. Les espaces couramment utilisées telles que RGB, YCbCr et YUV, ne sont pas uniformes du point de vue perceptuel. Pour avoir une relation plus étroite entre la distance perçue entre différents couleurs et la distance entre les points de l'espace de couleurs il faut se tourner vers les espaces uniformes du point de vue perceptuel telles que CIElab et CIEluv [18, chapitre 7]. C'est pour cette raison que nous utilisons l'espace de couleurs CIElab dans nos expériences. Les images ont été donc converties de l'espace RGB ou YCbCr où elles étaient originellement définies dans l'espace CIElab pour avoir une meilleure correspondance entre les distances dans l'espace et les différences de couleurs perçues par l'observateur. Dans la figure 4 nous montrons le résultat de la segmentation de l'image "Tigger"², représentant un chat couché. Il

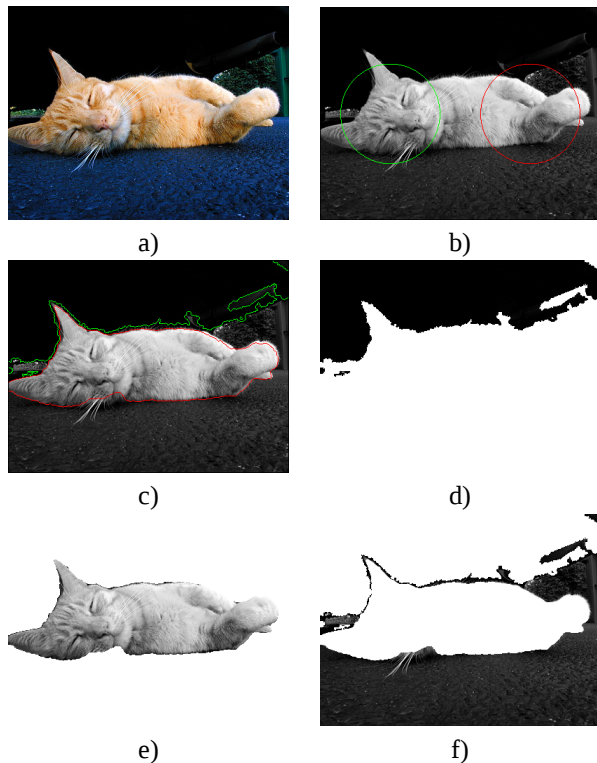


Figure 4: Segmentation d'une image en couleurs: a) originale, b) initialisation, c) segmentation finale, et régions segmentées, d) voiture, e) chat, f) rue.

y a trois régions de différentes couleurs facilement identifiables dans l'image originale (figure 4 a) correspondant au chat, à la voiture et à la rue. On voit que même s'il y a de la texture et différents tons de couleur dans chaque régions, la segmentation est très bonne.

Nous montrons un deuxième exemple de segmentation d'une image en couleurs. Dans ce cas il s'agit d'une image tirée de la séquence vidéo "Ping-pong". Cette

séquence vidéo est en format YCbCr entrelacé, ce qui implique qu'on a dû interpoler la composante couleur tant à l'horizontale qu'à la verticale pour ensuite la convertir à l'espace CIElab. Le résultat de la segmentation est montré à la figure 5. Dans cette figure, la première image est l'image originale en couleur où on voit qu'il y a 4 régions de couleurs bien différenciées: le polo vert, le short rouge, le mur en arrière orange et l'homme (peau, cheveux ainsi que la raquette, qui est plus difficile à voir).

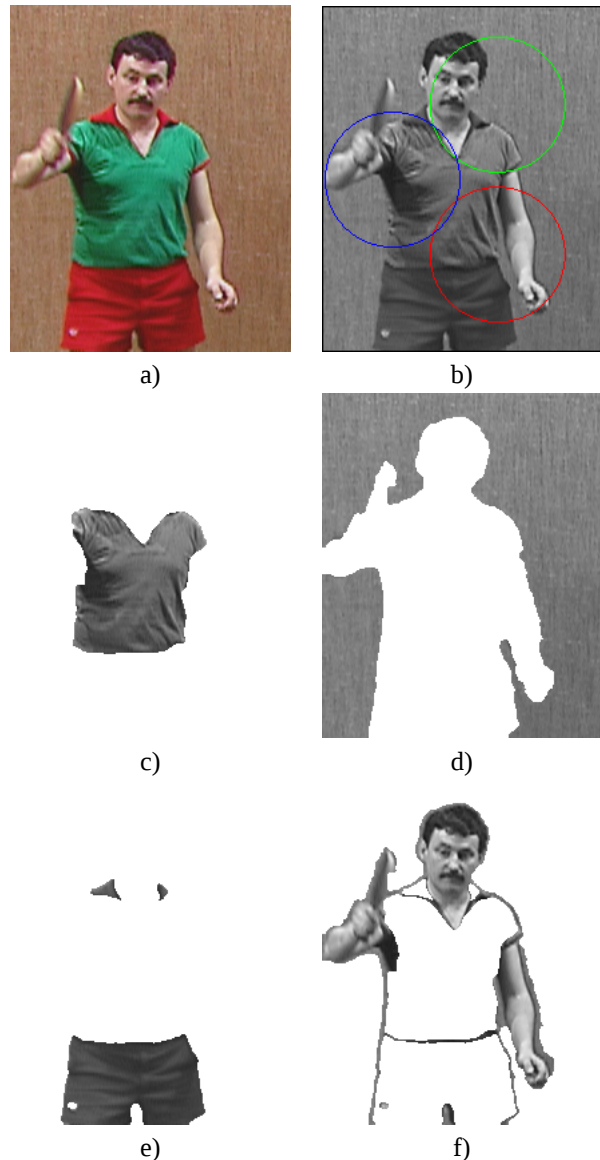


Figure 5: Segmentation d'une image en couleurs: a) originale, b) initialisation, et régions segmentées, c) polo d) mur, e) short, f) homme.

La segmentation est très bien réussie, les régions associées au polo, au mur et au short sont très bien définies. La quatrième région, qui correspond à la région formée par l'extérieur de toutes les courbes, contient l'homme et la raquette. Dans cette région, on trouve aussi de pe-

²©2001 Hoss Firooznia, <http://photoweb.lodestone.org/photo/671/en>

tites frontières. Ceci peut être expliqué par le processus d'interpolation de la couleur qui fait que des régions frontalières entre zones bien définies deviennent plutôt floues, n'appartenant à aucune des zones dans leurs voisinage, et allant alors à l'extérieur de toutes les régions.

4.3 Images de texture

On montre maintenant des résultats pour des images de textures. Les images vectorielles de texture sont obtenues par filtrage. L'image est obtenue en appliquant un certain nombre de filtres à une image en niveaux de gris. Nous utilisons la même banque de filtres pour toutes les images. Aucune connaissance a priori sur les images n'est mise en oeuvre. Les filtres utilisés sont ceux suggérés dans [19] pour la modélisation d'images naturelles et d'images de textures:

1. Le filtre $\delta()$, qui produit l'image elle-même.
2. Le module des dérivées, ∇_x, ∇_y , estimé par:

$$\nabla_x * I(x, y) = |I(x+1, y) - I(x, y)|, \quad (31)$$

$$\nabla_y * I(x, y) = |I(x, y+1) - I(x, y)| \quad (32)$$

3. Laplacien de Gaussien.

$$LG(x, y, s) = (x^2 + y^2 - s^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{s^2}} \quad (33)$$

où s est l'échelle du filtre.

4. Filtre de Gabor.

$$G(\mathbf{x}, s, \theta) = e^{-\frac{4u(\mathbf{x})^2 + v(\mathbf{x})^2}{2s^2}} e^{[-i\frac{2\pi}{s}(u(\mathbf{x}))]} \quad (34)$$

où $u(x, y) = x \cos(\theta) + y \sin(\theta)$ et $v(x, y) = -x \sin(\theta) + y \cos(\theta)$. Un filtre de Gabor donne une image à valeurs complexes $G = G_R + iG_I$. Ici, on utilise:

$$I_G(s, \theta) = \sqrt{(G_R * I)^2 + (G_I * I)^2} \quad (35)$$

Le réponse des filtres est normalisée pour avoir des valeurs entre 0 et 255. L'ensemble des filtres utilisés est montré au tableau 1. Une image vectorielle est formée dont les composantes sont les réponses de ces filtres.

No.	Filtre	Dim.	No.	Filtre	Dim.
1	δ	1×1	8	$G(2, 0)$	5×5
2	∇_x	1×2	9	$G(2, 90)$	5×5
3	∇_y	2×1	10	$G(4, 0)$	7×7
4	$LG(\frac{1}{\sqrt{2}})$	3×3	11	$G(4, 90)$	7×7
5	$LG(1)$	5×5	12	$G(6, 0)$	11×11
6	$LG(2)$	9×9	13	$G(6, 90)$	11×11
7	$LG(4)$	13×13	—	—	—

Table 1: Ensemble des filtres utilisés

Le premier exemple que nous montrons est celui en deux régions de l'image de la figure 6. Le contour initial tracé

dans l'image est montré en a), une position intermédiaire durant son évolution en b) et sa position finale en c). La région de segmentation correspondant à l'image du zèbre est montrée sur fond noir en d). On peut facilement constater la qualité de la segmentation.

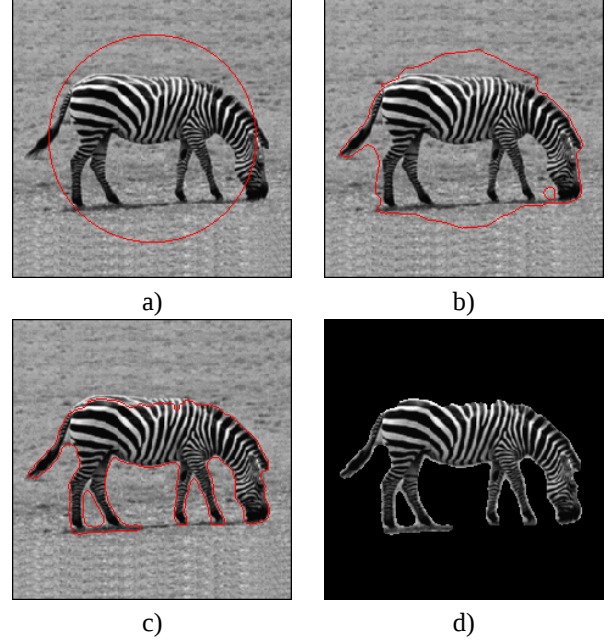


Figure 6: Image Zèbre: a) initialisation, b) évolution, c) segmentation finale, et d) zèbre segmenté sur fond noir.

Les prochains exemples sont beaucoup plus difficiles. La figure 7 montre une image de texture contenant trois régions. Ces régions ont les mêmes moyennes et variances. Seule l'orientation distingue le rectangle du fond, et la texture distingue le carré du rectangle et du fond. Le contour initial placé dans l'image est montré en a), une position intermédiaire durant son évolution en b), et sa position finale en c). La segmentation du rectangle est montrée en e) et celle du carré en f). La segmentation est d'excellente qualité.

Une autre image de texture, plus complexe, est celle de la figure 8. Cette image est composée de textures réelles. L'initialisation est placée sur l'image en a), ici nous avons initialisé avec plusieurs cercles. L'image b) montre les courbes pour la segmentation finale et c) d) e) f) les régions de segmentation à convergence de l'algorithme. La segmentation est très bonne. Le prolongement de la région en f), qui correspond à la région formée par l'extérieur des courbes, est une région frontalière attribuée à cette région à cause de la grande dimension du support de certains des filtres. Lorsqu'on utilise ce genre de filtres, l'appartenance des points frontières à l'une ou l'autre des régions de chaque côté d'une frontière peut devenir ambiguë. Dans cette situation aucune des régions ne capture les points et ils sont donc attribués au fond.

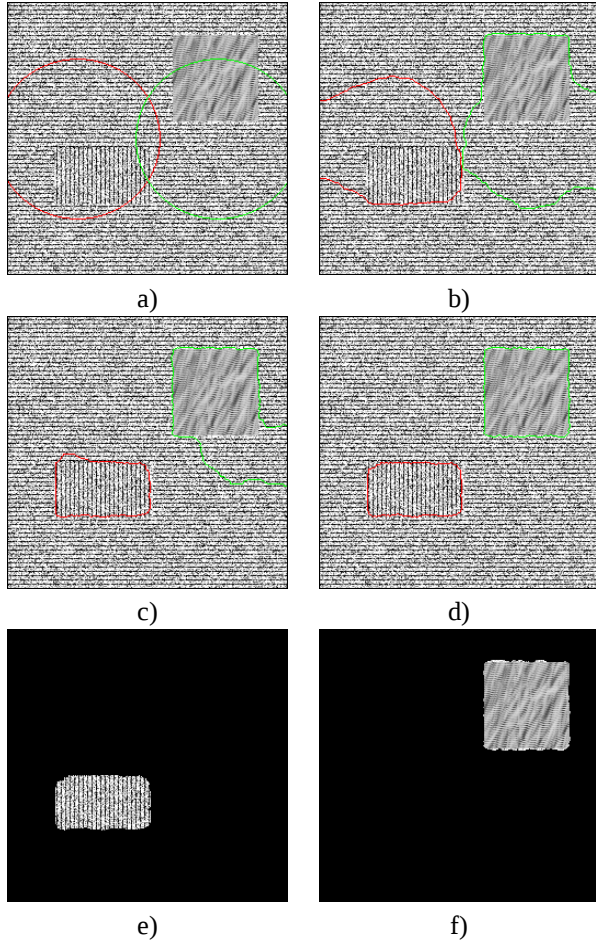


Figure 7: Image de texture synthétique avec trois régions: a) initialisation, b),c) évolution, d) segmentation finale, et e) f) régions segmentées sur fond noir.

Notre dernier exemple montre la segmentation d'une image naturelle d'un léopard. Dans la figure 9 a) on montre l'image originale avec l'initialisation. Les images subséquentes montrent la segmentation finale ainsi que les régions segmentées. Dans cet exemple on voit quelques erreurs dans la segmentation. La partie sombre sous la tête du léopard et l'oreille droite sont mal segmentées, étant attribués au bois. Le résultat global, par contre, est très bon si l'on considère qu'aucune information particulière à l'image n'a été utilisée. Nous pouvons voir aussi l'effet du support des filtres dans les frontières entre le léopard et le fond.

5 Conclusion

Problème fondamental en traitement d'images et vision par ordinateur, la segmentation d'images intervient dans de nombreuses applications. Le problème consiste à réaliser une partition du domaine d'image en régions, la restriction de l'image à chaque région répondant à une description souvent donnée explicitement sous forme de modèle. Nous avons proposé une méthode globale de

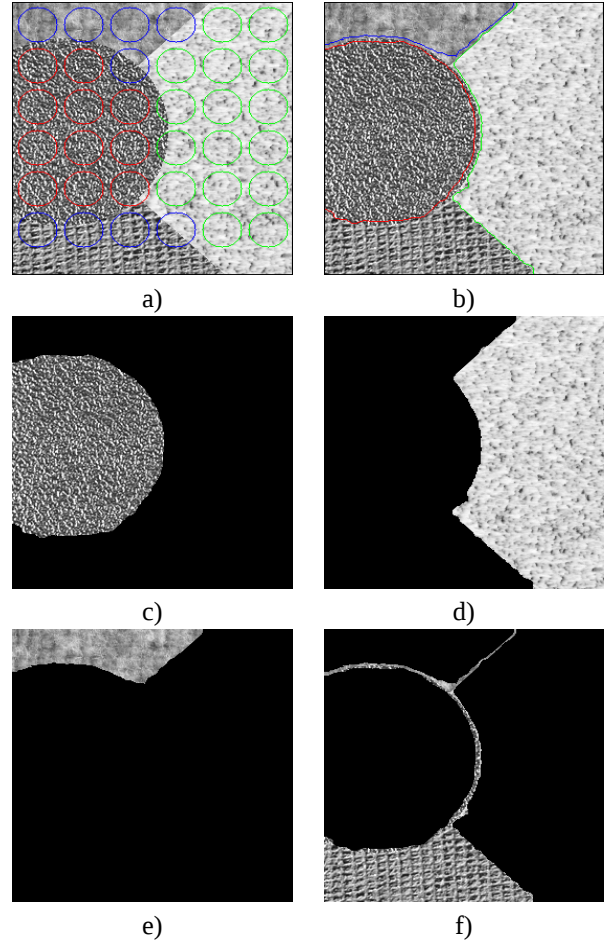


Figure 8: Image synthétique formée par 4 textures réelles: a) initialisation, b) segmentation finale et c) d) e) f) régions segmentées sur fond noir.

segmentation par évolution de courbes, qui permet de traiter des images scalaires aussi bien que vectorielles. Le problème est formulé comme un problème de quantification avec contrainte spatiale. Le modèle retenu étant le modèle gaussien par souci de généraliser le modèle constant par morceaux couramment retenu. La segmentation en N régions est énoncé comme la minimisation simultanée de $N - 1$ fonctionnelles chacune ne considérant que deux régions. L'évolution de courbes correspondante, réalisée via courbes de niveaux, converge vers une partition du domaine d'image. Pour valider notre formulation et l'implantation de l'algorithme correspondant, nous avons conduit plusieurs essais sur des images synthétiques aussi bien que des images acquises par caméra. Des tests sur des images en couleurs et sur des images de textures obtenues par filtrage avec un banc de filtres à partir d'une image en niveaux des gris ont montré la validité et applicabilité de l'algorithme proposé.

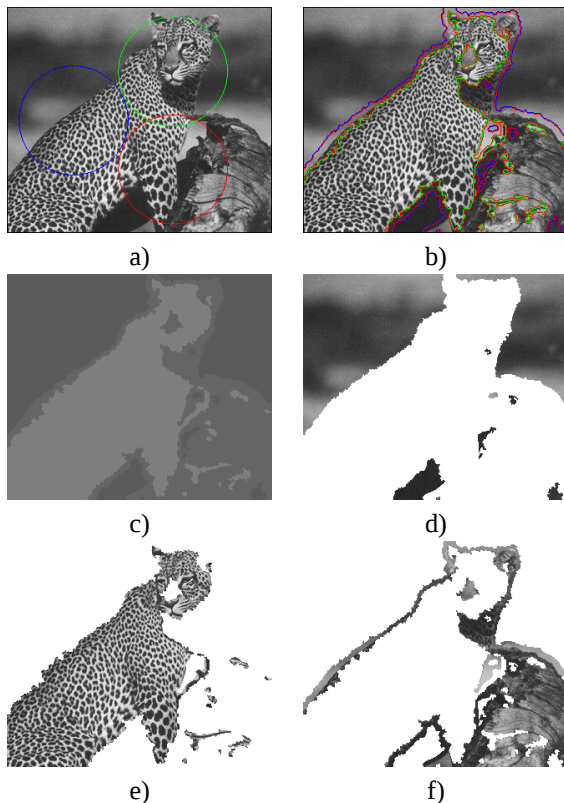


Figure 9: Image avec 3 régions de textures naturelles: a) initialisation, b) c) segmentation finale, and d) e) f) régions segmentées.

Financement de l'étude

Cette étude a bénéficié du financement du Conseil de Recherche en Sciences Naturelles et Génie du Canada (CRSNG), subventions STR224122 et OGP 0004234.

References

- [1] M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *Intern. J. Comput. Vis.*, vol. 1, pp. 321–331, 1987.
- [2] D. Terzopoulos and A. Witkin, "Constraints on deformable models: Recovering shape and non-rigid motion," *Artif. Intell.*, vol. 36, pp. 91–123, 1988.
- [3] S. Osher and J. Sethian, "Front propagation with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations," *J. Comp. Physics*, vol. 79, pp. 12–49, 1988.
- [4] J. Sethian, *Level Set Methods and Fast Marching Methods*, Cambridge University Press, 2 edition, 1999.
- [5] S. Zhu and A. Yuille, "Region competition: Unifying snakes, region growing, and bayes /MDL for multi-band image segmentation," vol. 18, no. 9, pp. 884–900, Sept. 1996.
- [6] T. Chan, J. Shen, and L. Vese, "Variational PDE models in image processing," *Notices of the American Mathematical Society*, vol. 50, no. 1, pp. 14–26, Jan. 2003.
- [7] N. Paragios and R. Deriche, "Coupled geodesic active regions for image segmentation," Tech. Rep. 3783, INRIA, Sophia Antipolis Cedex, France, 1999.
- [8] C. Samson, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and J. Zerubia, "Multiphase evolution and variational image classification," Tech. Rep. 3662, INRIA, Sophia Antipolis Cedex, France, Apr. 1999.
- [9] A. Yezzi, A. Tsai, and A. Willsky, "A fully global approach to image segmentation via coupled curve evolution equations," *J. Vis. Commun. Image Represent.*, vol. 13, no. 1, pp. 195–216, Mar. 2002.
- [10] T. Chan and L. Vese, "An active contour model without edges," in *Proc. Int. Conf. Scale-Space Theories in Computer Vision*, Corfu, Greece, 1999, pp. 141–151.
- [11] A. Gersho and R. Gray, *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer Academic Publishers, 1 edition, 1992.
- [12] M. Rousson and R. Deriche, "A variational framework for active and adaptative segmentation of vector valued images," in *Proc. IEEE Workshop on Motion and Video Computing*, Orlando, FL, Dec. 2002.
- [13] R. Weinstock, *Calculus of variations*, Dover Publications Inc., New York, NY, 1974.
- [14] R. Malladi, J. Sethian, and B. Vemuri, "Shape modeling with front propagation: A level set approach," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 17, no. 2, pp. 158–175, 1995.
- [15] C. Rhee, L. Talbot, and J. Sethian, "Dynamical study of a premixed V flame," *Journal of Fluid Mechanics*, no. 300, pp. 87–115, 1995.
- [16] A. Mitiche, R. Feghali, and A. Mansouri, "Motion tracking as spatio-temporal motion boundary detection," *Robotics and Autonomous Systems*, vol. 43, pp. 39–50, 2003.
- [17] A.-R. Mansouri and J. Konrad, "Multiple motion segmentation with level sets," no. 2, pp. 201–220, Feb. 2003.
- [18] C. Poynton, *A technical introduction to digital video*, John Wiley & Sons, Inc., 1996.
- [19] S. Zhu and D. Mumford, "Prior learning and gibbs reaction-diffusion," vol. 19, no. 11, pp. 1236–1250, Nov. 1997.