

Raisonner à propos des droites et des cercles : réseaux de contraintes et systèmes déductifs

Philippe Balbiani

Institut de recherche en informatique de Toulouse, Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4

Résumé

Nous abordons l'étude des relations qualitatives qui tiennent entre eux dans le plan euclidien, les droites, les cercles et les cercles Δ -tangents. Nous analysons la complexité du problème de la consistance des systèmes de contraintes exprimés avec ces relations qualitatives. Nous initions l'analyse logique de ces relations qualitatives par l'entremise de systèmes déductifs dont nous examinons les propriétés métamathématiques.

Mots-clés

Représentation des connaissances, problèmes de satisfaction de contraintes, raisonnement spatial qualitatif.

1 Introduction

Pour suppléer au peu d'art que les mathématiques mirent en la géométrie euclidienne pour caractériser les corps et leurs positions en termes proches de la cognition humaine, un effort important a été mené visant à produire des modèles qualitatifs du raisonnement spatial. Parce qu'un modèle qualitatif du raisonnement spatial est un modèle mathématique de l'espace dans lequel nous ne pouvons connaître que les relations des entités qui le composent, la logique classique convient mieux que toute autre à son élaboration. Quel que soit le domaine traité, un modèle qualitatif doit choisir ses entités élémentaires. Un modèle basé sur les points rend difficilement compte de la notion d'étendue, et ce sont les modèles basés sur les régions qui s'affichent, nombreux, au palmarès. En effet, il existe une très large littérature concernant les faits relatifs au raisonnement spatial qualitatif. On pourra se reporter à Clarke [6, 7], Randell et Cohn [14], et Randell, Cui et Cohn [15], pour plus de détails, et Vieu [19], pour un exposé du sujet. Dans tous les cas pour la représentation de l'espace, une relation fondamentale est celle de connexion, même si d'autres relations se présentent naturellement, par exemple celle d'inclusion entre deux régions. L'examen des propriétés relatives à ces relations est l'objet principal des recherches conduites dans cette discipline de l'intelligence artificielle qu'est le raisonnement spatial qualitatif.

Dugat, Gambarotto et Larvor [9], puis Gambarotto [11] ont reconsidéré la géométrie des corps initiée par Tarski [18], et dont l'entité élémentaire est la sphère. A dessein de

représenter les corps physiques par des ensembles de sphères, dans le but de raisonner sur leurs positions respectives via les correspondances entre ces ensembles, ils élaborent un langage de représentation et une méthode de raisonnement visant à permettre la description structurale d'objets et la reconnaissance automatique de leurs formes. Ce langage et cette méthode sont basés sur des outils se rapportant de la théorie des graphes, le rôle des nœuds étant joué par les sphères, celui des arcs par les relations entre sphères. Or nous pensons que la description d'objets et la reconnaissance de leurs formes sont des objectifs qui nécessitent un modèle qualitatif du raisonnement spatial basé sur des entités affines comme les droites et les plans, pour parler d'objets ou de parties d'objets colinéaires ou coplanaires, et des entités métriques comme les cercles et les sphères, pour évoquer les distances ou les angles entre ces objets ou ces parties d'objets. Le modèle élaboré par Dugat, Gambarotto et Larvor présente de façon implicite la plupart des caractères qui qualifient et distinguent ces entités, mais nous croyons que la présence explicite de ces caractères ajoute à l'attraction qu'ils exercent sur l'attention de ceux qui cherchent à décrire les objets ou à les reconnaître.

La méthode que nous proposons pour la description d'objets et la reconnaissance de leurs formes, se fonde sur les réseaux de contraintes et les systèmes déductifs. Nous pensons que la description d'objets s'apparente à l'écriture de réseaux de contraintes, et que la reconnaissance de leurs formes participe du problème de la consistance de ces réseaux. Limitant notre propos à des objets placés dans un espace de dimension deux, nous avons organisé l'article de la façon suivante. Dans la section 2, nous abordons l'étude des relations qualitatives qui tiennent entre eux dans le plan euclidien, les droites (section 2.1) et les cercles (section 2.2). En considération de l'importance qu'on leur donne dans le cadre du raisonnement sur les préférences en théorie de la décision, nous traitons aussi l'étude des relations qualitatives qui tiennent entre eux dans le plan euclidien, les cercles Δ -tangents (section 2.3), qui sont dans un repère orthonormé de dimension deux, les cercles tangents par le dessus à l'axe des abscisses (voir Düntsch et Roubens [10]). Dans les sections 3.1, 3.2 et 3.3, par l'intermédiaire de réseaux de contraintes dont nous essayons de résoudre le problème de la consistance,

nous mettons en action les relations qualitatives entre droites, cercles et cercles Δ -tangents. Dans la section 4, par l'entremise de systèmes déductifs dont nous examinons les propriétés métamathématiques, nous nous consacrons à l'analyse logique des relations qualitatives entre droites, cercles et cercles Δ -tangents.

Réseaux de contraintes et systèmes déductifs: nous sommes encore loin d'appliquer nos résultats à la question de la description structurale d'objets et de la reconnaissance automatique de leurs formes. Nous croyons néanmoins qu'une approche sérieuse de cette question appelle au préalable l'étude algébrique et logique que nous initions dans cet article des relations qualitatives entre droites, cercles et cercles Δ -tangents. L'algèbre et la logique non pas considérées comme méthodologies de base de la recherche informatique, mais comme étapes préliminaires fondamentales à son avènement.

2 Positions relatives

2.1 Droites

Deux droites distinctes sont dites sécantes lorsqu'elles se coupent en un point, parallèles si elles n'ont pas de point commun. La figure formée par deux droites distinctes $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ est déterminée par leurs directions $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Deux droites distinctes sont sécantes ou parallèles suivant que leurs directions sont linéairement indépendantes ou colinéaires. Les réciproques de ces propriétés sont vraies. Nous écrirons: $(A, \vec{u}) PO (B, \vec{v})$ pour “ $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ sont sécantes”, $(A, \vec{u}) DC (B, \vec{v})$ pour “ $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ sont parallèles”.

2.2 Cercles

Deux cercles non concentriques sont dits sécants lorsqu'ils se coupent en deux points, adjacents s'ils ont un point commun unique, disjoints s'ils n'ont pas de point commun. La figure formée par deux cercles non concentriques (A, r) et (B, s) est déterminée par la distance de leurs centres A et B , et par leurs rayons r et s . Elle admet pour axe de symétrie, la droite AB . Nous poserons $AB = d$ et nous supposerons $r < s$. Lorsque (A, r) et (B, s) sont sécants, ils ont deux points communs P et Q situés en dehors de la droite des centres, et symétriques par rapport à cette droite. Dans le triangle ABP de côté $AB = d$, $AP = r$ et $BP = s$, on peut écrire $s - r < d < s + r$. Lorsque (A, r) et (B, s) sont adjacents, ils ont un point commun R situé sur la droite des centres. Si A et B sont d'un même côté de R , les deux cercles sont adjacents intérieurement et l'on a $d = s - r$. Si A et B sont de part et d'autre de R , les deux cercles sont adjacents extérieurement et l'on a $d = s + r$. Si (A, r) et (B, s) n'ont pas de point commun, l'un est situé tout entier soit dans la région intérieure, soit dans la région extérieure à l'autre. (A, r) et (B, s) sont disjoints intérieurement si tous les points de l'un des cercles sont intérieurs à l'autre. (A, r) et (B, s) sont disjoints extérieurement si tous les points de chacun d'eux sont extérieurs à l'autre. Dans le premier cas

on a $d < s - r$. Dans le second cas on a $d > s + r$. Chacune des relations trouvées est caractéristique de la position correspondante des cercles (A, r) et (B, s) . Nous écrirons: $(A, r) PO (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont sécants”, $(A, r) TPP (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont adjacents intérieurement, et $r < s$ ”, $(A, r) EC (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont adjacents extérieurement”, $(A, r) NTPP (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont disjoints intérieurement, et $r < s$ ”, $(A, r) DC (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont disjoints extérieurement”.

2.3 Cercles Δ -tangents

Considérons une droite Δ sur laquelle on a fixé un sens de parcours indiqué par une flèche et appelé sens de l'axe. Au-dessus de Δ , un cercle Δ -tangent est un cercle qui a un point commun unique avec Δ . La figure formée par deux cercles Δ -tangents distincts (A, r) et (B, s) est déterminée par la distance des projections orthogonales M et N de leurs centres A et B sur Δ , et par leurs rayons r et s . Nous poserons $MN = d$ et nous supposerons $r < s$. Lorsque (A, r) et (B, s) sont sécants, ils ont deux points communs P et Q situés en dehors de la droite des centres, et symétriques par rapport à cette droite. On peut écrire $0 < d < 2 \times \sqrt{r \times s}$. Lorsque (A, r) et (B, s) sont adjacents, ils ont un point commun R situé sur la droite des centres. Si A et B sont d'un même côté de R , les deux cercles sont adjacents intérieurement, Δ passe par R et l'on a $d = 0$. Si A et B sont de part et d'autre de R , les deux cercles sont adjacents extérieurement, Δ ne passe pas par R et l'on a $d = 2 \times \sqrt{r \times s}$. Si (A, r) et (B, s) n'ont pas de point commun, l'un est situé tout entier dans la région extérieure à l'autre. (A, r) et (B, s) sont disjoints si tous les points de chacun d'eux sont extérieurs à l'autre. On a $d > 2 \times \sqrt{r \times s}$. Chacune des relations trouvées est caractéristique de la position correspondante des cercles Δ -tangents (A, r) et (B, s) . Nous écrirons: $(A, r) PO (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont sécants, et M précède N dans le sens de l'axe”, $(A, r) TPP (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont adjacents intérieurement, et $r < s$ ”, $(A, r) EC (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont adjacents extérieurement, et M précède N dans le sens de l'axe”, $(A, r) DC (B, s)$ pour “ (A, r) et (B, s) sont disjoints, et M précède N dans le sens de l'axe”.

3 Réseaux de contraintes

3.1 Droites

Etant donnés deux droites $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ du plan euclidien, on a une des trois possibilités: $(A, \vec{u}) PO (B, \vec{v})$, $(A, \vec{u}) DC (B, \vec{v})$, $(A, \vec{u}) EQ (B, \vec{v})$. Les relations binaires PO et DC , et l'identité EQ constituent les relations linéaires. Elles vérifient certaines propriétés sur l'ensemble des droites du plan euclidien: par exemple, si l'on a $(A, \vec{u}) PO (B, \vec{v})$ et $(B, \vec{v}) DC (C, \vec{w})$, on ne peut avoir ni $(A, \vec{u}) DC (C, \vec{w})$, ni $(A, \vec{u}) EQ (C, \vec{w})$, car les droites $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$ seraient dans une des relations linéaires suivantes: DC , EQ . Donc

$(A, \vec{u}) PO (C, \vec{v})$. En tenant compte du fait que la relation identité est élément neutre pour la composition, nous avons résumé dans la table de la figure 1 les possibilités de composer entre elles les relations linéaires. Cette table de composition a été calculée de telle manière que pour chaque couple (α, β) de relations linéaires, la composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$ est l'ensemble des relations linéaires γ telles que : il existe des droites X, Y et Z du plan euclidien telles que $X \gamma Y, X \alpha Z$ et $Z \beta Y$. Dans le plan euclidien, il est facile de montrer que pour chaque couple (α, β) de relations linéaires, la composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$ est telle que pour chaque couple (X, Y) de droites :

(RL1) Pour que la relation linéaire satisfaite entre les droites X et Y appartienne à Γ , il suffit qu'il existe une droite Z tel que $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$.

On a également :

(RL2) Pour que la relation linéaire satisfaite entre les droites X et Y appartienne à Γ , il faut qu'il existe une droite Z tel que $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$.

Un système de contraintes linéaires est la donnée d'un ensemble fini I dont les éléments sont appelés variables, et d'une fonction C qui associe à chaque couple de variables (i, j) un sous-ensemble $C(i, j)$ de $\{PO, DC, EQ\}$. Le système (I, C) de contraintes linéaires est atomique lorsque pour chaque couple (i, j) de variables, si $Card(C(i, j)) > 1$ alors $C(i, j) = \{PO, DC, EQ\}$. Le système (I, C) de contraintes linéaires est chemin-consistant lorsque pour chaque couple (i, j) de variables, $C(i, j)$ est inclus dans $C(i, k) \circ C(k, j)$ pour toute variable k . Un scénario sur I est la donnée d'une fonction V qui associe à chaque variable i une droite $V(i) = (A_i, \vec{u}_i)$ du plan euclidien. Le problème à résoudre consiste, étant donné un système de contraintes linéaires, à déterminer un scénario consistant pour ce système, c'est-à-dire une fonction V telle que pour chaque couple (i, j) de variables, la relation linéaire satisfaite entre les droites $V(i)$ et $V(j)$ appartient à $C(i, j)$. L'algorithme à la Allen [1] de propagation des contraintes, qui remplace pour chaque couple (i, j) de variables, $C(i, j)$ par $C(i, j) \cap (C(i, k) \circ C(k, j))$ autant de fois que faire se peut, transforme en temps polynomial tout système de contraintes linéaires en un système chemin-consistant de contraintes linéaires possédant le même ensemble de scénarios consistants. La question principale à laquelle on se doit de répondre sitôt qu'un modèle qualitatif du raisonnement spatial est élaboré, est celle de la décidabilité et de la complexité du problème de la consistance des réseaux de contraintes.

Proposition 1 *Le problème de la consistance des systèmes de contraintes linéaires est décidable et appartient à la classe P des problèmes résolubles en temps polynomial au moyen d'un algorithme déterministe.*

Preuve Considérons un système (I, C) de contraintes linéaires. Soit d'autre part un scénario donné V sur I . Dans

le plan euclidien, il existe une droite $(B, \vec{v})$ qui coupe chacune des droites $(A_i, \vec{u}_i)$ en un point. Ainsi décider si (I, C) est consistant revient à trouver pour chaque variable i deux nombres réels a_i et b_i , tels que pour chaque couple (i, j) de variables, la relation linéaire satisfaite entre les droites $y = a_i \times x + b_i$ et $y = a_j \times x + b_j$ appartient à $C(i, j)$. Il est commode de représenter les droites $y = a \times x + b$ comme des points de $\mathbb{R}^2$. Ce faisant, un système (I, C) de contraintes linéaires peut être traduit en une formule $\phi(I, C)$ de l'algèbre des nombres réels avec addition, multiplication et ordre, de telle manière que (I, C) est consistant dans l'ensemble des droites du plan euclidien si et seulement si $\phi(I, C)$ est consistant dans l'arithmétique des nombres réels. Ce résultat met en évidence le fait suivant : le problème de la consistance, dans l'ensemble des droites du plan euclidien, des systèmes de contraintes linéaires est polynomialement réductible au problème de la consistance des formules de l'algèbre des nombres réels. Il suffit maintenant de rappeler que le problème de la consistance des formules de l'algèbre des nombres réels avec addition, multiplication et ordre, est décidable. Nous renvoyons le lecteur à Tarski [17] où est présentée une méthode d'élimination des quantificateurs, qui constitue une procédure de décision pour le problème de la consistance des formules de l'arithmétique des nombres réels. Donc le problème de la consistance des systèmes de contraintes linéaires est décidable. Quelle est sa complexité ? Considérant deux points (a_i, b_i) et (a_j, b_j) , Ligozat s'intéresse aux positions relatives possibles de ces deux points. Pour énumérer les diverses possibilités, il remarque que (a_j, b_j) définit neuf zones. Il obtient ainsi neuf relations possibles entre points : les relations cardinales $(<, <), (<, =), (<, >), (>, <), (>, =), (>, >), (=, <), (=, =), (=, >), (>, <), (>, =)$ et $(>, >)$. Ce faisant, à tout ensemble Γ de relations linéaires on peut associer un ensemble Γ^c de relations cardinales tel que la relation linéaire satisfaite entre les droites $y = a_i \times x + b_i$ et $y = a_j \times x + b_j$ appartient à Γ , si et seulement si la relation cardinale satisfaite entre les points de coordonnées (a_i, b_i) et (a_j, b_j) appartient à Γ^c : $\emptyset^c = \emptyset, \{PO\}^c = \{(<, <), (<, =), (<, >), (>, <), (>, =), (>, >)\}, \{DC\}^c = \{(>, <), (>, =), (>, >)\}, \{EQ\}^c = \{(>, >)\}, \{PO, DC\}^c = \{(<, <), (<, =), (<, >), (=, <), (=, =), (=, >), (>, <), (>, =), (>, >)\}, \{PO, EQ\}^c = \{(<, <), (<, =), (<, >), (=, =), (>, <), (>, =), (>, >)\}, \{DC, EQ\}^c = \{(>, <), (=, =), (=, >)\}, \{PO, DC, EQ\}^c = \{(<, <), (<, =), (<, >), (=, <), (=, =), (=, >), (>, <), (>, =), (>, >)\}$. Il est facile de vérifier que les ensembles de relations cardinales ainsi définis sont préconvexes. Ce résultat met en évidence le fait suivant : le problème de la consistance des systèmes de contraintes linéaires est polynomialement réductible au problème de la consistance des systèmes préconvexes de contraintes cardinales. Il suffit maintenant de rappeler que le problème de la consistance des systèmes préconvexes de contraintes cardinales appartient à la classe

P . Donc le problème de la consistance des systèmes de contraintes linéaires appartient à la classe P . Nous renvoyons le lecteur à Ligozat [12] où sont présentés les outils formels nécessaires pour raisonner à propos des points du plan euclidien en termes de relations cardinales (voir également Balbiani et Condotta [3], et Condotta [8]). En particulier : l’algorithme à la Allen, qui constitue une procédure de décision pour le problème de la consistance des systèmes préconvexes de contraintes cardinales. Il faut noter que l’ensemble des ensembles préconvexes de relations cardinales étant stable pour la composition et l’intersection, l’algorithme à la Allen constitue également une procédure de décision pour le problème de la consistance des systèmes de contraintes linéaires. $\dashv$

Ceci conduit à considérer la question de la décidabilité et de la complexité du problème de la consistance, dans l’ensemble des droites de l’espace euclidien, des systèmes de contraintes linéaires. Il faut signaler que, dans l’ensemble des droites de l’espace euclidien, une quatrième relation linéaire doit être considérée : la relation qui est vérifiée entre deux droites lorsque celles-ci ne sont pas situées dans un même plan. Pour la décidabilité, la méthode que nous avons utilisée dans l’ensemble des droites du plan euclidien, s’applique bien à l’ensemble des droites de l’espace euclidien.

Proposition 2 *Le problème de la consistance, dans l’ensemble des droites de l’espace euclidien, des systèmes de contraintes linéaires est décidable.*

Pour la complexité, nous conjecturons que le problème de la consistance, dans l’ensemble des droites de l’espace euclidien, des systèmes atomiques de contraintes linéaires appartient à la classe P . Également, nous conjecturons que le problème de la consistance, dans l’ensemble des droites de l’espace euclidien, des systèmes de contraintes linéaires est complet pour la classe NP des problèmes résolubles en temps polynomial au moyen d’un algorithme non déterministe.

3.2 Cercles

Étant donnés deux cercles (A, r) et (B, s) du plan euclidien, on a une des huit possibilités : $(A, r) PO (B, s)$, $(A, r) TPP (B, s)$, $(A, r) TPP^{-1} (B, s)$, $(A, r) EC (B, s)$, $(A, r) NTPP (B, s)$, $(A, r) NTPP^{-1} (B, s)$, $(A, r) DC (B, s)$, $(A, r) EQ (B, s)$. Introduites par Randell, Cui et Cohn [15] dans le cadre du raisonnement spatial qualitatif à propos des régions d’un espace topologique, les relations binaires PO , TPP , TPP^{-1} , EC , $NTPP$, $NTPP^{-1}$ et DC , et l’identité EQ constituent les relations topologiques. Elles vérifient certaines propriétés sur l’ensemble des cercles du plan euclidien : par exemple, si l’on a $(A, r) PO (B, s)$ et $(B, s) DC (C, t)$, on ne peut avoir ni $(A, r) TPP (C, t)$, ni $(A, r) NTPP (C, t)$, ni $(A, r) EQ (C, t)$, car les cercles (A, r) et (B, s) seraient dans la relation

topologique suivante : DC . Donc $(A, r) PO (C, t)$ ou $(A, r) TPP^{-1} (C, t)$ ou $(A, r) EC (C, t)$ ou $(A, r) NTPP^{-1} (C, t)$ ou $(A, r) DC (C, t)$. En tenant compte du fait que la relation identité est élément neutre pour la composition, Renz et Nebel [16] ont résumé dans une table les possibilités de composer entre elles les relations topologiques. Cette table de composition a été calculée de telle manière que pour chaque couple (α, β) de relations topologiques, la composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$ est l’ensemble des relations topologiques γ telles que : il existe des régions X , Y et Z d’un espace topologique telles que $X \gamma Y$, $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$. Une réflexion rapide montre que cette propriété est toujours vérifiée lorsqu’on remplace “régions d’un espace topologique” par “cercles du plan euclidien”. Dans le plan euclidien, il est facile de montrer par ailleurs que pour chaque couple (α, β) de relations topologiques, la composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$ est telle que pour chaque couple (X, Y) de cercles :

(RT1) Pour que la relation topologique satisfaite entre les cercles X et Y appartienne à Γ , il suffit qu’il existe un cercle Z tel que $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$,

une propriété qui est toujours vérifiée lorsqu’on remplace “cercles” par “régions”. On a également :

(RT2) Pour que la relation topologique satisfaite entre les cercles X et Y appartienne à Γ , il faut qu’il existe un cercle Z tel que $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$,

une propriété qui n’est plus vérifiée lorsqu’on remplace “cercles” par “régions”. Par exemple, si les régions X et Y sont adjacentes extérieurement et occupent tout l’espace topologique, il n’existe aucune région Z telle que $X EC Z$ et $Z EC Y$. Un système de contraintes topologiques est la donnée d’un ensemble fini I dont les éléments sont appelés variables, et d’une fonction C qui associe à chaque couple de variables (i, j) un sous-ensemble $C(i, j)$ de $\{PO, TPP, TPP^{-1}, EC, NTPP, NTPP^{-1}, DC, EQ\}$. Nebel [13] semble avoir été le premier à utiliser l’algorithme à la Allen, qui montre que le problème de la consistance, dans l’ensemble des régions d’un espace topologique, des systèmes atomiques de contraintes topologiques appartient à la classe P . L’approche développée par Nebel dans le cadre des régions d’un espace topologique n’est pas applicable dans le contexte des cercles du plan euclidien. En particulier : l’algorithme à la Allen ne constitue pas une procédure de décision pour le problème de la consistance, dans l’ensemble des cercles du plan euclidien, des systèmes atomiques de contraintes topologiques. Pour s’en convaincre, il suffit de considérer le système atomique (I, C) de contraintes topologiques défini par :

$$I = \{0, 1, 2, 3, 4\},$$

Pour chaque variable i , $C(i, i) = \{EQ\}$,

Pour chaque couple (i, j) de variables distinctes, $C(i, j) = \{EC\}$.

En effet : (I, C) est chemin-consistant au sens de l'opération de composition, et inconsistant dans l'ensemble des cercles du plan euclidien. Pour la décidabilité du problème de la consistance, la méthode que nous avons utilisée dans l'ensemble des droites du plan euclidien, s'adapte bien à l'ensemble des cercles du plan euclidien.

Proposition 3 *Le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles du plan euclidien, des systèmes de contraintes topologiques est décidable.*

Pour la complexité, nous conjecturons que le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles du plan euclidien, des systèmes atomiques de contraintes topologiques est complet pour la classe NP . Ceci suggère de considérer la question de la décidabilité et de la complexité du problème la consistance, dans l'ensemble des sphères de l'espace euclidien, des systèmes de contraintes topologiques. Il faut signaler que, dans l'ensemble des sphères de l'espace euclidien, aucune relation topologique supplémentaire ne doit être considérée. Par ailleurs, il faut remarquer que le système atomique (I, C) de contraintes topologiques défini juste avant l'énoncé de la proposition 3, est consistant dans l'ensemble des sphères de l'espace euclidien, mais devient inconsistant lorsque " $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ " est remplacé par " $I = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ". Pour la décidabilité, la méthode que nous avons utilisée dans l'ensemble des droites du plan euclidien, s'applique bien à l'ensemble des sphères de l'espace euclidien.

Proposition 4 *Le problème de la consistance, dans l'ensemble des sphères de l'espace euclidien, des systèmes de contraintes topologiques est décidable.*

Pour la complexité, nous conjecturons que le problème de la consistance, dans l'ensemble des sphères de l'espace euclidien, des systèmes atomiques de contraintes topologiques est complet pour la classe NP .

3.3 Cercles Δ -tangents

Etant donnés deux cercles Δ -tangents (A, r) et (B, s) du plan euclidien, on a une des neuf possibilités : $(A, r) PO (B, s)$, $(A, r) PO^{-1} (B, s)$, $(A, r) TPP (B, s)$, $(A, r) TPP^{-1} (B, s)$, $(A, r) EC (B, s)$, $(A, r) EC^{-1} (B, s)$, $(A, r) DC (B, s)$, $(A, r) DC^{-1} (B, s)$, $(A, r) EQ (B, s)$. Les relations binaires PO , PO^{-1} , TPP , TPP^{-1} , EC , EC^{-1} , DC et DC^{-1} , et l'identité EQ constituent les relations Δ -circulaires. Elles vérifient certaines propriétés sur l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien : par exemple, si l'on a $(A, r) PO (B, s)$ et $(B, s) DC (C, t)$, on ne peut avoir ni $(A, r) PO^{-1} (C, t)$, ni $(A, r) TPP (C, t)$, ni $(A, r) TPP^{-1} (C, t)$, ni $(A, r) EC^{-1} (C, t)$, ni $(A, r) DC^{-1} (C, t)$, ni $(A, r) EQ (C, t)$, car les cercles Δ -tangents (A, r) et (B, s) seraient dans une des relations Δ -circulaires suivantes : PO^{-1} , EC^{-1} , DC^{-1} . Donc $(A, r) PO (C, t)$ ou $(A, r) EC (C, t)$ ou $(A, r) DC (C, t)$.

En tenant compte du fait que la relation identité est élément neutre pour la composition, nous avons résumé dans les tables des figures 2 et 3 les possibilités de composer entre elles les relations Δ -circulaires. Cette table de composition a été calculée de telle manière que pour chaque couple (α, β) de relations Δ -circulaires, la composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$ est l'ensemble des relations Δ -circulaires γ telles que : il existe des cercles Δ -tangents X, Y et Z du plan euclidien telles que $X \gamma Y$, $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$. Une réflexion rapide montre que pour chaque couple (α, β) de relations Δ -circulaires, la composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$ est telle que pour chaque couple (X, Y) de cercles Δ -tangents :

($R\Delta C1$) Pour que la relation Δ -circulaire satisfaite entre les cercles Δ -tangents X et Y appartienne à Γ , il suffit qu'il existe un cercle Δ -tangent Z tel que $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$.

La propriété réciproque :

($R\Delta C2$) Pour que la relation Δ -circulaire satisfaite entre les cercles Δ -tangents X et Y appartienne à Γ , il faut qu'il existe un cercle Δ -tangent Z tel que $X \alpha Z$ et $Z \beta Y$,

n'est pas toujours vérifiée. Par exemple, si les cercles Δ -tangents X et Y sont adjacents extérieurement et ont même rayon, il n'existe aucun cercle Δ -tangent Z tel que $X EC Z$ et $Z EC^{-1} Y$. Un système de contraintes Δ -circulaires est la donnée d'un ensemble fini I dont les éléments sont appelés variables, et d'une fonction C qui associe à chaque couple de variables (i, j) un sous-ensemble $C(i, j)$ de $\{PO, PO^{-1}, TPP, TPP^{-1}, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}, EQ\}$. Pas plus que dans le cas des systèmes atomiques de contraintes topologiques, l'algorithme à la Allen ne constitue une procédure de décision pour le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien, des systèmes atomiques de contraintes Δ -circulaires. Pour le vérifier, il suffit de considérer le système atomique (I, C) de contraintes Δ -circulaires défini par :

$$I = \{0, 1, 2, 3\},$$

Pour chaque variable i , $C(i, i) = \{EQ\}$,

Pour chaque couple (i, j) de variables distinctes, si $i < j$ alors $C(i, j) = \{EC\}$ et si $i > j$ alors $C(i, j) = \{EC^{-1}\}$.

En effet : (I, C) est chemin-consistant au sens de l'opération de composition, et inconsistant dans l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien. Pour la décidabilité, la méthode que nous avons utilisée dans l'ensemble des droites du plan euclidien, s'adapte bien à l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien.

Proposition 5 *Le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien, des systèmes de contraintes Δ -circulaires est décidable.*

Pour la complexité, nous conjecturons que le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien, des systèmes atomiques de contraintes Δ -circulaires est complet pour la classe NP .

4 Théorie des relations linéaires

L'alphabet de la théorie RL des relations linéaires comprend : les connecteurs booléens du langage de la logique propositionnelle, les quantificateurs du langage de la logique des prédicats du premier ordre, des variables, des prédicats. Nous suivrons la tradition et utiliserons les symboles X, Y, Z , etc, pour désigner les variables dont on disposera en quantité dénombrable. Les prédicats sont les relations linéaires PO, DC et EQ . Toutes les formules atomiques du langage de la théorie RL sont de la forme $\alpha(X, Y)$, où X et Y sont des variables, et α est une relation linéaire. On écrira $X \alpha Y$, au lieu de $\alpha(X, Y)$, et $X \bar{\alpha} Y$, au lieu de $\neg \alpha(X, Y)$. Si Γ est un sous-ensemble de $\{PO, DC, EQ\}$, l'expression $X \Gamma Y$ dénotera la formule $\bigvee \{X \gamma Y : \gamma \in \Gamma\}$. L'interprétation standard du langage de la théorie RL est la structure relationnelle $M_1 = (L_1, \overline{PO}_1, \overline{DC}_1, \overline{EQ}_1)$ où L_1 est constitué pour chaque nombre réel a , de la droite $d(a)$ d'équation $x = a$, et pour chaque couple (a, b) de nombres réels, de la droite $d(a, b)$ d'équation $y = a \times x + b$, et où les relations $\overline{PO}_1, \overline{DC}_1$, et $\overline{EQ}_1$ sont les relations binaires qui correspondent naturellement sur l'ensemble des droites du plan euclidien aux relations linéaires. Les axiomes propres du système déductif de la théorie RL qui engendre l'ensemble des formules vraies pour l'interprétation standard sont les suivants :

$$(\overline{p}_{PO}) \quad X \overline{PO} X,$$

$$(\overline{p}_{DC}) \quad X \overline{DC} X,$$

$$(\rho_{EQ}) \quad X EQ X,$$

$$(\omega) \quad X \{PO, DC, EQ\} Y,$$

$$(\tau_{\alpha, \beta}) \quad \text{Pour chaque couple } (\alpha, \beta) \text{ de relations linéaires,} \\ X \alpha \circ \beta Y \leftrightarrow \exists Z (X \alpha Z \wedge Z \beta Y),$$

$$(PO_n) \quad \text{Pour chaque nombre entier positif } n, \\ \forall X_0 \exists X_1 \dots \exists X_n \bigwedge \{X_i PO X_j : 0 \leq i < j \leq n\},$$

$$(DC_n) \quad \text{Pour chaque nombre entier positif } n, \\ \forall X_0 \exists X_1 \dots \exists X_n \bigwedge \{X_i DC X_j : 0 \leq i < j \leq n\}.$$

L'expression $Th(RL)$ dénotera l'ensemble des théorèmes de la théorie RL . Il est très facile de démontrer que les formules : $X PO Y \rightarrow X PO^{-1} Y$, $X DC Y \rightarrow X DC^{-1} Y$ et $X EQ Y \rightarrow X EQ^{-1} Y$, sont des théorèmes de la théorie RL . Le résultat suivant concerne les modèles dénombrables de la théorie RL .

Proposition 6 *Tous les modèles dénombrables de la théorie RL sont isomorphes.*

Preuve Il suffit de montrer que tous les modèles dénombrables de la théorie RL sont isomorphes à la structure relationnelle $M_0 = (L_0, \overline{PO}_0, \overline{DC}_0, \overline{EQ}_0)$ où L_0 est constitué pour chaque nombre rationnel a , de la droite $d(a)$, et pour chaque couple (a, b) de nombres rationnels, de la droite $d(a, b)$, et où les relations $\overline{PO}_0, \overline{DC}_0$, et $\overline{EQ}_0$ sont les restrictions à l'ensemble de ces droites des relations qui leur correspondent dans l'interprétation standard. Considérons un modèle dénombrable $M = (L, \overline{PO}, \overline{DC}, \overline{EQ})$ de la théorie RL . Les axiomes de la théorie RL obligent l'union $\overline{DC} \cup \overline{EQ}$ des relations binaires qui correspondent dans M aux relations linéaires DC et EQ , à être une relation d'équivalence. Qui plus est, ils forcent cette relation d'équivalence à avoir une infinité de classes d'équivalence $C_0, C_1, C_2, \dots$, et chaque classe d'équivalence à contenir une infinité d'éléments. Soit g_0 une bijection de C_0 sur l'ensemble $\{d(a) : a \text{ est un nombre rationnel}\}$. Etant donnée une énumération $a_0, a_1, \dots$, de l'ensemble des nombres rationnels, considérons pour chaque nombre entier positif n , une bijection g_n de C_n sur l'ensemble $\{d(a_{n-1}, b) : b \text{ est un nombre rationnel}\}$. Il est très facile de vérifier que l'application g de L dans L_0 définie par :

$$g|_{C_0} = g_0,$$

$$\text{Pour chaque nombre entier positif } n, g|_{C_n} = g_n,$$

est un isomorphisme de M dans M_0 . Donc tous les modèles dénombrables de la théorie RL sont isomorphes. $\dashv$

La proposition 6 a pour conséquence immédiate les propositions suivantes.

Proposition 7 *L'ensemble des théorèmes de la théorie RL est maximal.*

Proposition 8 *Les formules vraies dans l'interprétation standard sont exactement les théorèmes de la théorie RL .*

Ensemble, les propositions 7 et 8 occasionnent la proposition suivante.

Proposition 9 *Le problème de la vérité des formules du langage de la théorie RL dans l'interprétation standard est décidable.*

Nous conjecturons qu'une procédure de décision basée sur un algorithme d'élimination des quantificateurs pourra apporter une réponse à la question de la complexité du problème de la vérité des formules du langage de la théorie RL dans l'interprétation standard. Bien-sûr, le système déductif de la théorie RL décrit ci-dessus n'est qu'un des multiples systèmes déductifs possibles pour engendrer l'ensemble des formules vraies dans l'interprétation standard. Il a l'avantage d'être récursif, et l'inconvénient d'être infini.

Proposition 10 *Il n'existe pas de système déductif fini de la théorie RL dont les théorèmes sont exactement les formules vraies dans l'interprétation standard.*

Preuve Pour chaque nombre entier positif n , soit ϕ_n la conjonction des formules $(\widetilde{PO})$, $(\widetilde{PO}^{-1})$, $(\widetilde{PO}^{-1})$, (ρ_{EQ}) , (ω) , $(\tau_{\alpha,\beta})$, (PO_n) et (DC_n) . Par définition, $Th(\{\phi_0, \phi_1, \dots\}) = Th(RL)$. S'il existe un système déductif fini de la théorie RL dont les théorèmes sont exactement les formules vraies dans l'interprétation standard, il existe une formule ψ du langage de la théorie RL telle que $Th(\{\psi\}) = Th(RL)$. Il en résulte que ψ est déductible à partir des formules $\phi_0, \phi_1, \dots$. D'après le théorème de compacité, il existe un nombre entier positif n tel que ψ est déductible à partir des formules $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$. Par conséquent, ϕ_{n+1} est déductible à partir des formules $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$. Sans réduire la portée de notre raisonnement, nous ferons l'hypothèse que $n \geq 2$. Soit $M = (L, \widetilde{PO}, \widetilde{DC}, \widetilde{EQ})$ la structure relationnelle définie de la façon suivante :

$$L = \{0, 1, \dots, n\} \times \{0, 1, \dots, n\},$$

$$(i_1, i_2) \widetilde{PO} (j_1, j_2) \text{ ssi } i_1 \neq j_1,$$

$$(i_1, i_2) \widetilde{DC} (j_1, j_2) \text{ ssi } i_1 = j_1 \text{ et } i_2 \neq j_2,$$

$$(i_1, i_2) \widetilde{EQ} (j_1, j_2) \text{ ssi } i_1 = j_1 \text{ et } i_2 = j_2.$$

Il est clair que M est un modèle des formules $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ et $\neg\phi_{n+1}$. Donc il n'existe pas de système déductif fini de la théorie RL dont les théorèmes sont exactement les formules vraies dans l'interprétation standard. $\dashv$

Nous nous sommes préoccupés jusqu'ici de découvrir les propriétés métamathématiques de la théorie RL des relations linéaires. Les propriétés métamathématiques d'une théorie RT des relations topologiques dont les prédicats sont les relations topologiques PO , TPP , TPP^{-1} , EC , $NTPP$, $NTPP^{-1}$, DC et EQ , sont connues depuis les résultats de Tarski [18]. Au moyen d'un système déductif, il engendre l'ensemble des formules vraies dans l'interprétation standard $M_1 = (C_1, \widetilde{PO}_1, \widetilde{TPP}_1, \widetilde{TPP}_1^{-1}, \widetilde{EC}_1, \widetilde{NTPP}_1, \widetilde{NTPP}_1^{-1}, \widetilde{DC}_1, \widetilde{EQ}_1)$ où C_1 est constitué pour chaque couple (a, b) de nombres réels et pour chaque nombre réel positif r , du cercle d'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, et où les relations $\widetilde{PO}_1$, $\widetilde{TPP}_1$, $\widetilde{TPP}_1^{-1}$, $\widetilde{EC}_1$, $\widetilde{NTPP}_1$, $\widetilde{NTPP}_1^{-1}$, $\widetilde{DC}_1$ et $\widetilde{EQ}_1$ sont les relations binaires qui correspondent naturellement sur l'ensemble des cercles du plan euclidien aux relations topologiques. Une théorie $R\Delta C$ des relations Δ -circulaires dont les prédicats sont les relations Δ -circulaires PO , PO^{-1} , TPP , TPP^{-1} , EC , EC^{-1} , DC , DC^{-1} et EQ , pourrait avoir pour interprétation standard la structure relationnelle $M_1 = (\Delta C_1, \widetilde{PO}_1, \widetilde{PO}_1^{-1}, \widetilde{TPP}_1, \widetilde{TPP}_1^{-1}, \widetilde{EC}_1, \widetilde{EC}_1^{-1}, \widetilde{DC}_1, \widetilde{DC}_1^{-1}, \widetilde{EQ}_1)$ où ΔC_1 est constitué pour chaque nombre réel a et pour chaque nombre réel positif r , du cercle d'équation $(x - a)^2 + (y - r)^2 = r^2$, et où les relations $\widetilde{PO}_1$, $\widetilde{PO}_1^{-1}$, $\widetilde{TPP}_1$, $\widetilde{TPP}_1^{-1}$, $\widetilde{EC}_1$, $\widetilde{EC}_1^{-1}$, $\widetilde{DC}_1$, $\widetilde{DC}_1^{-1}$, $\widetilde{EQ}_1$ sont les relations binaires qui

correspondent naturellement sur l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien aux relations Δ -circulaires. Quelle est l'axiomatisation complète de l'ensemble des formules vraies dans l'interprétation standard $M_1 = (\Delta C_1, \widetilde{PO}_1, \widetilde{PO}_1^{-1}, \widetilde{TPP}_1, \widetilde{TPP}_1^{-1}, \widetilde{EC}_1, \widetilde{EC}_1^{-1}, \widetilde{DC}_1, \widetilde{DC}_1^{-1}, \widetilde{EQ}_1)$?

5 Conclusion

En étudiant les différentes propriétés des relations linéaires, nous avons obtenu un premier résultat, qui relève de la programmation par contraintes : l'algorithme à la Allen de propagation des contraintes, qui remplace pour chaque couple (i, j) de variables, $C(i, j)$ par $C(i, j) \cap (C(i, k) \circ C(k, j))$ autant de fois que faire se peut, constitue une procédure de décision pour le problème de la consistance des systèmes de contraintes linéaires, puis un deuxième résultat, qui relève de la logique mathématique : le système déductif de la théorie RL , qui contient pour chaque couple (α, β) de relations linéaires, l'axiome $X \alpha \circ \beta Y \leftrightarrow \exists Z (X \alpha Z \wedge Z \beta Y)$, constitue une axiomatisation valide et complète de l'ensemble des formules vraies dans l'interprétation standard du langage de la théorie RL . Basés sur la table de la figure 1, les démonstrations de ces résultats, énoncés dans le cadre des propositions 1 et 8, tirent profit des propriétés $(RL1)$ et $(RL2)$, que vérifie pour chaque couple (α, β) de relations linéaires, leur composée $\Gamma = \alpha \circ \beta$.

Des propriétés analogues, les propriétés $(RT1)$ et $(RT2)$, sont vérifiées par les relations topologiques, elles ne fournissent toutefois aucun secours pour démontrer des résultats similaires dans le contexte des réseaux de contraintes topologiques et de la théorie RT des relations topologiques. C'est encore pire que ça : l'algorithme à la Allen ne constitue pas une procédure de décision pour le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles du plan euclidien, des systèmes atomiques de contraintes topologiques, le système déductif de la théorie RT , défini sur le même principe que le système déductif de la théorie RL , constitue une axiomatisation valide mais incomplète de l'ensemble des formules vraies dans l'interprétation standard du langage de la théorie RT . L'incapacité de la table de Renz et Nebel [16], qui résume les possibilités de composer entre elles les relations topologiques, à dégager les propriétés essentielles de ces relations mériterait d'être examinée précisément.

Si une propriété semblable aux propriétés $(RL1)$ et $(RT1)$, la propriété $(R\Delta C1)$, est vérifiée par les relations Δ -circulaires, la propriété $(R\Delta C2)$, proche des propriétés $(RL2)$ et $(RT2)$, ne l'est pas. C'est encore pire que ça : l'algorithme à la Allen ne constitue pas une procédure de décision pour le problème de la consistance, dans l'ensemble des cercles Δ -tangents du plan euclidien, des systèmes atomiques de contraintes Δ -circulaires, le système déductif de la théorie $R\Delta C$, défini sur le même principe que le système déductif de la théorie RL , constitue une axiomatisation complète mais non valide

de l'ensemble des formules vraies dans l'interprétation standard du langage de la théorie $R\Delta C$. L'inaptitude des tables des figures 2 et 3, qui résument les possibilités de composer entre elles les relations Δ -circulaires, à caractériser les propriétés principales de ces relations vaudrait la peine d'être analysée finement.

Remerciements

Ma recherche bénéficie du soutien de l'action COST TARKSI et du programme d'actions intégrées RILA. Je remercie les membres de l'équipe LILaC pour les critiques qu'ils ont bien voulu formuler sur l'ensemble de l'article. Je tiens également à exprimer ma gratitude à Tinko Tinchev qui a bien voulu relire et corriger la section dédiée aux propriétés métamathématiques de la théorie des relations linéaires.

Références

[1] Allen, J.: Maintaining knowledge about temporal intervals. *Communications of the Association for Computing Machinery* **26** (1983) 832–843.

[2] Audureau, E., Enjalbert, P., Fariñas del Cerro, L.: *Logique temporelle: sémantique et validation de programmes parallèles*. Masson (1990).

[3] Balbiani, P., Condotta, J.-F.: Spatial reasoning about points in a multidimensional setting. *Applied Intelligence* **17** (2002) 221–238.

[4] Bestougeff, H., Ligozat, G.: *Outils logiques pour le traitement du temps: de la linguistique à l'intelligence artificielle*. Masson (1989).

[5] Chang, C., Keisler, H.: *Model Theory*. Elsevier (1990).

[6] Clarke, B.: A calculus of individuals based on “connection”. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **22** (1981) 204–218.

[7] Clarke, B.: Individuals and points. *Notre Dame Journal of Formal Logic* **26** (1985) 61–75.

[8] Condotta, J.-F.: *Problèmes de satisfaction de contraintes spatiales: algorithmes et complexité*. Thèse de l'université Paul Sabatier (2000).

[9] Dugat, V., Gambarotto, P., Larvor, Y.: Qualitative geometry for shape recognition. *Applied Intelligence* **17** (2002) 253–263.

[10] Düntsch, I., Roubens, M.: Tangent circle algebras. In de Swart, H. (Editeur): *Relational Methods in Computer Science*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Computer Science **2561** (2002) 300–313.

[11] Gambarotto, P.: *Éléments de géométrie qualitative pour la description structurale d'objets*. Thèse de l'université Paul Sabatier (2003).

[12] Ligozat, G.: Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing* **9** (1998) 23–44.

[13] Nebel, B.: Computational properties of qualitative spatial reasoning: first results. In Wachsmuth, I., Rollinger, C.-R., Brauer, W. (Editeurs): *Proceedings of the Nineteenth German Conference on Artificial Intelligence*. Springer-Verlag, Lecture Notes in Artificial Intelligence **981** (1995) 233–244.

[14] Randell, D., Cohn, A.: Modelling topological and metrical properties in physical processes. In Nebel, B., Rich, C., Swartout, W. (Editeurs): *Proceedings of the Third International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. Morgan Kaufman (1989) 357–368.

[15] Randell, D., Cui, Z., Cohn, A.: A spatial logic based on regions and connection. In Brachman, R., Levesque, H., Reiter, R. (Editeurs): *Proceedings of the First International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*. Morgan Kaufman (1992) 165–176.

[16] Renz, J., Nebel, B.: On the complexity of qualitative spatial reasoning: a maximal tractable fragment of the region connection calculus. *Artificial Intelligence* **108** (1999) 69–123.

[17] Tarski, A.: *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*. University of California Press (1951).

[18] Tarski, A.: *Logique, sémantique, métamathématique*. Armand Colin (1972).

[19] Vieu, L.: Spatial representation and reasoning in AI. In Stock, O. (Editeur): *Spatial and Temporal Reasoning*. Kluwer (1997) 3–40.

$\circ$	PO	DC
PO	$\{PO, DC, EQ\}$	$\{PO\}$
DC	$\{PO\}$	$\{DC, EQ\}$

FIG. 1 –

$\circ$	PO	PO^{-1}	TPP	TPP^{-1}
PO	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1}, TPP, TPP^{-1}, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}, EQ\}$	$\{PO\}$	$\{PO, EC, DC\}$
PO^{-1}	$\{PO, PO^{-1}, TPP, TPP^{-1}, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}, EQ\}$	$\{PO^{-1}, EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1}\}$	$\{PO^{-1}, EC^{-1}, DC^{-1}\}$
TPP	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO^{-1}, EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{TPP\}$	$\{TPP, TPP^{-1}, EQ\}$
TPP^{-1}	$\{PO\}$	$\{PO^{-1}\}$	$\{TPP, TPP^{-1}, EQ\}$	$\{TPP^{-1}\}$
EC	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1}, TPP, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}\}$	$\{PO\}$	$\{DC\}$
EC^{-1}	$\{PO, PO^{-1}, TPP, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1}, EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1}\}$	$\{DC^{-1}\}$
DC	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1}, TPP, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}\}$	$\{PO, EC, DC\}$	$\{DC\}$
DC^{-1}	$\{PO, PO^{-1}, TPP, EC, EC^{-1}, DC, DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1}, EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1}, EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{DC^{-1}\}$

FIG. 2 –

$\circ$	EC	EC^{-1}	DC	DC^{-1}
PO	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP^{-1}, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP^{-1}, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$
PO^{-1}	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP^{-1}, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP^{-1}, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$
TPP	$\{DC\}$	$\{DC^{-1}\}$	$\{DC\}$	$\{DC^{-1}\}$
TPP^{-1}	$\{PO\}$	$\{PO^{-1}\}$	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$
EC	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $EC, EC^{-1},$ $DC, DC^{-1},$ $EQ\}$	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP^{-1}, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$
EC^{-1}	$\{PO, PO^{-1},$ $EC, EC^{-1},$ $DC, DC^{-1},$ $EQ\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP^{-1}, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$
DC	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$	$\{PO, EC, DC\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP, TPP^{-1},$ $EC, EC^{-1},$ $DC, DC^{-1},$ $EQ\}$
DC^{-1}	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP, EC,$ $EC^{-1}, DC,$ $DC^{-1}\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$	$\{PO, PO^{-1},$ $TPP, TPP^{-1},$ $EC, EC^{-1},$ $DC, DC^{-1},$ $EQ\}$	$\{PO^{-1},$ $EC^{-1}, DC^{-1}\}$

FIG. 3 –