

Une axiomatisation des relations qualitatives du calcul des intervalles cycliques

An axiomatics of the qualitative relations of the Cyclic Interval Calculus

Jean-François Condotta¹

Gérard Ligozat²

¹ CRIL-CNRS

² LIMSI-CNRS

Rue Jean Souvraz - SP 18 - 62307 Lens CEDEX
condotta@cril.univ-artois.fr

Résumé

Récemment, un formalisme qualitatif temporel appelé le calcul des intervalles cycliques a été proposé par Balbiani et Osmani. Ce formalisme utilise les arcs d'un cercle pour représenter les entités temporelles et considère 16 relations qualitatives similaires à celles du calcul des intervalles d'Allen. Le principal propos de cet article est de fournir une axiomatisation de ces relations qualitatives, en particulier de la relation *meets* (rencontre) à partir de laquelle se déduisent les 15 autres relations. Nous montrons de quelle manière sont reliés les ordres cycliques et les modèles de l'axiomatisation proposée. Nous montrons également que tout modèle dénombrable de notre axiomatisation est isomorphe à celui qui peut être construit à partir de l'ordre cyclique sur les rationnels. Notre approche est semblable à celle utilisée par Ladkin dans le cadre du calcul des intervalles d'Allen.

Mots Clef

Raisonnement temporel qualitatif, le calcul des intervalles cycliques.

1 Introduction

Dans le domaine du raisonnement qualitatif temporel et spatial de nombreux travaux se sont focalisés sur l'étude de formalismes dont les relations qualitatives sont basées sur un ordre linéaire dense non borné. Nous pouvons par exemple citer le Calcul d'Allen qui considère comme entités temporelles les intervalles de la droite des réels et comme relations qualitatives les 13 relations correspondant à toutes les configurations possibles des quatre bornes de deux intervalles [All81]. Le calcul des relations cardinales [Lig98a, Lig98b], le calcul des n -points [BC02], le calcul des rectangles [BCF99], le calcul des n -blocs [BCF02] sont basées sur des produits cartésiens de la droite des réels munie de sa relation d'ordre usuelle, et donc sur des ordres linéaires denses et non bornés.

Cependant, diverses raisons, comme le fait que l'ensemble des directions autour d'un point de référence a une structure cyclique plutôt que linéaire, ont fait que des formalismes non basés sur des ordres linéaires ont été proposés. Isli et Cohn [IC00] et Balbiani et al. [BCL02] ont par exemple étudié les points sur un cercle et des relations ternaires correspondant à des positions relatives particulières entre ces points. Les concepts d'orientation et de panorama de Schlieder [Sch93, Sch95] sont aussi des propositions pour raisonner sur des situations cycliques. Balbiani et Osmani ont également proposé un formalisme basé sur une structure cyclique [BO00]. Il s'agit du calcul des intervalles cycliques. Ce formalisme est similaire au calcul d'Allen et diffère principalement de celui-ci dans le choix des entités considérées qui sont les intervalles d'un cercle. Sur le cercle, 16 positions relatives entre deux intervalles peuvent être caractérisées, chacune d'elles, étant représentée par une relation particulière. Par exemple, la relation *m* (meets) correspond au cas où la borne supérieure du premier intervalle est la même que la borne inférieure du second intervalle et où les deux intervalles ont seulement ce point en commun. Comme autre exemple, citons la relation *mmi* qui correspond à la situation dans laquelle le premier intervalle rencontre le deuxième intervalle et le deuxième intervalle rencontre le premier intervalle. Remarquons que cette configuration n'est pas possible dans le cas des intervalles de la droite.

Dans cet article, nous étudions la relation *meets* du calcul des intervalles cycliques d'un point de vue axiomatique. Il est important de noter qu'à partir de cette relation peuvent être définies les 15 autres relations de ce formalisme. Nous montrons comment l'axiomatisation des ordres cycliques à l'aide d'une relation ternaire [BCL02] est liée à l'axiomatisation des intervalles cycliques basée sur une relation binaire *meets*. Notre approche est très similaire à celle suivie par Ladkin dans sa thèse [Lad87] où il montre comment l'axiomatisation des ordres denses linéaires infinis

en termes de relation d'ordre strict est reliée à l'axiomatisation proposée par Allen et Hayes pour l'algèbre des intervalles d'Allen en termes de la relation *meets*. La partie principale de l'article, une fois choisi un ensemble pertinent d'axiomes, est basé sur deux constructions :

- étant donné un ordre cyclique, la première construction définit un ensemble d'intervalles cycliques muni d'une relation *meets* ;
- inversement, étant donné un ensemble d'intervalles cycliques avec une relation *meets*, la seconde construction montre comment la relation *meets* peut être utilisée pour définir un ensemble de points (intuitivement, un couple d'intervalles se rencontrant définit un point, leur point de rencontre), muni d'une relation ternaire définissant un ordre cyclique.

L'étape suivante consiste en l'étude de la façon dont ces deux constructions sont reliées entre elles. Un résultat de Ladkin affirme que les constructions analogues induisent une équivalence de catégories. En utilisant, le théorème de Cantor, il montre que les théories correspondantes sont $\aleph_0$ catégoriques. Dans le cas présent, nous prouvons un résultat de même nature : les constructions établissent une équivalence de catégories. Il a été montré dans un papier précédent [BCL02] que les ordres cycliques dénombrables sont isomorphes. Comme conséquence, nous montrons que la même propriété est satisfaite par les modèles des intervalles cycliques satisfaisant l'axiomatisation de la relation *meets*. Il s'agit du principal résultat de cet article. Pour clore cette contribution, nous concluons en montrant comment ces résultats peuvent être utilisés dans le cadre du raisonnement par contraintes dans le formalisme des intervalles cycliques, et nous indiquons quelques perspectives d'extension de ce travail.

2 Les modèles attendus

Dans cette section, nous définissons les modèles considérés. Plus tard, nous donnerons une axiomatisation de ces modèles. Intuitivement, chacun de ces modèles peut être conçu comme un ensemble d'intervalles cycliques (des intervalles sur un cercle orienté) avec la relation binaire *meets*. Deux intervalles cycliques satisfont la relation *meets* lorsque la borne supérieure du premier intervalle coïncide avec la borne inférieure du second intervalle, et la borne supérieure du second intervalle ne se trouve pas entre les deux bornes du premier intervalle (voir Fig. 1). Nous construisons nos modèles à partir d'ordres cycliques¹ [BCL02]. Intuitivement, un ordre cyclique est pour les points d'un cercle orienté ce qu'est l'ordre linéaire dense non borné pour les points de la droite orientée. Formellement, un ordre cyclique est une structure de la forme $(\mathcal{P}, \prec)$ où $\mathcal{P}$ est un ensemble non vide de points et $\prec$ est une relation ternaire sur $\mathcal{P}$ satisfaisant pour tout $x, y, z, t \in \mathcal{P}$ les conditions suivantes :

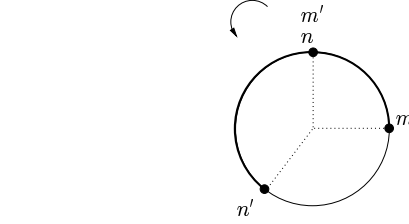


FIG. 1 – Deux intervalles cycliques (m, n) et (m', n') satisfaisant la relation *meets*.

- P1. $\neg \prec (x, y, y)$;
- P2. $\prec (x, y, z) \wedge \prec (x, z, t) \rightarrow \prec (x, y, t)$;
- P3. $x \neq y \wedge x \neq z \rightarrow y = z \vee \prec (x, y, z) \vee \prec (x, z, y)$;
- P4. $\prec (x, y, z) \leftrightarrow \prec (y, z, x) \leftrightarrow \prec (z, x, y)$;
- P5. $x \neq y \rightarrow (\exists z \prec (x, z, y)) \wedge (\exists z \prec (x, y, z))$;
- P6. $\exists x, y \quad x \neq y$.

Définition 1 (Modèles des intervalles cycliques) Soit

$(\mathcal{P}, \prec)$ un ordre cyclique. Nous définissons la structure $\text{CyclInt}(\mathcal{P}, \prec)$ (le modèle des intervalles cycliques engendré par $(\mathcal{P}, \prec)$) par le couple $(\mathcal{I}, \text{meets})$ où :

- $\mathcal{I} = \{(x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} : \exists z \in \mathcal{P} \text{ avec } \prec (x, y, z)\}$. Chaque élément de $\mathcal{I}$ est appelé un intervalle cyclique.
- *meets* est la relation binaire définie par $\text{meets} = \{((x, y), (x', y')) : y = x' \text{ et } \prec (x, y, y')\}$.

Par exemple, considérons l'ensemble des nombres rationnels de l'intervalle $[0, 360[$. Chaque élément appartenant à cet intervalle représente un point d'un cercle orienté du plan. Le nombre $n \in [0, 360[$ correspond au point du cercle dont les coordonnées polaires sont (r, n) , avec r le rayon du cercle, n l'angle donné en degré, le pôle étant le centre du cercle. Soit $\prec_{[0, 360[}$ la relation ternaire définie sur $[0, 360[$ par : $\prec_{[0, 360[}(x, y, z)$ si, et seulement si, $x < y < z$ ou $y < z < x$ ou $z < x < y$ avec $x, y, z \in [0, 360[$. Nous pouvons vérifier que $([0, 360[, \prec_{[0, 360[})$ est un ordre cyclique. En conséquence, $\text{CyclInt}([0, 360[, \prec_{[0, 360[})$ définit un modèle des intervalles cycliques $(\mathcal{I}, \text{meets})$. Chaque élément $u = (x, y)$ de $\mathcal{I}$ peut être vu comme l'arc du cercle orienté formé de tous les points "entre" le point représenté par x et celui correspondant à y (nous appellerons ces deux points les bornes de l'intervalle cyclique u et nous les dénoterons parfois par u^- et u^+ , respectivement). À titre d'illustration, les intervalles cycliques $(0, 90)$, $(90, 0)$, $(270, 90)$ sont représentés dans la figure 2. Remarquons qu'il n'existe pas d'intervalle cyclique formé d'un seul point, ni d'intervalle cyclique recouvrant le cercle dans sa totalité. Intuitivement, pour ce modèle, deux intervalles cycliques satisfont la relation *meets* si, et seulement si, la borne supérieure du premier intervalle cyclique est la borne inférieure du second intervalle cyclique, et il n'existe pas d'autre point du premier intervalle cyclique appartenant au second. Nous avons $((270, 90), (90, 180)) \in \text{meets}$, tandis que $((270, 90), (90, 300)) \notin \text{meets}$.

¹En fait, nous utilisons des structures appelées ordres cycliques standards dans [BCL02]. Pour alléger l'écriture, nous les nommerons ordres cycliques.

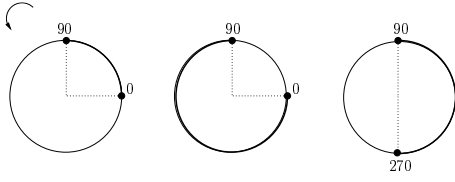


FIG. 2 – Quelques intervalles cycliques.

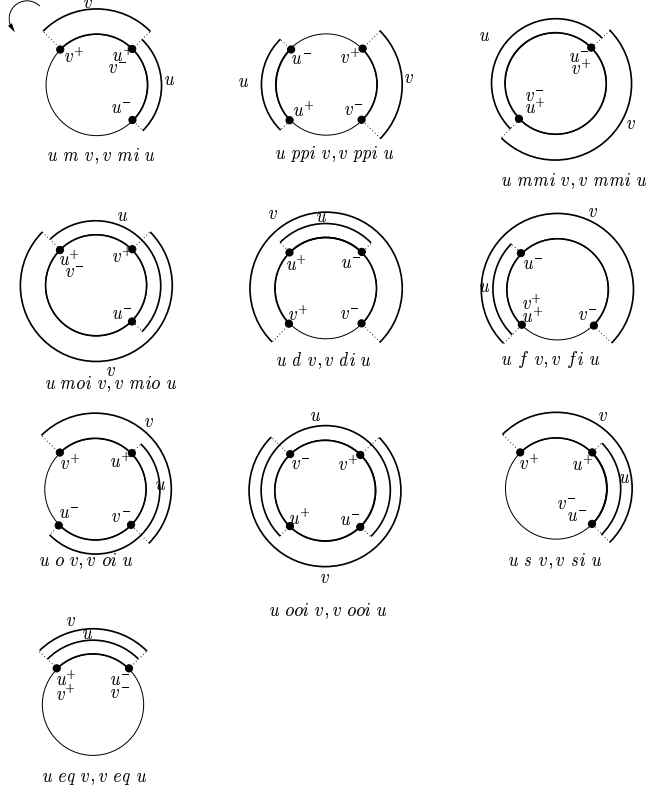


FIG. 3 – Les 16 relations binaires du calcul des intervalles cycliques.

Soit $(\mathcal{I}, \text{meets})$ un modèle des intervalles cycliques, à partir de la relation *meets* nous pouvons définir 15 autres relations binaires sur $\mathcal{I}$ et ainsi obtenir les 16 relations de base du calcul des intervalles cycliques étudiées par Balbiani et Osmani [BO00]. Ces relations sont dénotées par l'ensemble des symboles $\{m, mi, ppi, mmi, d, di, f, fi, o, oi, s, si, oo, moi, mio, eq\}$ (m étant la relation *meets*). Elles sont représentées dans la figure 3. Plus formellement, elles peuvent être définies de la manière suivante ² :

- $u \text{ ppi } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x \quad u \text{ m } w \text{ m } v \text{ m } x \text{ m } u,$
- $u \text{ mmi } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x, y, z \quad w \text{ m } x \text{ m } y \text{ m } z \text{ m } w \wedge z \text{ m } u \text{ m } y \wedge x \text{ m } v \text{ m } w,$

²Dans la suite, l'expression $v_1 \text{ m } v_2 \text{ m } \dots \text{ m } v_n$ avec $v_1, v_2, \dots, v_n$ n variables ($n > 2$) est une abréviation pour la conjonction $\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i \text{ m } v_{i+1}$.

- $u \text{ d } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x, y \quad w \text{ m } x \text{ m } u \text{ m } y \text{ m } w \wedge v \text{ mmi } w,$
- $u \text{ f } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x \quad w \text{ m } x \text{ m } u \text{ m } w \wedge v \text{ mmi } w,$
- $u \text{ o } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x, y, z \quad u \text{ m } v \text{ m } x \text{ m } u \wedge v \text{ m } x \text{ m } y \text{ m } v \wedge y \text{ m } z \text{ m } w,$
- $u \text{ s } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x, y \quad w \text{ m } x \text{ m } v \text{ m } w \wedge x \text{ m } u \text{ m } y \text{ m } w,$
- $u \text{ oo } i \text{ v} \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x \quad w \text{ f } u \wedge w \text{ s } v \wedge x \text{ s } u \wedge x \text{ f } v,$
- $u \text{ moi } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x, y \quad w \text{ m } x \text{ m } y \text{ m } w \wedge y \text{ ppi } u \wedge x \text{ ppi } v,$
- $u \text{ mio } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x, y \quad w \text{ m } x \text{ m } y \text{ m } w \wedge x \text{ ppi } u \wedge y \text{ ppi } v,$
- $u \text{ eq } v \stackrel{\text{def}}{=} \exists w, x \quad w \text{ m } u \text{ m } x \wedge w \text{ m } v \text{ m } x.$

Les relations *mi*, *di*, *fi*, *oi*, *si* sont les relations inverses de *m*, *d*, *f*, *o*, *s*, respectivement.

3 Axiomatisation des intervalles cycliques

Dans cette section, nous donnons un ensemble d'axiomes dans le but de caractériser la relation *meets* satisfaite par les intervalles cycliques. Certains de ces axiomes sont motivés par des propriétés intuitives que possèdent les modèles des intervalles cycliques. D'autres, sont des axiomes adaptés au cas cyclique et provenant de l'axiomatisation de la relation *meets* pour les intervalles de la droite [Lad87, AH85]. Dans la suite $u, v, w, \dots$ dénoteront des variables représentant des intervalles cycliques. Le symbole $|$ correspondra à la relation *meets*. L'expression $v_1 | v_2 | \dots | v_n$ avec $v_1, v_2, \dots, v_n$ n variables ($n > 2$) est une abréviation pour la conjonction $\bigwedge_{i=1}^{n-1} v_i | v_{i+1}$. Remarquons que l'expression $v_1 | v_2 | \dots | v_n | v_1$ est équivalente à $v_2 | \dots | v_n | v_1 | v_2$.

Une autre abréviation que nous emploierons par la suite est $X(u, v, w, x)$. Elle est définie par l'expression $u | v \wedge w | x \wedge (u | x \vee w | v)$. Intuitivement, la satisfaction de $X(u, v, w, x)$ exprime le fait que l'intervalle cyclique u rencontre (est en relation *meets* avec) l'intervalle cyclique v , l'intervalle cyclique w rencontre (est en relation *meets* avec) l'intervalle cyclique x et les deux points de rencontre sont les mêmes. Dans la figure 4 sont représentées les trois situations pour lesquelles $X(u, v, w, x)$ est satisfaite par des intervalles cycliques sur un cercle :

- (a) $u | v, w | x, u | x, w | v$ sont satisfaites,
- (b) $u | v, w | x, w | v$ sont satisfaites et $u | x$ n'est pas satisfaite,
- (c) $u | v, w | x, u | x$ sont satisfaites et $w | v$ n'est pas satisfaite.

Nous sommes maintenant en mesure de définir l'axiomatisation CycInt choisie pour axiomatiser la relation *meets* des modèles des intervalles cycliques. À la suite de chacun des axiomes est donnée une idée intuitive de ce qu'il exprime.

Définition 2 (Axiomatisation CycInt)

- A1.** $\forall u, v, w, x, y, z \quad X(u, v, w, x) \wedge X(y, z, w, x) \rightarrow X(u, v, y, z)$

Si, pour trois couples d'intervalles cycliques vérifiant la

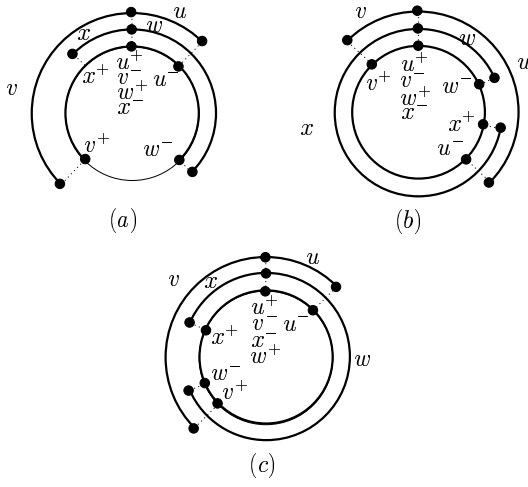


FIG. 4 – La satisfaction de $X(u, v, w, x)$.

relation meets, le premier et le deuxième définissent le même point de rencontre que le deuxième et le troisième, alors il en est de même pour le premier et le troisième.

A2. $\forall u, v, w, x, y, z \quad X(u, v, w, x) \wedge X(y, u, x, z) \rightarrow \neg u|x \wedge \neg x|u$

Deux intervalles cycliques ayant les mêmes bornes ne satisfont pas la relation meets.

A3. $\forall u, v, w, x, y, z \quad u|v \wedge w|x \wedge y|z \wedge \neg u|x \wedge \neg w|v \wedge \neg u|z \wedge \neg y|v \wedge \neg w|z \wedge \neg y|x \rightarrow$
 $\exists r, s, t \quad r|s|t|r \wedge X(u, v, r, v) \wedge (X(w, x, s, t) \wedge X(y, z, t, r)) \vee (X(w, x, t, r) \wedge X(y, z, s, t))$

Trois points de rencontre distincts peuvent être définis par trois intervalles cycliques en relation meets d'une manière cyclique (ils recouvrent tout le cercle).

A4. $\forall u, v, w, x, \quad u|v \wedge w|x \wedge \neg u|x \wedge \neg w|v \rightarrow$
 $(\exists y, z, t \quad y|z|t|y \wedge X(y, z, w, x) \wedge X(t, y, u, v)) \wedge$
 $(\exists y, z, t \quad y|z|t|y \wedge X(y, z, u, v) \wedge X(t, y, w, x))$

Deux points de rencontre sont les bornes de deux intervalles cycliques. Chacun des deux peut être caractérisé à l'aide de deux autres intervalles cycliques.

A5. $\forall u, v \quad (\exists w, x \quad u|w|x|v|u) \rightarrow (\exists y \quad u|y|v|u)$
 Deux intervalles cycliques se rencontrant définissent un autre intervalle cyclique correspondant à l'union de ces deux intervalles cycliques.

A6. $\exists u \quad u = u \text{ et } \forall u \exists v, w \quad u|v|w|u$
 Il existe trois intervalles cycliques qui sont en relation meets d'une manière cyclique (ils recouvrent le cercle dans sa totalité).

A7. $\forall u, v \quad (\exists w, x \quad w|u|x \wedge w|v|x) \leftrightarrow u = v$
 Il n'existe pas deux intervalles distincts ayant la même borne inférieure et la même borne supérieure.

A8. $\forall u, v, w \quad u|v|w \rightarrow \neg u|w$
 Deux intervalles cycliques séparés par un intervalle cyclique ne peuvent pas satisfaire la relation meets.

De cette axiomatisation nous pouvons en déduire différents théorèmes qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition 1 Toute structure $(\mathcal{I}, |)$ qui satisfait l'axiomatisation $CycInt$ satisfait également les formules suivantes :

- B1.** $\forall u, v \quad u|v \rightarrow \neg v|u$
B2. $\forall u, v, w, x, y, z \quad X(u, v, w, x) \wedge X(y, u, x, z) \rightarrow w|v \wedge y|z$
B3. $\forall u, v \quad (\exists w \quad u|w|v|u) \rightarrow (\exists x, y \quad u|x|y|v|u)$

Preuve

(B1) Soient u, v satisfaisant $u|v$. Supposons que $v|u$ soit satisfaite. $X(u, v, u, v)$ et $X(v, u, v, u)$ sont satisfaites. À partir de l'axiome **A2** suit que $u|v$ et $v|u$ ne peuvent pas être satisfaites. Il y a donc une contradiction.

(B2) Soient u, v, w, x, y, z satisfaisant $X(u, v, w, x)$ et $X(y, u, x, z)$. De l'axiome **A2** il suit que $u|x$ et $x|u$ ne sont pas satisfaites. Puisque $X(u, v, w, x)$ et $X(y, u, x, z)$ sont satisfaites, nous pouvons affirmer que $y|z$ et $w|v$ sont satisfaites.

(B3) Soient u, v, w satisfaisant $u|w|v|u$. Nous avons $u|w$, $w|v$ et $v|u$ qui sont satisfaites. De plus, puisque $v|u$ est satisfaite, de **B1** nous pouvons déduire que $u|v$ et $w|w$ ne peuvent pas être satisfaites. De l'axiome **A4** suit qu'il existe x, y, z satisfaisant $x|y|z|x$, $X(x, y, u, w)$ et $X(z, x, w, v)$. À partir de l'axiome **A2** nous pouvons affirmer que $x|w$ et $w|x$ ne sont pas satisfaites. À partir de cela et du fait que $X(x, y, u, w) \wedge X(z, x, w, v)$ est satisfaite, nous pouvons affirmer que $u|y$ et $z|v$ sont satisfaites. Nous pouvons donc conclure que u, v, y, z satisfont $u|y|z|v|u$. $\square$

4 Des intervalles cycliques aux points cycliques

Dans cette section, nous allons montrer comment définir un ordre cyclique $\prec$ sur un ensemble de points à partir d'un ensemble d'intervalles cycliques avec une relation *meets* satisfaisant l'axiomatisation $CycInt$. La démarche suivie est similaire à celle utilisée par Ladkin [Lad87] pour le cas linéaire. En effet, un point cyclique sera intuitivement défini par l'ensemble des couples d'intervalles cycliques se rencontrant (en relation *meets*) à un même endroit. Un point cyclique désignera donc un lieu de rencontre. Trois points cycliques l, m, n ainsi définis seront en relation $\prec$ si, et seulement si, il existe trois intervalles cycliques en relation *meets* de manière cyclique (recouvrant le cercle) tels que leurs points de rencontre soient successivement l, m et enfin n . Donnons formellement la définition de cet ordre cyclique.

Soit $(\mathcal{I}, |)$ un couple formé d'un ensemble $\mathcal{I}$ et d'une relation binaire $|$ sur $\mathcal{I}$ satisfaisant l'axiomatisation $CycInt$ définie précédemment. Soit $\mathcal{J}$ le sous-ensemble de $\mathcal{I} \times \mathcal{I}$ défini par $\mathcal{J} = \{(u, v) \in \mathcal{I} \times \mathcal{I} : u|v\}$.

Définition 3 Soit $\triangleq$ la relation binaire sur $\mathcal{J}$ définie par

$(u, v) \doteq (w, x)$ ssi $u|x$ ou $w|v$.

Remarquons qu'étant donnés que $u|v$ et $w|x$, nous avons $(u, v) \doteq (w, x)$ ssi $X(u, v, w, x)$ pour tout $u, v, w, x \in \mathcal{I}$.

Proposition 2 $\doteq$ est une relation d'équivalence.

Preuve À partir de la définition de $\doteq$ nous pouvons aisément établir les propriétés de réflexivité et de symétrie. L'axiome **A1** nous permet d'affirmer que la relation $\doteq$ est transitive. $\square$

Étant donné un élément $(u, v) \in \mathcal{J}$, $\overline{uv}$ dénotera la classe d'équivalence correspond à (u, v) par rapport à $\doteq$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble de toutes les classes d'équivalence de $\doteq$. Nous définissons la relation ternaire $\prec$ sur $\mathcal{P}$ de la manière suivante.

Définition 4 Soit $\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz} \in \mathcal{P}$. $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz})$ ssi $\exists r, s, t \in \mathcal{I}$ avec $r|s|t|r$, $\overline{rs} = \overline{uv}$, $\overline{st} = \overline{wx}$ et $\overline{tr} = \overline{yz}$.

Voir la figure 5 pour une illustration de cette définition. La structure $(\mathcal{P}, \prec)$ ainsi obtenue à partir de $(\mathcal{I}, |)$ sera

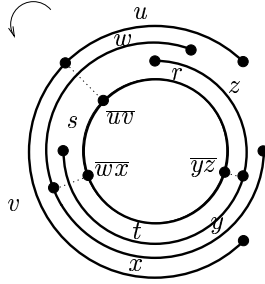


FIG. 5 – La satisfaction de $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz})$.

dénotée par $\text{CycPoint}(\mathcal{I}, |)$ dans la suite.

Proposition 3 La structure $(\mathcal{P}, \prec)$ est un ordre cyclique.

La fin de cette section est dévolue à la preuve de cette proposition.

Proposition 4 $\forall \overline{uv}, \overline{wx} \in \mathcal{P}$, $\neg \prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{wx})$ (C1)

Preuve Soit $\overline{uv}, \overline{wx} \in \mathcal{P}$. Supposons que $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{wx})$ soit satisfaite. Par définition de $\prec$, il existe $y, z, t \in \mathcal{I}$ satisfaisant $y|z|t|y$ et tels que $(y, z) \doteq (u, v)$, $(z, t) \doteq (w, x)$, $(t, y) \doteq (w, x)$. $\doteq$ étant transitive et symétrique, nous pouvons affirmer que $(z, t) \doteq (t, y)$. À partir de cela et de la définition de $\doteq$, nous avons $z|y$ ou $t|t$ qui sont satisfaites. Puisque $|$ est une relation irréflexive, nous pouvons affirmer que $z|y$ est satisfaite. De plus, $y|z$ est aussi satisfaite. La relation $|$ est asymétrique, il y a donc une contradiction. $\square$

Proposition 5 $\forall \overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz}, \overline{st} \in \mathcal{P}$, $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz}) \wedge \prec (\overline{uv}, \overline{yz}, \overline{st}) \rightarrow \prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{st})$ (C2)

Preuve Soit $\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz}, \overline{st} \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz})$ et $\prec (\overline{uv}, \overline{yz}, \overline{st})$. De la définition de $\prec$ suit qu'il existe $m, n, o \in \mathcal{I}$ satisfaisant $m|n|o|m$, $\overline{mn} = \overline{uv}$, $\overline{no} = \overline{wx}$, $\overline{om} = \overline{yz}$. D'autre part, nous pouvons affirmer qu'il existe $p, q, r \in \mathcal{I}$ satisfaisant $p|q|r|p$, $\overline{pq} = \overline{uv}$, $\overline{qr} = \overline{yz}$ et $\overline{rp} = \overline{st}$. Par transitivité de $\doteq$ et à partir des égalités $\overline{mn} = \overline{uv}$, $\overline{pq} = \overline{uv}$, $\overline{om} = \overline{yz}$, $\overline{qr} = \overline{yz}$, nous pouvons affirmer que $\overline{mn} = \overline{pq}$ et $\overline{om} = \overline{qr}$. Ainsi, par définition de $\doteq$, $X(m, n, p, q)$ et $X(o, m, q, r)$ sont satisfaites. À partir du théorème **B2**, il suit que $p|n$ et $o|r$ sont aussi satisfaites. De tout ceci, nous déduisons que $n|o|r|p|n$ est satisfaite. À partir de l'axiome **A5**, nous pouvons affirmer qu'il existe l satisfaisant $n|l|p|n$. Par rotation, nous déduisons que $p|n|l|p$ est satisfaite. De la satisfaction de $n|l$ et de celle de $n|o$ découle l'égalité $\overline{nl} = \overline{no}$. À partir de cette dernière égalité, la transitivité de $\doteq$ et l'égalité $\overline{no} = \overline{wx}$, nous pouvons affirmer que $\overline{nl} = \overline{wx}$. Comme $l|p$ et $r|p$ sont satisfaites, nous avons l'égalité $\overline{lp} = \overline{rp}$. À partir de cette dernière égalité, la transitivité de $\doteq$ et l'égalité $\overline{rp} = \overline{st}$, nous pouvons déduire le fait que $\overline{lp} = \overline{st}$. En conséquence, nous avons $p|n|l|p$, $\overline{pn} = \overline{uv}$, $\overline{nl} = \overline{wx}$ et $\overline{lp} = \overline{st}$ qui sont satisfaites. Ainsi, par définition de $\prec$, nous pouvons conclure que $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{st})$ est satisfaite. $\square$

Proposition 6 $\forall \overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz} \in \mathcal{P}$, $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz}) \leftrightarrow \prec (\overline{wx}, \overline{yz}, \overline{uv}) \leftrightarrow \prec (\overline{yz}, \overline{uv}, \overline{wx})$ (C3)

Preuve Soit $\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz} \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz})$. Par définition de $\prec$, $u|v$, $w|x$ et $y|z$ sont satisfaites et il existe r, s, t satisfaisant $r|s|t|r$, $\overline{rs} = \overline{uv}$, $\overline{st} = \overline{wx}$ et $\overline{tr} = \overline{yz}$. Par rotation, nous pouvons affirmer que $s|t|r|s$ est aussi satisfaite. Nous pouvons en déduire que $\prec (\overline{wx}, \overline{yz}, \overline{uv})$ est satisfaite. D'une façon similaire, nous pouvons prouver que $\prec (\overline{wx}, \overline{yz}, \overline{uv}) \rightarrow \prec (\overline{yz}, \overline{uv}, \overline{wx})$ et $\prec (\overline{yz}, \overline{uv}, \overline{wx}) \rightarrow \prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz})$ sont satisfaites. $\square$

Proposition 7 $\forall \overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz} \in \mathcal{P}$, $\overline{uv} \neq \overline{wx} \wedge \overline{wx} \neq \overline{yz} \wedge \overline{uv} \neq \overline{yz} \rightarrow \prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz}) \vee \prec (\overline{uv}, \overline{yz}, \overline{wx})$ (C4)

Preuve Soient $\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz} \in \mathcal{P}$ satisfaisant les inégalités suivantes : $\overline{uv} \neq \overline{wx}$, $\overline{wx} \neq \overline{yz}$ et $\overline{uv} \neq \overline{yz}$. À partir de la définition de $\mathcal{P}$ et $\doteq$ nous pouvons affirmer que $u|v$, $w|x$, $y|z$, $\neg u|x$, $\neg w|v$, $\neg u|z$, $\neg y|v$, $\neg w|z$, $\neg y|x$ sont satisfaites. Grâce à l'axiome **A3** nous pouvons déduire qu'il existe r, s, t satisfaisant $r|s|t|r$ et tels que $X(u, v, r, s)$, $X(w, x, s, t)$, $X(y, z, t, r)$ ou $X(u, v, r, s)$, $X(w, x, t, r)$, $X(y, z, s, t)$ sont satisfaites. À partir de cela, nous pouvons conclure que $\prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz}) \vee \prec (\overline{uv}, \overline{yz}, \overline{wx})$ est satisfaite. $\square$

Proposition 8 $\forall \overline{uv}, \overline{wx} \in \mathcal{P}$, $\overline{uv} \neq \overline{wx} \rightarrow ((\exists \overline{yz}, \prec (\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{yz})) \wedge (\exists \overline{rs}, \prec (\overline{uv}, \overline{rs}, \overline{wx})))$ (C5)

Preuve Soient $\overline{uv}, \overline{wx} \in \mathcal{P}$ tels que $\overline{uv} \neq \overline{wx}$. Par définition de $\mathcal{P}$ et de $\stackrel{\circ}{=}$ nous pouvons affirmer que $u|v$, $w|x$, $\neg u|x$ et $\neg w|v$ sont satisfaites. À partir de **A4** nous déduisons qu'il existe y, z, t tels que $y|z|t|y \wedge X(y, z, w, x) \wedge X(t, y, u, v)$ est satisfaite et qu'il existe q, r, s tels que $q|r|s|q \wedge X(q, r, u, v) \wedge X(s, q, w, x)$ est satisfaite. thEn conséquence, il existe y, z, t tels que $\prec(\overline{yz}, \overline{zt}, \overline{ty})$, $\overline{yz} = \overline{wx}$, $\overline{ty} = \overline{uv}$ sont satisfaites et il existe q, r, s tels que $\prec(\overline{qr}, \overline{rs}, \overline{sq})$, $\overline{qr} = \overline{uv}$, $\overline{sq} = \overline{wx}$ sont satisfaites. Ainsi, il existe $\overline{zt} \in \mathcal{P}$ tel que $\prec(\overline{wx}, \overline{zt}, \overline{uv})$ est satisfaite, et il existe $\overline{rs} \in \mathcal{P}$ tel que $\prec(\overline{uv}, \overline{rs}, \overline{wx})$ est satisfaite. À partir de **C3** nous pouvons conclure qu'il existe $\overline{zt} \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec(\overline{uv}, \overline{wx}, \overline{zt})$, et qu'il existe $\overline{rs} \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec(\overline{uv}, \overline{rs}, \overline{wx})$. $\square$

Proposition 9 $\exists \overline{uv}, \overline{wx} \in \mathcal{P}, \quad \overline{uv} \neq \overline{wx}. \quad (\text{C6})$

Preuve À partir de l'axiome **A6** nous pouvons affirmer qu'il existe u, v, w satisfaisant $u|v|w|u$. Ainsi, il existe $\overline{uv}, \overline{vw}, \overline{wu} \in \mathcal{P}$ tels que $\prec(\overline{uv}, \overline{vw}, \overline{wu})$ est satisfaite. À partir de la proposition **C1** nous déduisons que $\overline{uv}$ et $\overline{vw}$ sont distincts. $\square$

Considérant toutes ces propositions nous pouvons affirmer que $(\mathcal{P}, \prec)$ est un ordre cyclique.

5 Des points cycliques aux intervalles cycliques

Dans cette section, nous allons prouver que chaque structure d'intervalles cycliques obtenue à partir d'un ordre cyclique sur les points est un modèle de *CycInt*.

Théorème 1 Soit $(\mathcal{P}, \prec)$ un ordre cyclique. $(\mathcal{I}, |) = \text{Cyclnt}(\mathcal{P}, \prec)$ est un modèle de l'axiomatisation *CycInt*.

Preuve Dans la suite, étant donné un élément $u = (m, n) \in \mathcal{I}$, u^- (resp. u^+) fera référence à m (resp. n).

• **(A1)** Prouvons que l'axiome **A1** est satisfait par $(\mathcal{I}, |)$. Soient $u, v, w, x, y, z \in \mathcal{I}$ satisfaisant $X(u, v, w, x)$ et $X(y, z, w, x)$. À partir de la définition de X nous pouvons affirmer que $u|v$ et $y|z$ sont satisfaites. Il découle les égalités $u^+ = v^-$, $w^+ = x^-$ et $y^+ = z^-$. De plus, toujours à partir de la définition de X , il suit que $u|x$ ou $w|v$ et $y|x$ ou $w|z$ sont satisfaites. Considérons, de manière exhaustive, toutes les situations possibles :

- $u|x$ et $y|x$ sont satisfaites. Il suit que $u^+ = x^-$ et $y^+ = x^-$ sont satisfaites. Ainsi, nous avons $u^+ = v^- = w^+ = x^- = y^+ = z^-$.
- $u|x$ et $w|z$ sont satisfaites. Il suit que $u^+ = x^-$ et $w^+ = z^-$. Ainsi, $u^+ = v^- = w^+ = x^- = y^+ = z^-$ est satisfaite.
- $w|v$ et $y|x$ sont satisfaites. Il suit que $w^+ = v^-$ et $y^+ = x^-$ sont satisfaites. En conséquence, $u^+ = v^- = w^+ = x^- = y^+ = z^-$ est satisfaite.
- $w|v$ et $w|z$ sont satisfaites. Il suit que $w^+ = v^-$ et $w^+ = z^-$ sont satisfaites. Ainsi, $u^+ = v^- = w^+ = x^- = y^+ = z^-$ est satisfaite.

Dénotons par l les points identiques $u^+, v^-, w^+, x^-, y^+, z^-$. Supposons par l'absurde que $X(u, v, y, z)$ est falsifiée. En utilisant le fait que $u|v$ et $y|z$ sont satisfaites, nous déduisons que $u|z$ et $y|v$ ne sont pas satisfaites. Puisque $u^+ = z^-$ et $y^+ = v^-$ sont satisfaites, $\prec(u^-, l, z^+)$ et $\prec(y^-, l, v^+)$ ne sont pas satisfaites. De **P5** découle la satisfaction de $\prec(u^-, z^+, l)$ et celle de $\prec(y^-, v^+, l)$. Comme $u|v$ et $y|z$ sont satisfaites, $\prec(u^-, l, v^+)$ et $\prec(y^-, l, z^+)$ sont aussi satisfaites. Ainsi, en utilisant **P4**, nous pouvons affirmer que $\prec(l, y^-, v^+)$ et $\prec(l, v^+, u^-)$ sont vraies. À partir de **P2**, il suit que $\prec(l, y^-, u^-)$ est également vraie. De la satisfaction de $\prec(u^-, z^+, l)$ et de **P4** suit que $\prec(l, u^-, z^+)$ est vérifiée. En utilisant **P2**, il résulte que $\prec(l, y^-, z^+)$ est satisfaite. Rappelons que $\prec(y^-, l, z^+)$ est satisfaite. À partir de **P4**, puis de **P2**, il résulte que $\prec(y^-, z^+, z^+)$ est satisfaite. Grâce à **P1**, nous remarquons qu'il y a une contradiction. Nous pouvons donc conclure que $X(u, v, y, z)$ est satisfaite.

• **(A2)** Prouvons la satisfaction de l'axiome **A2**. Soient $u, v, w, x, y, z \in \mathcal{I}$ satisfaisant $X(u, v, w, x)$ et $X(y, u, x, z)$. Les égalités suivantes sont satisfaites : $u^+ = x^-$ et $x^+ = u^-$. En utilisant **P4** et **P1**, nous pouvons affirmer que $\prec(u^-, u^+, x^+)$ et $\prec(x^-, x^+, u^+)$ ne peuvent pas être satisfaites. En conséquence, $u|x$ et $x|u$ ne sont pas satisfaites.

• **(A3-A4)** Pour des questions de lisibilité, les preuves de ces deux axiomes ont été placées en Annexe.

• **(A5)** Montrons que l'axiome **A5** est satisfait. Soient $u, v, w, x \in \mathcal{I}$ satisfaisant $u|w|x|v|u$. Nous avons les égalités suivantes : $u^+ = w^-$, $w^+ = x^-$, $x^+ = v^-$ et $v^+ = u^-$. Définissons l_1 (resp. l_2 , l_3 et l_4) par $l_1 = u^+ = w^-$ (resp. $l_2 = w^+ = x^-$, $l_3 = x^+ = v^-$ et $l_4 = v^+ = u^-$). Considérons le couple $y = (l_1, l_3)$. Comme $w|x$ est satisfaite, nous déduisons la satisfaction de $\prec(l_1, l_2, l_3)$. Ainsi, nous pouvons affirmer que $l_1 \neq l_3$. De **P5**, il découle qu'il existe l satisfaisant $\prec(l_1, l_3, l)$. Il résulte que $y = (l_1, l_3)$ appartient à $\mathcal{I}$.

Supposons par l'absurde que $u|y$ ne soit pas satisfaite. Puisque $u^+ = l_1$, $\prec(u^-, l_1, l_3)$ n'est pas satisfaite. u^- est différent de l_1 et l_1 est différent de l_3 . Du fait que $v|u$ est satisfaite, nous déduisons que $\prec(l_3, u^-, u^+)$ est vraie. Il suit que $l_3 \neq u^-$. En conséquence, **P3** et la non satisfaction de $u|y$ nous permettent d'affirmer que $\prec(u^-, l_3, l_1)$ est satisfaite. Comme $v|u$ est satisfaite, $\prec(l_3, u^-, l_1)$ est aussi satisfaite. De **P4** et de **P2** suit que $\prec(l_3, u^-, u^-)$ est satisfaite. De **P1** découle une contradiction. En conséquence, $u|y$ est satisfaite.

Avec une démarche similaire, en supposant par l'absurde que $y|v$ n'est pas satisfaite, nous obtenons une contradiction. $u|y|v|u$ est donc satisfaite.

• **(A6)** Maintenant, prouvons la satisfaction des deux

axiomes **A6**. De **P6**, nous déduisons qu'il existe $l, m \in \mathcal{P}$ tels que $l \neq m$. De **P5** découle qu'il existe n satisfaisant $\prec (l, m, n)$. Soit $u = (l, m)$. Nous avons $u \in \mathcal{I}$ et $u = u$. Montrons maintenant la satisfaction du deuxième axiome. Soit $u = (l, m) \in \mathcal{I}$. Par définition de $\mathcal{I}$, il existe $n \in \mathcal{P}$ tel que $\prec (l, m, n)$. Soient $v = (m, n)$ et $w = (n, l)$. Par rotation (**P4**), nous avons $\prec (m, n, l)$ et $\prec (n, l, m)$. De tout ceci, nous déduisons que $u|v, v|w$ et $w|u$.

• (**A7**) Soient $u, v, w, x \in \mathcal{I}$ satisfaisant $w|u|x$ et $w|v|x$. Les égalités suivantes sont satisfaites : $w^+ = u^-$, $u^+ = x^-$, $w^+ = v^-$, $v^+ = x^-$. Il suit que $(u^-, u^+) = (v^-, v^+)$. En conséquence, nous pouvons affirmer que $u = v$.

Maintenant, soit $u, v \in \mathcal{I}$ tel que $u = v$. Nous savons que $u^- \neq u^+$. De **P5** suit qu'il existe $l \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec (u^-, u^+, l)$. Soit $w = (l, u^-)$ et $x = (u^+, l)$, de **P4** nous déduisons que $\prec (l, u^-, u^+)$ est satisfaite. De tout cela, nous pouvons affirmer que $w, x \in \mathcal{I}$ et que $w|u$ et $u|x$ sont satisfaites. Comme $(u^-, u^+) = (v^-, v^+)$, nous pouvons aussi affirmer que $w|v|x$ est satisfaite.

• (**A8**) Soient $u, v, w \in \mathcal{I}$ satisfaisant $u|v|w$. Il suit que $u^+ = v^-$ et $v^+ = w^-$. De plus, comme $\prec (u^-, v^-, v^+)$ est satisfaite, $v^- \neq v^+$. En conséquence, $u^+ \neq w^-$. Nous pouvons donc affirmer que $u|w$ n'est pas satisfaite. $\square$

6 Catégorisation des modèles de $CycInt$

Dans cette section, nous établissons le résultat important qui est que les modèles dénombrables satisfaisant l'axiomatisation $CycInt$ sont isomorphes. Montrons tout d'abord que pour tout intervalle cyclique il existe "deux bornes" uniques.

Proposition 10 Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{I}, |)$ un modèle de $CycInt$. Soit $(\mathcal{P}, \prec)$ la structure $CycPoint(\mathcal{M})$. Pour chaque $u \in \mathcal{I}$ il existe $L_u, U_u \in \mathcal{P}$ tels que :

1. $\exists v \in \mathcal{I}$ tel que $(v, u) \in L_u$,
2. $\exists w \in \mathcal{I}$ tel que $(u, w) \in U_u$,
3. L_u (resp. U_u) est l'unique élément de $\mathcal{P}$ satisfaisant (1) (resp. (2)),
4. $L_u \neq U_u$.

Preuve À partir de l'axiome **A6**, nous pouvons affirmer qu'il existe $v, w \in \mathcal{I}$ tels que $u|w|v|u$ est satisfaite. En conséquence, $u|w$ et $v|u$ sont satisfaites. En définissant L_u et U_u par $L_u = \overline{vu}$ et $U_u = \overline{uw}$, les propriétés (1) et (2) sont satisfaites. Maintenant, prouvons que la propriété (3) est satisfaite. Supposons qu'il existe L'_u tel qu'il existe $x \in \mathcal{I}$ avec $(x, u) \in L'_u$. Nous avons $(v, u) \equiv (x, u)$. Il suit que $L_u = L'_u$. Maintenant, supposons qu'il existe U'_u tel qu'il existe $y \in \mathcal{I}$ avec $(u, y) \in U'_u$. Nous avons $(u, w) \equiv (u, y)$. Il suit que $U_u = U'_u$. Ainsi, nous pouvons affirmer que la propriété (3) est vraie. Maintenant, supposons que $L_u = U_u$. Il suit que $(v, u) \equiv (u, w)$.

En conséquence, $v|w$ ou $u|u$ est satisfaite. Nous savons que $|$ est irréflexive. De plus, à partir de **A8** nous pouvons affirmer que $v|w$ ne peut pas être satisfaite. Il résulte qu'il y a une contradiction. Ainsi, L_u est différent de U_u . $\square$

Maintenant, montrons que tout modèle de $CycInt$ est isomorphe au modèle des intervalles cycliques pouvant être construit à partir de l'ordre cyclique qu'il engendre.

Proposition 11 Soit $\mathcal{M} = (\mathcal{I}, |)$ un modèle de $CycInt$. $\mathcal{M}$ est isomorphe à $(\mathcal{I}', |') = CycInt(CycPoint(\mathcal{M}))$.

Preuve Soit f l'application de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{I}'$ définie par $f(u) = (L_u, U_u)$, i.e. $f(u) = (\overline{vu}, \overline{uw})$ pour tout $v, w \in \mathcal{I}$ satisfaisant $v|u$ et $u|w$. Montrons que f est une bijection. Soit $(\overline{uv}, \overline{wx}) \in \mathcal{I}'$. Nous avons $u|v$ et $w|x$ qui sont satisfaites et, $u|x$ et $w|v$ qui sont falsifiées (dans le cas contraire nous aurions $\overline{uv} = \overline{wx}$). De **A4** découle qu'il existe y, z, t satisfaisant $y|z|t|y$, $X(y, z, w, x)$ et $X(t, y, u, v)$. Nous remarquons que $L_y = \overline{ty} = \overline{uv}$ et $U_y = \overline{yz} = \overline{wx}$. En conséquence, il existe $y \in \mathcal{I}$ tel que $f(y) = (\overline{uv}, \overline{wx})$. Maintenant, supposons qu'il existe $u, v \in \mathcal{I}$ tels que $f(u) = f(v)$. Supposons que $f(u) = (\overline{uv}, \overline{ux})$ et $f(v) = (\overline{yv}, \overline{vz})$. Ainsi, $\overline{uv} = \overline{yv}$ et $\overline{ux} = \overline{vz}$. Il suit que $(w, u) \stackrel{\circ}{=} (y, v)$ et $(u, x) \stackrel{\circ}{=} (v, z)$. De tout cela, nous avons $w|u, y|v, u|x$ et $v|z$ qui sont satisfaites. De plus, seules quatre situations sont envisageables :

- $w|v$ et $u|z$ sont satisfaites. Il suit que $w|v|z$ et $w|u|z$ sont satisfaites. De **A7**, nous déduisons l'égalité $u = v$.
- $w|v$ et $v|x$ sont satisfaites. Il suit que $w|v|x$ et $w|u|x$ sont satisfaites. De **A7**, nous déduisons l'égalité $u = v$.
- $y|u$ et $u|z$ sont satisfaites. Il suit que $y|v|z$ et $y|u|z$ sont satisfaites. De **A7**, nous obtenons l'égalité $u = v$.
- $y|u$ et $v|x$ sont satisfaites. Il suit que $y|v|z$ et $y|u|z$ sont satisfaites. De **A7**, nous obtenons l'égalité $u = v$.

Ainsi, dans tous les cas, l'égalité $u = v$ est vérifiée. En conséquence f est une bijection.

Maintenant, montrons que $u|v$ si, et seulement si, $f(u)|'f(v)$. Nous dénoterons $f(u)$ par $(\overline{uv}, \overline{ux})$ et $f(v)$ par $(\overline{yv}, \overline{vz})$.

- Supposons que $u|v$ soit satisfaite. Il suit que $(u, x) \stackrel{\circ}{=} (y, v)$ et ainsi, $\overline{ux} = \overline{yv}$. En conséquence, $f(u)|'f(v)$ est satisfaite.
- Supposons que $f(u)|'f(v)$ soit satisfaite. Il suit que $\prec (\overline{wu}, \overline{ux}, \overline{vz})$ et $\overline{ux} = \overline{yv}$ sont satisfaites. Ainsi, il existe $r, s, t \in \mathcal{I}$ tels que $r|s|t|r$, $\overline{rs} = \overline{wu}$, $\overline{st} = \overline{ux}$ et $\overline{tr} = \overline{vz}$ sont satisfaites. À partir de $\overline{rs} = \overline{wu}$ et $\overline{st} = \overline{ux}$, nous pouvons affirmer que $u|x, s|t, r|s$ et $w|u$ sont satisfaites. De plus, un des cas suivants est satisfait :
 - $r|u$ et $u|t$ sont satisfaites. Il suit que $r|u|t$ et $r|s|t$ sont satisfaites. De **A7**, nous avons l'égalité $u = s$.
 - $r|u$ et $s|x$ sont satisfaites. Il suit que $r|s|x$ et $r|u|x$ sont satisfaites. De **A7**, nous avons l'égalité $u = s$.
 - $w|s$ et $u|t$ sont satisfaites. Il suit que $w|u|t$ et $w|s|t$ sont satisfaites. De **A7** découle l'égalité $u = s$.
 - $w|s$ et $s|x$ sont satisfaites. Il suit que $w|s|x$ et $w|u|x$ sont satisfaites. De **A7** suit l'égalité $u = s$.

À partir des égalités $\overline{st} = \overline{y}v$ et $\overline{tr} = \overline{v}z$, nous pouvons affirmer que $s|t$, $y|v$, $t|r$ et $v|z$ sont satisfaites. De plus, seulement les cas suivants sont possibles :

- $s|v$ et $t|z$ sont satisfaites. Il suit que $s|t|z$ et $s|v|z$ sont satisfaites. De **A7**, il suit que $v = t$.
- $s|v$ et $v|r$ sont satisfaites. Il suit que $s|v|r$ et $s|t|r$ sont satisfaites. De **A7**, nous obtenons l'égalité $v = t$.
- $y|t$ et $t|z$ sont satisfaites. Il suit que $y|t|z$ et $y|v|z$ sont satisfaites. De **A7**, nous déduisons l'égalité $v = t$.
- $y|t$ et $v|r$ sont satisfaites. Il suit que $y|t|r$ et $y|v|r$ sont satisfaites. De **A7** suit l'égalité $v = t$.

Ainsi, $u = s$ et $v = t$. Nous pouvons donc affirmer que $u|v$ est satisfaite. $\square$

Montrons maintenant que deux modèles des intervalles cycliques issus de deux ordres cycliques dénombrables sont isomorphes.

Proposition 12 Soit $(\mathcal{P}, \prec)$ et $(\mathcal{P}', \prec')$ deux ordres cycliques avec $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux ensembles de points dénombrables. $\text{Cyclnt}((\mathcal{P}, \prec))$ et $\text{Cyclnt}((\mathcal{P}', \prec'))$ sont isomorphes.

Preuve Soient $(\mathcal{I}, |)$ et $(\mathcal{I}', |')$ définis par $\text{Cyclnt}((\mathcal{P}, \prec))$ et $\text{Cyclnt}((\mathcal{P}', \prec'))$. Nous savons que $(\mathcal{P}, \prec)$ et $(\mathcal{P}', \prec')$ sont isomorphes [BCL02]. Soit g un isomorphisme de $(\mathcal{P}, \prec)$ vers $(\mathcal{P}', \prec')$. Soit h la fonction de $\mathcal{I}$ vers $\mathcal{I}'$ définie par $h((l, m)) = (g(l), g(m))$. Tout d'abord, montrons que $(g(l), g(m)) \in \mathcal{I}'$. Comme $(l, m) \in \mathcal{I}$, il existe $n \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec(l, m, n)$. Il suit que $\prec'(g(l), g(m), g(n))$ est satisfaite. Il résulte que $(g(l), g(m)) \in \mathcal{I}'$. Maintenant, prouvons que pour chaque $(l, m) \in \mathcal{I}'$, il existe $(n, o) \in \mathcal{I}$ tel que $h((n, o)) = (l, m)$. Nous pouvons définir n et o par $n = g^{-1}(l)$ et $o = g^{-1}(m)$. En effet, $h(g^{-1}(l), g^{-1}(m)) = (g(g^{-1}(l)), g(g^{-1}(m))) = (l, m)$. Maintenant, soit $(l, m), (n, o) \in \mathcal{I}$ tels que $h((l, m)) = h((n, o))$. Il suit que $g(l) = g(n)$ et $g(m) = g(o)$. Il résulte que $l = n$ et $m = o$. Ainsi, nous avons l'égalité $(l, m) = (n, o)$. Pour clore cette preuve, montrons que pour toute $(l, m), (n, o) \in \mathcal{I}$, $(l, m)|(n, o)$ est satisfaite ssi $h((l, m))|h((n, o))$ est satisfaite. $(l, m)|(n, o)$ est satisfaite ssi $\prec(l, m, o)$ et $m = n$ sont satisfaites. Ainsi, $(l, m)|(n, o)$ est satisfaite ssi $\prec'(g(l), g(m), g(o))$ et $g(m) = g(n)$ sont satisfaites. En conséquence, nous pouvons affirmer que $(l, m)|(n, o)$ est satisfaite ssi $h((l, m))|h((n, o))$ est satisfaite. Nous pouvons donc conclure que h est un isomorphisme. $\square$

Dans la suite, $(\mathcal{Q}, \prec)$ correspond à l'ordre cyclique sur les nombres rationnels $\mathcal{Q}$, défini par $\prec(x, y, z)$ ssi $x < y < z$ ou $y < z < x$ ou $z < x < y$, avec $x, y, z \in \mathcal{Q}$ et $<$ qui correspond à l'ordre linéaire usuel sur $\mathcal{Q}$. Il est temps d'énoncer le résultat le plus important de cette section.

Théorème 2 La théorie axiomatisée par CycInt est $\aleph_0$ -catégorique, avec tout ses modèles dénombrables isomorphes à $\text{Cyclnt}((\mathcal{Q}, \prec))$.

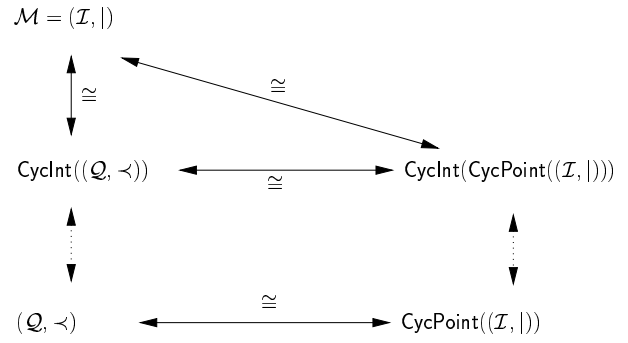


FIG. 6 – Chaque modèle dénombrable de $\text{CycInt}(\mathcal{I}, |)$ est isomorphe à $\text{Cyclnt}((\mathcal{Q}, \prec))$.

Preuve Soit $\mathcal{M}$ un modèle de CycInt . $\mathcal{M}$ est isomorphe à $\text{Cyclnt}(\text{CycPoint}(\mathcal{M}))$. $\text{Cyclnt}(\text{CycPoint}(\mathcal{M}))$ est isomorphe à $\text{Cyclnt}((\mathcal{Q}, \prec))$. En composant les isomorphismes, $\text{Cyclnt}((\mathcal{Q}, \prec))$ est isomorphe à $\mathcal{M}$. $\square$

En conséquence, l'ensemble des théorèmes de CycInt est syntaxiquement complet et décidable.

7 Application aux réseaux de contraintes

Balbani et Osmani [BO00] représentent les informations relatives à des intervalles cycliques à l'aide de réseaux de contraintes. Chacun de ces réseaux de contraintes est défini par un couple (V, C) où V est un ensemble de variables représentant des intervalles cycliques et C est une application qui associe à chaque couple (V_i, V_j) de variables un sous-ensemble C_{ij} de l'ensemble des 16 relations de bases. Le principal problème que l'on se pose étant donné un tel réseau de contraintes est le problème de la cohérence. Il consiste à savoir si le réseau possède une solution, une solution étant une affectation de chacune des variables V_i par un intervalle cyclique (d'un cercle orienté) m_i tel que toutes les contraintes soient satisfaites. La contrainte C_{ij} étant satisfaite si, et seulement si, les deux intervalles cycliques m_i et m_j satisfont une des relations présentes dans l'ensemble C_{ij} . C_{ij} peut donc être vue comme la disjonction de ses éléments.

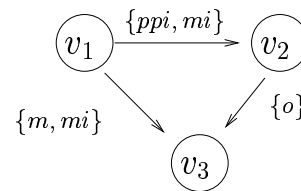


FIG. 7 – Un réseau de contraintes des intervalles cycliques.

Un premier point est que notre axiomatisation peut permettre, à l'aide d'un démonstrateur de théorèmes, de vérifier la cohérence d'un réseau de contraintes des inter-

valles cycliques. En effet, il suffit de traduire le réseau de contraintes (V, C) en une formule logique Φ équivalente. Puis, dans un second temps de tester la validité de cette formule (ou la satisfaisabilité dans un modèle choisi) en utilisant l'axiomatisation *CycInt*. Considérons par exemple le réseau de contraintes représenté dans la figure 7. Pour savoir s'il est cohérent nous devons prouver que la formule $\exists v_1, v_2, v_3, (v_1 \text{ ppi } v_2 \vee v_1 \text{ mi } v_2) \wedge (v_1 \text{ m } v_3 \vee v_1 \text{ mi } v_3) \wedge (v_2 \text{ o } v_3)$ est valide par rapport à *CycInt* ou satisfaisable pour un modèle tel que $(Q, <)$. Pour prouver l'incohérence du réseau, il faut considérer la négation de cette formule.

Habituellement, une méthode de propagation locale de contraintes, appelée la méthode de la chemin-cohérence, est utilisée pour résoudre ce type de réseau de contraintes. Cette méthode³ consiste à supprimer de la contrainte C_{ij} les relations non réalisables du fait des contraintes C_{ik} et C_{kj} et ceci pour tout triplet i, j, k . Une table de composition est utilisée pour réaliser une telle opération. Pour chacun des couples (a, b) , avec a et b deux relations de base, cette table contient la composition entre a et b , i.e. toutes les relations c telle qu'il existe une configuration de trois intervalles cycliques u, v, w satisfaisant $u a v, v b w$ et $u c w$. Par exemple, la composition entre m et d est constituée de l'unique relation *ppi*. La table de composition du formalisme des intervalles cycliques peut être construite de manière automatique à l'aide de notre axiomatisation. En effet, pour savoir si c appartient à la composition entre a et b , il suffira de prouver que $\exists u, v, w, u a v \wedge v b w \wedge u c w$ est valide. Pour montrer qu'au contraire c n'appartient pas à cette composition, il faudra considérer $\neg(\exists u, v, w, u a v \wedge v b w \wedge u c w)$.

8 Conclusion et perspectives

Dans ce papier, nous avons montré comment pouvaient être reliés les ordres cycliques et les modèles des intervalles cycliques. Nous proposons une axiomatisation des modèles des intervalles cycliques et démontrons que tout modèle dénombrable de cette axiomatisation est isomorphe à celui construit à partir d'un ordre cyclique sur les rationnels. Déterminer si la théorie du premier ordre de la relation "meets" entre arcs du cercle possède la propriété de l'élimination de quantificateurs est un problème ouvert que nous étudions actuellement. Un autre problème étudié est de savoir si l'ensemble des axiomes de *CycInt* sont indépendants. Enfin, Une autre perspective intéressante est l'étude des modèles des intervalles cycliques finis. Pour cela, il nous faudra considérer les ordres cycliques non denses (ne satisfaisant pas l'axiome **P5**) et examiner les structures d'intervalles cycliques que nous pouvons obtenir à partir de ces ordres cycliques. L'étude de tels modèles finis permettrait d'aboutir à la réalisation de méthodes efficaces pour la résolution du problème de la cohérence des réseaux de contraintes des intervalles cycliques. En effet,

ces derniers ne font intervenir qu'un nombre fini de variables, il ne paraît donc pas nécessaire de manipuler des modèles infinis pour les traiter.

Références

- [AH85] J. F. Allen and P. J. Hayes. A commonsense theory of time. In *Proceedings of the Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'85)*, pages 528–531, 1985.
- [All81] J. F. Allen. An interval-based representation of temporal knowledge. In *Proceedings of the Seventh Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'81)*, pages 221–226, 1981.
- [BC02] Philippe Balbiani and Jean-François Condotta. Spatial reasoning about points in a multidimensional setting. *Journal of Applied Intelligence*, Kluwer, 17(3) :221–238, 2002.
- [BCF99] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Fariñas del Cerro. A new tractable subclass of the rectangle algebra. In T. Dean, editor, *Proceedings of the Sixteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'99)*, pages 442–447, 1999.
- [BCF02] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Luis Farinas del Cerro. Tractability results in the block algebra. *Journal of Logic and Computation*, Oxford University Press, 12, 2002.
- [BCL02] Philippe Balbiani, Jean-François Condotta, and Gérard Ligozat. Reasoning about cyclic space : axiomatic and computational aspects. In *Proceedings of Spatial Cognition 2002, (Tutzing) Munich*, à paraître, 2002.
- [BO00] P. Balbiani and A. Osmani. A model for reasoning about topologic relations between cyclic intervals. In *Proc. of KR-2000*, Breckenridge, Colorado, 2000.
- [IC00] Amar Isli and Anthony G. Cohn. A new approach to cyclic ordering of 2D orientations using ternary relation algebras. *Artificial Intelligence*, 122(1–2) :137–187, 2000.
- [Lad87] Peter Ladkin. *The Logic of Time Representation*. PhD thesis, université de Californie, Berkeley, 1987.
- [Lig98a] Gérard Ligozat. Corner relations in Allen's algebra. *Constraints*, 3(2/3) :165–177, juin 1998.
- [Lig98b] Gérard Ligozat. Reasoning about cardinal directions. *Journal of Visual Languages and Computing*, 1(9) :23–44, 1998.
- [Sch93] C. Schlieder. Representing visible locations for qualitative navigation. In N. Piera Carreté and M. G. Singh, editors, *Proc. of the III IMACS Int. Work. on Qualitative Reasoning and Decision Technologies—QUARDET'93—*, pages 523–532. CIMNE, 1993.

³Signalons que cette méthode de propagation n'est pas compléte pour le cas des réseaux atomiques de contraintes des arcs cycliques.

9 Annexe

Dans cette annexe se trouve la partie manquante de la preuve du théorème 1 :

• **(A3)** Prouvons la satisfaction de l'axiome **A3**. Soient $u, v, w, x, y, z \in \mathcal{I}$ satisfaisant $u|v, w|x, y|z, \neg u|x, \neg w|v, \neg u|z, \neg y|v, \neg w|z, \neg y|x$. À partir de la satisfaction de $u|v$ (resp. $w|x$ et $y|z$), il suit que $u^+ = v^-$ (resp. $w^+ = x^-$ and $y^+ = z^-$). Soit l (resp. m et n) le point défini par $l = u^+ = v^-$ (resp. $m = w^+ = x^-$ et $n = y^+ = z^-$). Supposons par l'absurde que $l = m$. L'égalité $u^+ = v^- = w^+ = x^-$ est satisfaite. Puisque $w|x$ est vraie, nous pouvons déduire que $\prec(w^-, x^-, x^+)$ est aussi satisfaite. En conséquence, w^- et x^+ sont des points distincts. Considérons les trois points u^-, w^-, x^+ . À partir de **P3** quatre situations sont à prendre en compte : $u^- = w^-$ est satisfaite, $u^- = x^+$ est satisfaite, $\prec(w^-, x^+, u^-)$ est satisfaite, ou bien $\prec(w^-, u^-, x^+)$ est satisfaite. En utilisant, **P2**, **P3** et **P4**, nous obtenons pour chacun des cas une contradiction⁴. En conséquence, nous pouvons affirmer que $l \neq m$. D'une manière similaire, nous pouvons montrer que $l \neq n$ et $m \neq n$. Maintenant, nous savons que l, m, n sont des points différents deux à deux. Du fait de **P3**, deux cas sont possibles :

- $\prec(l, m, n)$ est satisfaite. Soient $r = (n, l)$, $s = (l, m)$ et $t = (m, n)$. Nous avons $r|s|t|r$ qui est satisfaite. Supposons que $u|s$ soit falsifiée. Il suit que $\prec(u^-, l, m)$ est également falsifiée. Comme l est différent de u^- et m , nous avons $u^- = m$ ou $\prec(u^-, m, l)$ qui est satisfaite.
- Supposons que $u^- = m$ soit satisfaite. Du fait que $u|v$ est satisfaite, il suit que $\prec(u^-, u^+, v^+)$ est satisfaite. En conséquence, $\prec(m, l, v^+)$ est vraie. Du fait de **P4**, $\prec(l, v^+, m)$ est satisfaite. De tout cela, de la satisfaction de $\prec(l, m, n)$ et de **P2**, nous pouvons affirmer que $\prec(l, v^+, n)$ est satisfaite. De **P4**, nous déduisons que $\prec(n, l, v^+)$ est satisfaite. Comme $l = v^-$, $r|v$ est satisfaite.
- Supposons que $\prec(u^-, m, l)$ soit satisfaite. De **P4**, $\prec(l, u^-, m)$ est satisfaite. À partir de cela, de la satisfaction de $\prec(l, m, n)$ et de **P2**, il suit $\prec(l, u^-, n)$ est satisfaite. Du fait que $u|v$ est satisfaite, il découle que $\prec(u^-, u^+, v^+)$ est satisfaite. En conséquence, $\prec(u^-, l, v^+)$ est aussi satisfaite. De **P4** résulte que $\prec(l, v^+, u^-)$ est satisfaite. À partir de cela et de la satisfaction de $\prec(l, u^-, n)$, nous déduisons que $\prec(l, v^+, n)$ est satisfaite. Avec **P4**, nous obtenons la satisfaction de $\prec(n, l, v^+)$. $l = v^-$, en conséquence $r|v$ est satisfaite.

Il résulte que $u|s$ ou $r|v$ est satisfaite. Ainsi, $X(u, v, r, s)$ est vraie. De manière similaire, nous pouvons prouver que $X(w, x, s, t)$ et $X(y, z, t, r)$ sont satisfaites.

- $\prec(l, n, m)$ est satisfaite. Soient $r = (m, l)$, $s = (l, n)$ et $t = (n, m)$. Nous avons $r|s|t|r$ qui est satisfaite. Avec une ligne de raisonnement similaire au cas précédent, nous pouvons montrer que $X(u, v, r, s)$, $X(y, z, s, t)$ et $X(w, x, t, r)$ sont satisfaites.

• **(A4)** Soient $u, v, w, x \in \mathcal{I}$ satisfaisant $u|v, w|x, \neg u|x$, et $\neg w|v$. $\prec(u^-, u^+, v^+)$, $\prec(w^-, w^+, x^+)$ avec $u^+ = v^-$ et $w^+ = x^-$ sont satisfaites. Soit l et m définis par $l = u^+ = v^-$ et $m = w^+ = x^-$. Supposons que $l = m$. Comme $\prec(u^-, u^+, v^+)$ et $\prec(w^-, w^+, x^+)$ sont satisfaites, nous avons $\prec(u^-, l, v^+)$ et $\prec(w^-, l, x^+)$ qui sont également satisfaites. Ainsi, nous avons $u^- \neq l$ et $x^+ \neq l$. Du fait de **P3**, trois cas sont envisageables : $u^- = x^+$ est satisfaite, $\prec(u^-, l, x^+)$ est satisfaite, ou bien $\prec(u^-, x^+, l)$ est satisfaite. À l'aide de **P2** et **P4** nous pouvons caractériser une contradiction pour chacun de ces cas. Nous pouvons donc affirmer que $l \neq m$. Par **P5**, il existe $n, o \in \mathcal{P}$ satisfaisant $\prec(l, m, n)$ et $\prec(l, o, n)$. Définissons trois intervalles cycliques y, z, t par $y = (l, m)$, $z = (m, n)$ et $t = (n, l)$. De la satisfaction de $\prec(l, m, n)$ et de **P4**, $y|z|t|y$ est satisfaite. Supposons que $y|x$ ne soit pas satisfaite. Comme $y^+ = x^-$, il suit que $\prec(y^-, y^+, x^+)$ n'est pas satisfaite. Nous avons $y^- \neq y^+$ et $y^+ \neq x^+$. De **P3** suit que $y^- = x^+$ ou $\prec(y^-, x^+, y^+)$ est satisfaite. Examinons ces deux cas.

- $y^- = x^+$ est satisfaite. Il suit que $x^+ = l = u^+ = v^-$. De la satisfaction de $w|x$, nous avons $\prec(w^-, w^+, x^+)$ qui est satisfaite, avec $w^+ = x^-$. Puisque $\prec(l, m, n)$ est satisfaite, $\prec(x^+, w^+, n)$ est aussi satisfaite. Par **P4** nous déduisons que $\prec(w^+, x^+, w^-)$ et $\prec(w^+, n, x^+)$ sont satisfaites. De **P2** suit que $\prec(w^+, n, w^-)$ est satisfaite. Ainsi, par **P4**, nous obtenons la satisfaction de $\prec(w^-, w^+, n)$. Comme $w^+ = m$, $w|z$ est satisfaite.
- $\prec(y^-, x^+, y^+)$ est satisfaite. Ainsi, $\prec(l, x^+, w^+)$ est satisfaite. Comme $\prec(l, m, n)$ est satisfaite, $\prec(l, w^+, n)$ est aussi satisfaite. De **P4** suit que $\prec(w^+, n, l)$ et $\prec(w^+, l, x^+)$ sont satisfaites. De **P2** découle que $\prec(w^+, n, x^+)$ est satisfaite. Puisque $w|x$ est satisfaite, $\prec(w^-, w^+, x^+)$ est aussi satisfaite, avec $w^+ = x^-$. De **P4**, nous avons $\prec(w^+, x^+, w^-)$ qui est satisfaite. À partir de **P2**, nous déduisons que $\prec(w^+, n, w^-)$ est satisfaite. De **P4** découle que $\prec(w^-, w^+, n)$ est satisfaite. De plus, nous avons $w^+ = m$. Il résulte que $w|z$ est satisfaite.

Ainsi, $X(y, z, w, x)$ est satisfaite. De manière similaire nous pouvons prouver que $X(t, y, u, v)$ est satisfaite. En définissant y, z, t par $y = (m, l)$, $z = (l, o)$ et $t = (o, m)$, nous pouvons également prouver que $X(y, z, u, v)$ et $X(t, y, w, x)$ sont satisfaites.

⁴Par manque de place, les détails de cette partie de la preuve ont été omis.