Raisonnement Qualitatif sur des faits nuancés

A Qualitative Reasoning with Nuanced Statements

Mazen El-Sayed Daniel Pacholczyk

LERIA, U.F.R Sciences, Université d'Angers
2, Boulevard Lavoisier, 49045 ANGERS Cedex 01, France.
{elsayed,pacho}@univ-angers.fr

Résumé

Dans cet article, nous étudions le problème de traitement symbolique des faits nuancés dans les systèmes à base de connaissances. La gestion des faits nuancés comporte deux étapes : la représentation des faits et l'exploitation de ceux-ci. Nous avons présenté dans des précédents papiers un modèle de représentation des faits nuancés. Ce modèle présente une modélisation symbolique se basant sur la théorie des multi-ensembles. Dans ce papier, nous continuons la présentation de notre approche pour le traitement des faits nuancés et nous présentons des règles d'inférence pour raisonner sur ceux-ci. Nous nous intéressons en particulier à des règles de Modus Ponens Généralisée. Ces règles sont proposée dans une logique symbolique multivalente. Cette dernière fonde logiquement la théorie des multi-ensembles.

Abstract

We study knowledge-based systems using symbolic many-valued logic and multiset theory. In previous papers we have proposed a symbolic representation of nuanced statements like "John is very tall". In this representation, we have interpreted some nuances of natural language as linguistic modifiers and we have defined them within a multiset context. In this paper, we continue the presentation of our symbolic model and we propose new deduction rules dealing with nuanced statements. We limit ourselves to present new generalizations of the Modus Ponens rule and we study the form of graduality verified by these rules.

Keywords

Représentation des connaissances, logique multivalente, modificateurs linguistiques, raisonnement approximatif.

1 Introduction

Dans ce travail, nous nous intéressons au traitement qualitatif des faits nuancés comme "Paul est très intelligent" ou "Isabelle est vraiment belle". Les faits nuancés peuvent s'écrire sous la forme "x est m_α A" où m_α et A représentent respectivement une nuance et un terme vague du langage naturel.

Il existe principalement deux formalismes pour représenter les faits nuancés. Le premier se réfère à la théorie des ensembles flous [11] permettant de représenter les termes imprécis ou flous. Il s'agit des termes définis sur des échelles numériques comme "grand", "jeune" et "riche". Dans cette théorie, chaque terme imprécis est représenté par un ensemble flou. Les nuances m_α sont définis comme des modificateurs flous. Un modificateur flou est une application permettant, à partir d'un ensemble flou A d'engendrer un nouveau ensemble flou "m_α A ". Dans ce sens, le fait "x est m_α A" est interprété comme "x est (m_α A)" et ainsi considéré comme un fait de nature multivalente.

Le deuxième formalisme pour la représentation de l'imprécis se réfère à la théorie des *multi-ensembles* proposée par De Glas [4]. Cette théorie est une approche axiomatique de la théorie des ensembles flous. Elle permet de représenter symboliquement les termes imprécis et cela indépendamment des types de leurs domaines de discours. Ainsi, on manipule de la même façon les termes *abstraits* et les termes faisant référence à des échelles numériques. L'interprétation des faits nuancés par De Glas est radicalement différente de celle de Zadeh. En effet, il considère que les nuances sont des pondérations du verbe être. En d'autres termes, le fait "x est m_α A" est interprété comme "x (est m_α) A" ce qui signifie que x satisfait le terme A à un degré m_α. Dans ce sens, le fait "x est m_α A" est de nature booléenne. Ainsi, dans la théorie des multi-ensembles, les nuances m_α sont interprétées

comme des degrés d'appartenance linguistiques.

Cette interprétation des nuances nous semble un peu restreinte. En effet, nous pensons que l'interprétation d'une nuance dépend du sens et de la sémantique de celle-ci. Ainsi, nous supposons que certaines nuances doivent être interprétées comme des degrès linguistiques alors que d'autres nuances doivent être interprétées comme des modificateurs linguistiques. En partant de cette idée, nous avans proposé dans des précédents papiers [7, 8] un modèle de représentation des faits nuancés. Dans ce modèle, nous avons défini les nuances comme des modificateurs linguistiques dans un contexte multi-ensembliste.

Dans ce papier, nous présentons des nouvelles règles d'inférence pour raisonner sur des faits nuancés. Nous nous intéressons à des généralisations de la règle de Modus Ponens. Ainsi, nous proposons des nouvelles règles de *Modus Ponens Généralisé* (MPG) dans un contexte symbolique. Notons que la première règle de Modus Ponens Généralisée a été proposée par Zadeh [12] et étudiée par des nombreux chercheurs [1, 3, 9] :

Règle	:	si "X est A" alors "Y est B"
Fait	:	"X est $A^{'}$"
Conclusion	:	"Y est $B^{'}$"

Où X et Y sont des variables floues et A, B, $A^{'}$ et $B^{'}$ sont des concepts flous.

Cet article est organisé comme suit. Dans la section suivante, nous présentons brièvement quelques éléments de base de la logique multivalente dans laquelle nous travaillons. Dans la section 3, nous rappellons brièvement le modèle de représentation des faits nuancés précédemment présenté. Dans la section 4, nous abordons le problème d'exploitation des connaissances et nous proposons des nouvelles *généralisations de la règle de Modus Ponens* dans lesquelles nous utilisons uniquement des faits simples. Dans la section 5, nous proposons des règles de Modus Ponens Généralisée dans des situations plus complexes et notamment lorsque les faits sont des faits multiples. Finalement, nous abordons le problème de gradualité d'inférence et nous étudions les formes de gradualité vérifiées par nos règles d'inférence.

2 Logique symbolique multivalente

Cette logique suppose que les différents degrés de vérité symboliques font partie d'une liste ordonnée $\mathcal{L}_M = \{\tau_\alpha, \alpha \in [1,M]\}$. Cet ensemble est muni de la relation d'ordre total : $\tau_\alpha \leq \tau_\beta \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$, et dont le plus petit élément est τ_1 et le plus grand élément est τ_M. Nous pouvons alors définir dans $\mathcal{L}_M$ deux opérateurs $\wedge$ et $\vee$ et une involution décroissante $\sim$ comme suit : $\tau_\alpha \vee \tau_\beta = \tau_{max(\alpha,\beta)}$, $\tau_\alpha \wedge \tau_\beta = \tau_{min(\alpha,\beta)}$ et $\sim \tau_\alpha = \tau_{M+1-\alpha}$. On obtient alors une chaîne $\{\mathcal{L}_M, \vee, \wedge, \leq\}$ possédant la structure de treillis de De Morgan [10]. On pourra définir dans cette chaîne un opérateur d'implication $\rightarrow$ et une T-norme T. On utilise très souvent l'implication de Lukasiewicz [10]. C'est pourquoi, nous l'adoptons ainsi que sa T-norme associée. Elles sont définies respectivement par $\{\ \tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta = \tau_M\ si\ \alpha \leq \beta$ et $\tau_\alpha \rightarrow \tau_\beta = \tau_{M-\alpha+\beta}\ sinon\}$ et $\{T(\tau_\alpha,\tau_\beta) = \tau_1\ si\ \alpha+\beta \leq M+1$ et $T(\tau_\alpha,\tau_\beta) = \tau_{\alpha+\beta-M}\ sinon\}$.

Exemple 1 *Pour M=9, on peut introduire l'ensemble de degrés symboliques suivant :* $\mathcal{L}_9$ = {*Pas-du-tout, peu, relativement-peu, plutôt-peu, moyennement, plutôt, relativement, presque, tout-à-fait*}

Dans la logique que nous utilisons, une généralisation du critère de Tarski a été posée sous forme d'un axiome de la manière suivante [10] :

"x est m_α A" est vraie $\Leftrightarrow$ "x est A" est τ_α-vraie
$\Leftrightarrow$ "x est m_α A"

Dans la suite de cet article, nous étudions la gestion des faits nuancés par des modificateurs linguistiques. Pour la suite, nous supposons que nous disposons de deux ensembles de nuances : un ensemble ordonné de degrés de vérité linguistiques $\mathcal{L}_M$ et un ensemble de modificateurs linguistiques. Nous supposons que la nuance m_α dans le fait "x est m_α A" désigne un modificateur linguistique.

3 Représentation des faits nuancés

Dans cette section, nous présentons brièvement notre contribution pour la représentation des faits nuancés. Celle-ci a été présentée dans [7, 8]. La représentation des faits nuancés se déroule en deux étapes : (1) proposer une représentation multi-ensembliste des terms imprécis et (2) définir des modificateurs linguistiques en se basant sur cette représentation.

Pour représenter les termes imprécis nous nous sommes inspirés de la theorie des ensembles flous. L'idée de base de notre méthode est d'associer à chaque terme imprécis un concept représentant un équivalent multi-ensembliste de la fonction d'appartenance dans la théorie des ensembles flous. Ce nouveau concept, appelé *"réglette"*, joue le même rôle que la fonction d'appartenance. Il sert notamment à : (1) montrer la gradualité d'appartenance aux multi-ensembles et (2) montrer certaines propriétés associées à un terme imprécis telles que la précision et le caractère flou ou imprécis de ce terme. Pour définir la géométrie d'une *"réglette"* nous nous sommes inspirés de celle des fonctions d'appartenance de type L-R et nous avons emprunté quelques notions définies pour un ensemble flou tels que le noyau, le support et la partie floue. Ces notions ont été redéfinies dans un contexte

multi-ensembliste.

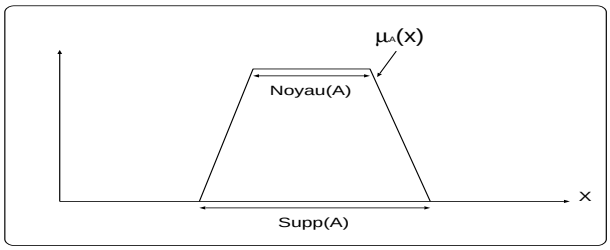

Figure 1 : Fonction d'appartenance de type L-R

Dans cette représentation, nous supposons que le domaine X d'un multi-ensemble est un ensemble quelconque d'objets. Nous représentons le support d'un multi-ensemble P_i par une *"réglette"* désignant un sous-ensemble du domaine X (Cf. figure 2). Nous supposons que cette "réglette" est la réunion de trois sous-ensembles disjoints : *la partie floue gauche*, *la partie floue droite* et *le noyau* et qui sont notés respectivement G_i, D_i et N_i. G_i et D_i contiennent les éléments appartenant à P_i à des degrés appartenant à l'intervalle $[\tau_2,\tau_{M-1}]$; N_i contient les éléments appartenant à P_i au degré τ_M et se situe entre G_i et D_i. Nous supposons aussi que chacune des parties floues G_i et D_i est divisée en $M-2$ sous-ensembles $([G_i]_\alpha)_{\alpha\in[2,M-1]}$ et $([D_i]_\alpha)_{\alpha\in[2,M-1]}$ dont chacun regroupe les éléments appartenant à P_i au même degré (τ_α). Ces sous-ensembles sont placés de façon que, plus α est grand, plus les ensembles $[G_i]_\alpha$ et $[D_i]_\alpha$ sont proches du noyau N_i. Cela peut être interprété comme suit : les éléments du noyau d'une terme représentent les éléments typiques de ce terme, et plus un objet s'éloigne du noyau, moins il vérifie le terme. Finalement, nous notons que chaque multi-ensemble P_i est défini par le triplet (G_i,N_i,D_i) à qui nous associons un ensemble de paramètres symboliques. Ces paramètres servent à déterminer la position de la *"réglette"* et les tailles des différentes parties la constituant.

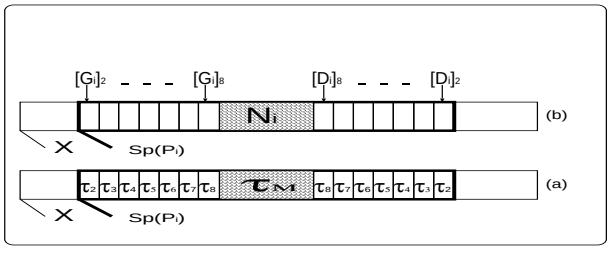

Figure 2 : Représentation en *"réglette"*

3.1 Modificateurs linguistiques

En utilisant les *"réglettes"*, nous définissons les modificateurs linguistiques dans un contexte multi-ensembliste. Un modificateur linguistique est définie comme étant une application qui à partir d'un multi-ensemble donne un nouveau multi-ensemble. Nous nous intéressons à deux types de modificateurs : les modificateurs de précision et les modificateurs de translation. Ces modificateurs sont inspirés de ceux définis dans un contexte flous [3].

3.1.1 Modificateurs de précision

Ce sont des modificateurs qui modifient la précision du terme de base sur lequel ils portent. Plus précisément, ils engendrent des nouvaux termes par une simple opération de contraction ou de dilatation simultanément sur le support et le noyau. Nous distinguons deux types de modificateurs de précision : les modificateurs de contraction qui contractent simultanément le noyau et le support, et les modificateurs de dilatation qui les dilatent. Pour déterminer l'amplitude de la modification (contraction ou dilatation) pour un modificateur de précision *m* nous introduisons un nouveau paramètre, noté τ_γ. Nous proposons maintenant deux définitions pour ces deux types de modificateurs.

Définition 1 *m est dit modificateur de τ_γ-contraction si, et seulement s'il est défini comme suit :*

1. *si $P_i = (G_i,N_i,D_i)$ alors $mP_i = (G_i^{'},N_i^{'},D_i^{'})$ avec $G_i^{'} \trianglelefteq_M G_i$ [1] et $D_i^{'} \trianglelefteq_M D_i$*
2. *$\forall x,x \in_\alpha P_i$ avec $\tau_\alpha < \tau_M \Rightarrow x \in_\beta mP_i$ telle que $\beta = max(1,\alpha-\gamma+1)$*

Définition 2 *On dira qu'un modificateur m est de τ_γ-dilatation si, et seulement s'il est défini comme suit :*

1. *si $P_i = (G_i,N_i,D_i)$ alors $mP_i = (G_i^{'},N_i^{'},D_i^{'})$ avec $G_i^{'} \trianglelefteq_M G_i$ et $D_i^{'} \trianglelefteq_M D_i$*
2. *$\forall x,x \in_\alpha P_i$ avec $\tau_\alpha > \tau_1 \Rightarrow x \in_\beta mP_i$ telle que $\beta = min(M,\gamma+\alpha-1)$*

Dans notre application, nous nous limitons à un ensemble de 6 modificateurs de précision, noté $\mathbb{M}_6 = \{m_k \mid k \in [1..6]\} = \{$Exactement, vraiment, $\emptyset$, plus ou moins, environ, vaguement$\}$, pour lequel existe la relation d'ordre total suivante : $j \leq k \Leftrightarrow m_j \leq m_k \Leftrightarrow m_jP_i \subset m_kP_i$. $\mathbb{M}_6$ comporte un modificateur par défaut, noté $\emptyset$, qui garde le multi-ensemble de base inchangé. Les modificateurs suivant $\emptyset$ sont des modificateurs de dilatation et ceux le précédant sont des modificateurs de contraction.

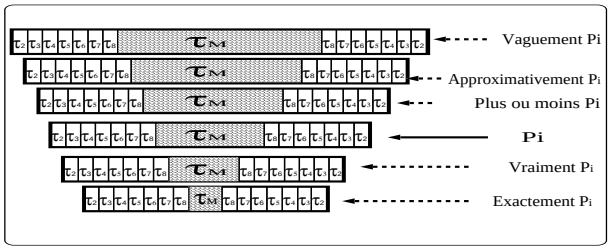

Figure 3 : Modificateurs de précision

1. $\trianglelefteq$ est une relation qui sert à déterminer le rapport de cardinalités de deux sous-ensembles classiques. Par exemple, $G_i^{'} \trianglelefteq_M G_i$ signifie que $G_i^{'}$ et G_i ont la même taille.

3.1.2 Modificateurs de translation

Nous utilisons un ensemble de 9 modificateurs de translation, $\mathbb{T}_9 = \{t_k \mid k \in [1..9]\}$ = {extrêmement peu, très très peu, très peu, assez peu, $\emptyset$, assez, très, très très, extrêmement} muni de la relation d'ordre total suivante : $k \leq l \iff t_k \leq t_l$. Ces modificateurs sont définis de façon que les multi-ensembles modifiés $t_k P_i$ couvrent le domaine X.

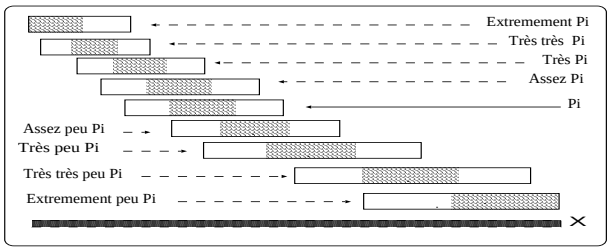

Figure 4 : Modificateurs de translation

4 Exploitation des faits nuancés

Dans cette section, nous abordons le problème de l'exploitation des connaissances imprécises. En particulier, nous nous intéressons à des généralisations de la règle de modus ponens dans le cadre d'une logique multivalente finie [10]. Nous rappelons que la règle de Modus Ponens classique s'écrit comme suit : si l'on sait que {*si "x est A" alors "y est B" est vraie* et *"x est* A*" est vraie*} on peut déduire que "y est B" est vraie. Une généralisation de cette règle dans un contexte multivalué peut avoir une de deux formes :

F1- Si l'on sait que {*si "x est A" alors "y est B" est* τ_β*-vraie* et *"x est* A'*" est* τ_ϵ*-vraie*} et que {A' est plus ou moins proche de A}, que peut-on déduire pour "y est B", en d'autres termes, à quel degré "y est B" est vraie?

F2- Si l'on sait que {*si "x est A" alors "y est B" est* τ_β*-vraie* et *"x est* A'*" est* τ_ϵ*-vraie*} et que {A' est plus ou moins proche de A}, peut-on trouver un B' telle que {B' est plus ou moins proche de B} et à quel degré "y est B'" est vraie?

Une première version de la règle de Modus Ponens Généralisé (MPG) dans un contexte multivalué a été proposée par Pacholczyk [10]. Dans cette version, le concept "proximité" liant les multi-ensembles A et A' est modélisé par une *relation de similarité* qui est une relation *réflexive, symétrique et faiblement transitive*. Cette relation représente une généralisation de la relation d'équivalence classique dans le cadre d'une logique multivalente finie. Cette règle de MPG permet de déduire une conclusion dans le cas où A' est τ_α-similaire à A. Toutefois, cette version présente l'inconvénient suivant : si A' représente un cas particulier de A ($A' \subset A$) mais A' est faiblement similaire à A, alors cette version ne peut rien donner comme résultat ou celui-ci n'est pas aussi précis qu'on attend. Par exemple, à partir d'une règle *si "x est grand" alors "son poids est important"* et d'une observation *"Pascal est vraiment très grand"*, on ne peut rien déduire sur le poids de Pascal. Néanmoins, dans ce cas on s'attend plutôt à une réponse comme *"le poids de Pascal est important"* ou *"le poids de Pascal est vraiment très important"*. Nous constatons que la relation de similarité n'est pas suffisante pour bien modéliser le lien entre A et A'. C'est pourquoi, nous allons ajouter une nouvelle relation dont le role est de modéliser la proximité entre A et A' lorsque A' est plus précis que A. En d'autres termes, sachant que $A' \subset A$ le role de cette relation est de déterminer à quelle degré A' est inclus dans A.

4.1 Première version de MPG

Dans la suite, nous rappelons la définition et quelques propriétés de la relation de similarité. Ensuite nous proposons la définition de la nouvelle relation que nous appelons *"relation de proximité"*.

Définition 3 *Soient A et B deux multi-ensembles. On dira que A est* τ_α*-similaire à B, notée A* $\approx_\alpha$ *B, si et seulement si* $\{\forall x | x \in_\gamma A$ *et* $x \in_\beta B \Rightarrow min\{\tau_\gamma \rightarrow \tau_\beta, \tau_\beta \rightarrow \tau_\gamma\} \geq \tau_\alpha\}$.

Cette relation généralise la relation d'équivalence dans un contexte multivalué. C'est une relation (1) reflexive : $A \approx_M A$, (2) symétrique : $A \approx_\alpha B \Leftrightarrow B \approx_\alpha A$, et (3) "faiblement transitive" : $\{A \approx_\alpha B, B \approx_\beta C\} \Rightarrow A \approx_\gamma C$ avec $\tau_\gamma \geq T(\tau_\alpha, \tau_\beta)$ où T est une T-norme.

Définition 4 *Soient A et B deux multi-ensembles telle que* $A \subset B$*. On dira que A est* τ_α*-prohe de B, notée A* $\sqsubset_\alpha$ *B, si et seulement si* $\{\forall x \in$ *F(B),* $x \in_\gamma A$ *et* $x \in_\beta B \Rightarrow \tau_\alpha \rightarrow \tau_\gamma \leq \tau_\beta\}$.

Cette relation vérifie les propriétés suivantes : (1) Reflexivité : $A \sqsubset_M A$, et (2) transitivité faible : $A \sqsubset_\alpha B$ et $B \sqsubset_\beta C \Rightarrow A \sqsubset_\gamma C$ avec $\tau_\gamma \leq min(\tau_\alpha, \tau_\beta)$. Dans la relation $A \sqsubset_\alpha B$, plus la valeur α est petite, plus A est inclus dans B.

Finalement, en utilisant les relations de similarité et de proximité multi-ensemblistes nous allons proposer notre première généralisation de la règle de Modus Ponens.

Proposition 1 *Moyennant les hypothèses suivantes :*

1. *si "x est A" alors "y est B" est* τ_β*-vraie*
2. *"x est* A'*" est* τ_ϵ*-vraie avec* $A' \approx_\alpha A$.

Alors, nous déduisons : "y est B" est τ_δ*-vraie avec* $\tau_\delta = T(\tau_\beta, T(\tau_\alpha, \tau_\epsilon))$*. Si le prédicat* A' *est telle que* $A' \sqsubset_{\alpha'} A$*, nous déduisons : "y est B" est* τ_δ*-vraie avec* $\tau_\delta = T(\tau_\beta, \tau_{\alpha'} \longrightarrow \tau_\epsilon)$.

Exemple 2 *Etant donné que "vraiment très grand"* $\approx_2$ *"grand" et "vraiment très grand"* $\sqsubset_2$ *"grand", à partir de la règle et le fait suivants :*
- si "x est grand" alors "son poids est important" est

vraie,
- "Pascal est vraiment très grand" est plutôt-vraie,
nous déduisons : "le poids de Pascal est important" est vraie.

4.2 MPG utilisant les modificateurs de précision

Nous avons proposé une règle de Modus Ponens généralisé permettant de déterminer le degré de vérité de la conclusion de la règle en fonction de celle de l'observation, de celle de la règle et de la proximité existant entre les deux prédicats de l'observation ($A^{'}$) et de la prémisse de la règle (A). Nous proposons maintenant deux règles de Modus Ponens généralisé dans lesquelles nous construisons un $B^{'}$ plus ou moins similaire à B. Nous construisons le prédicat $B^{'}$ en utilisant des modificateurs de précision définis dans la section précédente. La première règle suppose que les prédicats A et $A^{'}$ sont plus ou moins similaires. En d'autres termes, $A^{'}$ pourra être moins précis ou plus precis que A. La deuxième règle suppose que $A^{'}$ est plus precis que A.

Proposition 2 *Moyennant les hypothèses suivantes:*

1. *si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*
2. *"x est $A^{'}$" est τ_ϵ-vraie avec $A^{'} \approx_\alpha A$.*

Soit $\tau_\theta = T(\tau_\beta, T(\tau_\alpha, \tau_\epsilon))$. Si $\tau_\theta > \tau_1$ alors il existe un modificateur de $\tau_{n(\delta)}-$dilatation m, avec $\tau_\delta \leq T(\tau_\alpha, \tau_\beta)$, telle que : "y est mB" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie et $\tau_{\epsilon'} = \tau_\delta \rightarrow \tau_\theta$.
En outre, on a : $B \subset mB$ et $mB \approx_\delta B$.

En d'autres termes, si $A^{'}$ est $\tau_\alpha-$similaire à A, nous obtenons une conclusion dont le prédicat $B^{'}$ est tels que (1) $B^{'}$ est moins précis que B et (2) $B^{'}$ est plus ou moins similaire à B. Plus précisément, ce prédicat n'est autre que le prédicat B modifié par un modificateur de dilatation.

Proposition 3 *Moyennant les hypothèses suivantes:*

1. *si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*
2. *"x est $A^{'}$" est τ_ϵ-vraie avec $A^{'} \sqsubset_\alpha A$.*

Soit $\tau_\theta = T(\tau_\beta, \tau_\alpha \rightarrow \tau_\epsilon)$. Si $\tau_\theta > \tau_1$ alors il existe un modificateur de $\tau_{n(\delta)}-$contraction m, avec $\tau_\delta \geq \tau_\beta \rightarrow \tau_\alpha$, telle que : "y est mB" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie et $\tau_{\epsilon'} = T(\tau_\delta, \tau_\theta)$.
En outre, on a : $mB \sqsubset_\delta B$.

En d'autres termes, si le prédicat de l'observation est plus précis que A, nous pouvons déduire une conclusion dont le prédicat est plus précis que B. Ce prédicat n'est autre que le prédicat B modifié par un modificateur de contraction. Les propositions (2 et 3) présentent deux cas generaux dans lesquelles nous supposons que A' est un prédicat arbitraire. Nous présentons maintenant deux corollaires représentant des cas particuliers des propositions 2 et 3 dans lesquelles nous supposons que les règles sont tout à fait vraies et que A' est obtenu à partir de A en utilisant des modificateurs de precision.

Corollaire 1 *Soient la règle et le fait suivants :*

1. *si "x est A" alors "y est B" est vraie*
2. *"x est $m_k A$" est τ_ϵ-vraie où m_k est un modificateur de $\tau_{\gamma_k}-$dilatation.*

Si $T(\sim \tau_{\gamma_k}, \tau_\epsilon) > \tau_1$ alors nous déduisons : "y est $m_k B$" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie avec $\tau_{\epsilon'} = \sim \tau_{\gamma_k} \rightarrow T(\sim \tau_{\gamma_k}, \tau_\epsilon)$.

Exemple 3 *Soient la règle et le fait suivants :*
- si "x est grand" alors "son poids est important" est vraie,
- "Jo est plus ou moins grand" est moyennement-vraie,
alors, nous déduisons :
"le poids de Jo est plus ou moins important" est moyennement-vraie.

Corollaire 2 *Soient la règle et le fait suivants :*

1. *si "x est A" alors "y est B" est vraie*
2. *"x est $m_k A$" est τ_ϵ-vraie où m_k est un modificateur de $\tau_{\gamma_k}-$contraction,*

alors, nous déduisons : "y est $m_k B$" est τ_ϵ-vraie.

4.3 Autres règles d'inférence

Dans le paragraphe précédent, nous avons proposé des règles de Modus Ponens Généralisé. Dans ce paragraphe, nous étudions un problème un peu différent. La question est de pouvoir intérroger le système à base des connaissances sur la vérité d'un fait nuancé par rapport aux faits et aux règles de cette base. Si l'on suppose que la base des connaissances contient une règle et un fait, alors le problème peut être formulé comme suit : si l'on a la règle {*si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*} et le fait {*"x est $A^{'}$" est τ_ϵ-vraie*} avec $A^{'}$ est plus ou moins proche de A alors que peut-on déduire sur la vérité du fait "y est $B^{'}$" sachant que l'on sait que $B^{'}$ est plus ou moins proche de B.
Nous présentons ci-dessous deux règles d'inférence pour modéliser ce problème. La première suppose que les prédicats A et $A^{'}$ sont plus ou moins similaires. La deuxième suppose que le prédicat $A^{'}$ est plus précis que le prédicat A.

Proposition 4 *Moyennant les hypothèses suivantes :*

1. *si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*
2. *"x est $A^{'}$" est τ_ϵ-vraie avec $A^{'} \approx_\alpha A$.*

Soit $\tau_\theta = T(\tau_\beta, T(\tau_\alpha, \tau_\epsilon))$. Si $\tau_\theta > \tau_1$ et s'il existe un prédicat $B^{'}$ telle que $B^{'} \approx_\delta B$, alors nous déduisons : "y est $B^{'}$" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie et $\tau_{\epsilon'} = T(\tau_\delta, \tau_\theta)$.
Si le prédicat $B^{'}$ est telle que $B \sqsubset_{\delta'} B^{'}$, nous déduisons : "y est $B^{'}$" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie avec $\tau_{\epsilon'} = \tau_{\delta'} \longrightarrow \tau_\theta$.

Proposition 5 *Moyennant les hypothèses suivantes :*

1. *si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*
2. *"x est $A^{'}$" est τ_ϵ-vraie avec $A^{'} \sqsubset_\alpha A$.*

Soit $\tau_\theta = T(\tau_\beta,\tau_\alpha \longrightarrow \tau_\epsilon)$. Si $\tau_\theta > \tau_1$ et s'il existe un prédicat $B^{'}$ telle que $B^{'} \approx_\delta B$, alors nous déduisons : "y est $B^{'}$" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie avec $\tau_{\epsilon'} = T(\tau_\delta,\tau_\theta)$.
Si le prédicat $B^{'}$ est telle que $B \sqsubset_{\delta'} B^{'}$, nous déduisons : "y est $B^{'}$" est $\tau_{\epsilon'}$-vraie avec $\tau_{\epsilon'} = \tau_{\delta'} \longrightarrow \tau_\theta$.

Exemple 4 *Supposons que l'on a "très important" $\sqsubset_6$ "important", "vraiment grand" $\approx_8$ "grand" et "vraiment grand" $\sqsubset_8$ "grand", et supposons que la base de connaissances contient la règle et le fait suivants :*
- si "x est grand" alors "son poids est important" est vraie,
- "Jo est vraiment grand" est plutôt-vraie.
Alors, nous voulons savoir le degré de vérité du fait "le poids de Jo est très important". En appliquant la proposition 5, nous pouvons déduire :
"le poids de Jo est très important" est plutôt-peu-vraie.

5 Raisonnement dans des cas plus complexes

Dans cette section, nous étudions des généralisations de la règle de Modus Ponens dans des cas plus complexes. Il s'agit des cas suivants :

- Lorsque la prémisse de la règle est un fait multiple (conjonction ou disjonction des faits simples).
- En présence du chaînage d'inférences. Dans de telles situations, nous disposons (1) d'une série de n règles dont la conclusion de l'une est définie sur le même domaine que la prémisse de la règle suivante et (2) d'une observation définie sur le domaine de la prémisse de la première règle de cette série. Nous étudions un cas particulier du chaînage d'inférences. Il s'agit du cas où la conclusion d'une règle est identique à la prémisse de la règle qui la suit.
- Dans le cas où l'on dispose de plusieurs règles parallèles ayant la même conclusion. Dans ce cas, une combinaison des conclusions est indispensable. Il s'agit de combiner les degrés de vérité des conclusions obtenues.

Proposition 6 (La prémisse est une conjonction)
Moyennant les hypothèses suivantes :

1. *Si "x_1 est A_1" Et ... Et "x_n est A_n" alors "y est B" est τ_β-vraie,*
2. *pour $i = 1..n$, "x_i est $A_i^{'}$" est τ_{ϵ_i}-vraie,*
3. *pour $i = 1..n$, $A_i \approx_{\alpha_i} A_i^{'}$.*

Alors, nous déduisons : "y est B" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = T(\tau_\beta,T(\tau_{\alpha_1},\tau_{\epsilon_1})) \wedge ... \wedge T(\tau_\beta,T(\tau_{\alpha_n},\tau_{\epsilon_n}))$.
Si pour i = j .. k, les prédicats $A_i^{'}$ sont tels que $A_i^{'} \sqsubset_{\alpha_i'} A_i$, nous déduisons : "y est B" is τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = \tau_{\delta_1} \wedge ... \wedge \tau_{\delta_n}$ et $\tau_{\delta_i} = T(\tau_{\alpha_i'} \longrightarrow \tau_{\epsilon_i},\tau_\beta)$ si $i \in [j,k]$ et $\tau_{\delta_i} = T(\tau_\beta,T(\tau_{\alpha_i},\tau_{\epsilon_i}))$ sinon.

Proposition 7 (La prémisse est une disjonction)
Moyennant les hypothèses suivantes :

1. *Si "x_1 est A_1" Ou ... Ou "x_n est A_n" alors "y est B" est τ_β-vraie,*
2. *pour $i = 1..k$, "x_i est $A_i^{'}$" est τ_{ϵ_i}-vraie,*
3. *pour $i = 1..k$, $A_i \approx_{\alpha_i} A_i^{'}$.*

Alors, nous déduisons : "y est B" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = T(\tau_\beta,T(\tau_{\alpha_1},\tau_{\epsilon_1})) \vee ... \vee T(\tau_\beta,T(\tau_{\alpha_k},\tau_{\epsilon_k}))$.
Si pour i = j .. L, les prédicats $A_i^{'}$ sont tels que $A_i^{'} \sqsubset_{\alpha_i'} A_i$, nous déduisons : "y is B" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = \tau_{\delta_1} \vee ... \vee \tau_{\delta_k}$ et $\tau_{\delta_i} = T(\tau_{\alpha_i'} \longrightarrow \tau_{\epsilon_i},\tau_\beta)$ si $i \in [j,L]$ et $\tau_{\delta_i} = T(\tau_\beta,T(\tau_{\alpha_i},\tau_{\epsilon_i}))$ sinon.

Proposition 8 (Chaînage d'inferences) *Moyennant les hypothèses suivantes :*

1. *Si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie,*
2. *si "y est B" alors "z est C" est τ_γ-vraie,*
3. *il existe $\tau_\epsilon > \tau_1$ telle que "x est $A^{'}$" est τ_ϵ-vraie,*
4. *il existe τ_α telle que $A \approx_\alpha A^{'}$.*

Alors, nous déduisons : "z est C" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = T(T(\tau_\beta,\tau_\gamma),T(\tau_\alpha,\tau_\epsilon))$. Si le prédicat $A^{'}$ est telle que $A^{'} \sqsubset_{\alpha'} A$, alors nous déduisons : "z est C" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = T(T(\tau_\beta,\tau_\gamma),\tau_{\alpha'} \longrightarrow \tau_\epsilon)$.

Proposition 9 (Combinaison des conclusions)
Moyennant les hypothèses suivantes :

1. *pour $i = 1..n$, si "x_i est A_i" alors "y est B" est τ_{β_i}-vraie,*
2. *pour $i = 1..n$, "x_i est $A_i^{'}$" est τ_{ϵ_i}-vraie,*
3. *pour $i = 1..n$, $A_i \approx_{\alpha_i} A_i^{'}$.*

Alors, nous déduisons : "y est B" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = T(\tau_{\beta_1},T(\tau_{\alpha_1},\tau_{\epsilon_1})) \vee ... \vee T(\tau_{\beta_n},T(\tau_{\alpha_n},\tau_{\epsilon_n}))$. Si pour i = j .. k, les prédicats $A_i^{'}$ sont tels que $A_i^{'} \sqsubset_{\alpha_i'} A_i$, alors "y est B" est τ_δ-vraie avec $\tau_\delta = \tau_{\delta_1} \vee ... \vee \tau_{\delta_n}$ et $\tau_{\delta_i} = T(\tau_{\alpha_i'} \longrightarrow \tau_{\epsilon_i},\tau_{\beta_i})$ si $i \in [j,k]$ et $\tau_{\delta_i} = T(\tau_{\beta_i},T(\tau_{\alpha_i},\tau_{\epsilon_i}))$ sinon.

Nous présentons ci-dessous un exemple dans lequel nous utilisons les règles de Modus Ponens Généralisé que nous avons présenté dans ce papier. Nous utilisons un fiche médical écrit par un médecin après son consultation. Donc, à partir d'un fiche médical et de certaines règles (R_j) nous voulons déduire des diagnostics pour un patient.

Exemple 5 *Supposons que l'on a les règles suivantes :*

R_1- *"Si la température est élevée alors le patient est malade" est presque-vraie,*

R_2- *"Si la température est élevée et la couleur du tympan est très rouge alors la maladie est une otite" est tout-à-fait-vraie,*

R_3- *"Si la consommation de matière grasse est importante alors le risque de cholestérol est élevé" est presque-vraie,*

R_4- *"Si le risque de cholestérol est élevé alors un régime sans grasse est recommandé" est tout-à-fait-vraie.*

R_5- *"Si la tension est souvent élevée alors le patient est malade" est presque-vraie.*

Supposons que l'on a un patient dont le fiche médical contient les informations suivantes :

F_1- *"la température est élevée" est tout-à-fait-vraie,*

F_2- *"la couleur du tympan est vraiment très rouge" est plutôt-vraie,*

F_3- *"la consommation de matière grasse est plus ou moins importante" est relativement-vraie,*

F_4- *"la tension est souvent plus ou moins élevée" est relativement-vraie.*

En utilisant les règles d'infèrence précédemment présentées nous pouvons déduire les diagnostics suivants :

D_1- *"le patient est malade" est presque-vraie,*

D_2- *"la maladie est une otite" est tout-à-fait-vraie,*

D_3- *"le risque de cholestérol est élevé" est moyennement-vraie,*

D_4- *"un régime sans grasse est recommandé" est moyennement-vraie.*

Les diagnostics (D_1 - D_4) sont obtenus comme suit :

- *D_1 est obtenu par appliquer la proposition 9 à F_1 et (R_1,R_5)*
- *D_2 est obtenu par appliquer la proposition 6 à (F_1,F_2) et R_2,*
- *D_3 est obtenu par appliquer la proposition 1 à F_3 et R_3,*
- *D_4 est obtenu par appliquer la proposition 8 à F_3 et (R_3,R_4).*

6 Gradualité de l'inférence

Dans cette section, nous étudions le problème de gardualité de l'inférence. Nous distinguons plusieurs types de gradualité. Dans ce papier, nous étudions deux types, à savoir, la gardualité par rapport (1) aux degrés de vérité et (2) à l'inclusion multi-ensembliste.

Nous étudions dans la suite les formes de gradualité vérifiées par nos règles de Modus Ponens Généralisé présentées dans la section 4. La proposition suivante montre la règle graduelle vérifiée par la règle de Modus Ponens Généralisé dans la proposition 1.

Proposition 10 *Moyennant les hypothèses suivantes:*

1. *Si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*
2. *"x est $A^{'}$" est τ_{ϵ_1}-vraie,*

alors, nous déduisons : "y est B" est $\tau_{\epsilon_1^{'}}$-vraie.
Si l'on a :"x est $A^{''}$" est τ_{ϵ_2}-vraie telle que :

$$\{A^{''} \subset A^{'} \text{ et } \tau_{\epsilon_2} \geq \tau_{\epsilon_1}\},$$

nous déduisons : "y est B" est $\tau_{\epsilon_2^{'}}$-vraie avec $\tau_{\epsilon_2^{'}} \geq \tau_{\epsilon_1^{'}}$.

En d'autres termes, nous avons la règle graduelle suivante :

- *<u>plus (moins)</u> la proposition "x est $A^{'}$" est vraie et <u>plus (moins)</u> $A^{'}$ est inclus dans A ($A^{'} \subset A$), <u>plus (moins)</u> la proposition "y est B" est vraie.*

La proposition suivante montre la gradualité vérifiée par les règles de Modus Ponens Généralisé dans les propositions 2 et 3.

Proposition 11 *Moyennant les hypothèses suivantes:*

1. *Si "x est A" alors "y est B" est τ_β-vraie*
2. *"x est $A^{'}$" est τ_{ϵ_1}-vraie,*

alors, il existe un modificateur de précision m_1 telle que : "y est m_1B" est $\tau_{\epsilon_1^{'}}$-vraie.
Si l'on a : "x est $A^{''}$" est τ_{ϵ_2}-vraie telle que :

$$\{A^{''} \subset A^{'} \text{ et } \tau_{\epsilon_2} \geq \tau_{\epsilon_1}\},$$

alors on peut trouver un modificateur de précision m_2 telle que : "y est m_2B" est $\tau_{\epsilon_2^{'}}$-vraie, avec :

$$\{m_2B \subset m_1B \text{ et } \tau_{\epsilon_2^{'}} \geq \tau_{\epsilon_1^{'}}\}.$$

Cette proposition est valide dans les cas où $A \subset A^{''} \subset A^{'}$ ou $A^{''} \subset A^{'} \subset A$. Dans le premier cas, nous avons la règle graduelle suivante et qui est vérifiée par la règle d'inférence dans la proposition 2 :

- *<u>plus</u> la proposition "x est $A^{'}$" est vraie et <u>moins</u> $A^{'}$ est inclus dans A (i.e. plus A est inclus dans $A^{'}$), <u>moins</u> la proposition "y est mB" est vraie et <u>moins</u> mB est inclus dans B.*

Dans le cas où $A^{''} \subset A^{'} \subset A$, nous avons la règle graduelle suivante et qui est vérifiée par la règle d'inférence dans la proposition 3:

- *<u>plus</u> la proposition "x est $A^{'}$" est vraie et <u>plus</u> $A^{'}$ est inclus dans A, <u>plus</u> la proposition "y est mB" est vraie et <u>plus</u> mB est inclus dans B.*

7 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé un modèle symbolique pour la gestion des faits nuancés. Dans un premier temps nous avons rappeler brièvement notre représentation symbolique pour les faits nuancés que nous avons proposé précédemment. Dans cette représentation, nous avons introduit un équivalent multi-ensembliste pour la fonction d'appartenance dans un contexte flou. Nous avons également défini des modificateurs linguistiques dans un contexte multi-ensembliste. Dans un deuxième temps, nous avons étudié le problème de l'exploitation des faits nuancés. Nous avons présenté des généralisations de la règle de Modus Ponens. Ces généralisations permettent de raisonner sur des faits nuancés qu'ils soient simples ou multiples. Finalement, nous avons étudié le problème de gradualité de l'inférence en insistant sur deux types de gradualité. Signalons enfin que nous envisageons de généraliser notre modèle de raisonnement afin de raisonner sur des règles graduelles comme *"plus la tomate est rouge, plus elle est mûre"*.

Références

[1] J. F. Baldwin. A new approach to approximate reasoning using fuzzy logic. *Fuzzy sets and systems*, 2:309 – 325, 1979.

[2] B. Bouchon-Meunier et L. Valverde. A ressemblance approach to analogical reasoning function. *Lecture notes in computer science*, 1188:266–272, 1997.

[3] B. Bouchon-Meunier et J. Yao. Linguistic modifiers and imprecise categories. *Int. J. of intelligent systems*, 7:25–36, 1992.

[4] M. De-glas. Knowledge representation in fuzzy setting. Technical Report 48, LAFORIA, 1989.

[5] J. Delechamp et B. Bouchon-Meunier. Graduality by means of analogical reasoning. *Lecture notes in computer science*, 1244:210 – 222, 1997.

[6] D. Dubois et H. Prade. Fuzzy sets in approximate reasoning: Inference with possibility distributions. *Fuzzy sets and systems*, 40:143–202, 1991.

[7] M. El-Sayed et D. Pacholczyk. A qualitative reasoning with nuanced information. *8th European Conference on Logics in Artificial Intelligence (JELIA 02), 283 - 295, Italy*, 2002.

[8] M. El-Sayed et D. Pacholczyk. A symbolic approach for handling nuanced information. *IASTED International Conference on Artificial Intelligence and Applications (AIA 02), 285 - 290, Spain*, 2002.

[9] L. D. Lascio, A. Gisolfi et U. C. Garcia. Linguistic hedges and the generalized modus ponens. *Int. J. of intelligent systems*, 14:981–993, 1999.

[10] D. Pacholczyk. *Contribution au traitement logico-symbolique de la connaissance*. PhD thesis, University of Paris VI, 1992.

[11] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8:338–353, 1965.

[12] L. A. Zadeh. A theory of approximate reasoning. *Int. J. Hayes, D. Michie and L. I. Mikulich (eds); Machine Intelligence*, 9:149–194, 1979.