

Traitement de l'Imprécision et de l'Incertitude d'Information Temporelle

Handling of Imprecision and Uncertainty of Temporal Information

Didier Dubois

Allel HadjAli

Henri Prade

Institut de Recherche en Informatique de Toulouse, Université Paul Sabatier
118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4
e-mail : {dubois, hadjali, prade}@irit.fr

Résumé

Ce papier propose une discussion générale du traitement de l'information imprécise et incertaine en raisonnement temporel, dans le cadre de la théorie des possibilités et des ensembles flous. L'introduction des aspects flous en raisonnement temporel peut être reliée à différentes questions. Premièrement, elle peut être motivée par le besoin d'une description linguistique graduelle des relations temporelles en présence d'une information complète. Ceci donne naissance à un calcul basé sur des relations d'Allen floues paramétrisées par un indicateur de tolérance. Deuxièmement, le traitement de l'information floue ou incomplète conduit à considérer des relations d'Allen classiques ou floues, incertaines.

Mots Clef

Relations temporelles d'Allen, relations floues, raisonnement approché, théorie des possibilités.

Abstract

This paper proposes a general discussion of the handling of imprecise and uncertain information in temporal reasoning in the framework of fuzzy sets and possibility theory. The introduction of fuzzy features in temporal reasoning can be related to different issues. First, it can be motivated by the need of a gradual, linguistic-like description of temporal relations in face of complete information. This gives birth to a calculus based on fuzzy Allen relations parameterized with a tolerance indicator. Second, the handling of fuzzy or incomplete information leads to pervade classical Allen relations, and more generally fuzzy Allen relations, with uncertainty.

Keywords

Allen temporal relations, fuzzy relations, approximate reasoning, possibility theory.

1 Introduction

L'information temporelle peut être souvent perçue ou exprimée d'une manière vague et imprécise. Cependant, le raisonnement temporel et le raisonnement approché basé

sur les ensembles flous ont été la plupart du temps développés séparément depuis presque trois décennies. En effet, il n'existe pas beaucoup de travaux sur le traitement des informations imprécises ou incertaines dans le raisonnement temporel. A quelques exceptions près, comme l'article de Dubois et Prade [10] qui discute le raisonnement approché sur des dates floues et des intervalles flous dans le cadre de la théorie des possibilités, et les travaux de Guesgen et *al.* [15] qui proposent des relations d'Allen floues vues comme des ensembles flous de relations d'Allen ordinaires en prenant en compte une structure de voisinage. Les ensembles flous qui jouent un rôle clé dans la modélisation des contraintes flexibles, ont été aussi utilisés dans différentes approches basées sur les contraintes pour le raisonnement temporel. Qian et Lu [17] ont étudié plusieurs stratégies de propagation pour le traitement de réseaux de règles temporelles floues ; Barro et *al.* [2] ont proposé une généralisation, basée sur les ensembles flous, de la notion de contrainte temporelle et utilisé des mesures de possibilité pour vérifier le degré de cohérence d'un réseau de contraintes temporelles floues (voir aussi [18] et [19]) ; Godo et Vila [13] ont défini une logique temporelle approchée sur la base de l'intégration des contraintes floues dans un langage logique. Le système d'inférence est basé sur des règles spécifiques traitant des contraintes floues, et de propositions ayant des degrés de certitude. Voir aussi les travaux récents de Cárdenas et *al.* [4]. Dubois et *al.* [8] ont proposé une logique temporelle possibiliste où une formule logique est associée avec un ensemble flou de dates où la formule est plus ou moins certainement vraie. Notons aussi l'étude de Freksa [12] qui a développé une généralisation, basée sur les semi-intervalles, de l'approche d'Allen au raisonnement temporel permettant de traiter des informations grossières et incomplètes.

L'introduction des aspects flous dans le raisonnement temporel peut se faire de différentes manières, selon le niveau de la représentation qui est choisi, et selon le problème qui est considéré. Ceci peut être motivé par le traitement des informations floues ou incomplètes, ou par le besoin d'une description plus flexible des relations

temporelles (même en présence d'informations complètes). Dans ce qui suit, on propose une discussion générale de ces questions dans le cadre des ensembles flous et de la théorie des possibilités (déjà utilisé dans la plupart des travaux mentionnés ci-dessus).

Il est bien connu que le temps peut être représenté en termes de dates ou en termes d'intervalles. En termes de dates, et en supposant une échelle linéaire de temps, on peut comparer les dates en termes des trois relations ordinaires '>', '=', '<'. Dans le cas des intervalles, les treize relations qualitatives d'Allen [1], décrivent les positions relatives possibles entre deux intervalles. Ces relations peuvent être définies en termes des trois relations précédentes appliquées aux bornes d'intervalles. Le raisonnement temporel se réduit alors au calcul de la fermeture transitive de cet ensemble de relations entre intervalles.

Dans le traitement de l'imprécision et de l'incertitude en raisonnement approché, deux situations doivent être clairement distinguées. D'une part, on peut évaluer des propositions floues (par des valeurs de vérité graduées) en présence d'information complète. D'autre part, on peut calculer l'incertitude associée à des propositions non floues (qui sont donc vraies ou fausses) quand l'information disponible est imprécise, incertaine ou floue. Evidemment, ces deux cas extrêmes peuvent être combinés si on s'intéresse à l'évaluation de propositions floues en présence d'information incomplète. Ces deux cas extrêmes peuvent être aussi rencontrés pour l'information temporelle :

i) l'information sur les dates et les positions relatives d'intervalles est complète, mais pour certaines raisons on ne s'intéresse pas à sa description en termes précis. Par exemple, on parle en termes d'égalité approchée, ou de proximité, plutôt qu'en termes d'égalité précise dans le but d'éviter des discontinuités brutales entre les cas de valeurs qui sont parfaitement égales et de valeurs qui sont très proches l'une de l'autre. Ceci est plus généralement lié à la question de l'interfaçage d'un continuum numérique avec un nombre fini de catégories, où l'utilisation des catégories floues permet des transitions graduelles entre elles. Le problème de l'estimation du voisinage entre deux dates peut être aussi lié à la question générale de la prise en compte d'informations sur les durées en raisonnement temporel.

ii) L'information disponible est entachée d'imprécision, de floue ou d'incertitude. Ceci peut recouvrir des situations légèrement différentes :

- Les relations entre les dates ou les intervalles sont connues avec précision et certitude, mais certaines dates peuvent être imprécisément connues (comme appartenant à des intervalles), vaguement indiquées (les valeurs des dates plus ou moins possibles sont restreintes par un ensemble flou agissant comme une contrainte flexible), ou des dates peuvent être entachées d'incertitude.

- Notre connaissance sur les trois relations possibles existant entre certaines dates, ou les treize relations entre certains intervalles, est imprécise, incertaine ou floue.

L'article discute ces cadres représentationnels d'une façon systématique. Il s'appuie sur un travail préliminaire de deux des auteurs [11]. Après une section de rappels, la Section 3 propose des contreparties floues des relations d'Allen où chaque relation temporelle est associée avec un paramètre flou. Le raisonnement sur de telles informations temporelles est discuté en détails. La Section 4 traite des relations d'Allen, ou de leurs versions floues, quand la connaissance disponible est incertaine. Des schémas de raisonnement déductif à partir de connaissances temporelles floues ou incertaines sont alors établis.

2 Rappel

Nous commençons tout d'abord par rappeler les relations d'Allen ordinaires et les résultats sur la composition des relations floues modélisant des égalités approchées ou des inégalités strictes graduées.

2.1 Relations temporelles d'Allen

Allen [1] a proposé un ensemble de relations primitives mutuellement exclusives qui peuvent s'appliquer entre deux intervalles temporels. Ces relations entre événements sont habituellement dénotées par *précède* (<), *suit* (>), *rencontre* (m), *rencontré_par* (mi), *chevauche* (o), *chevauché_par* (oi), *pendant* (d), *contient* (di), *commence* (s), *commencé_par* (si), *termine* (f), *terminé_par* (fi), et *égal* (=). Leur signification est illustrée dans la Table 1.

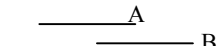
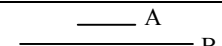
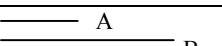
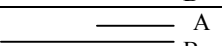
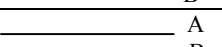
Relation	Inverse	Signification	Relations entre les bornes
$A < B$	$B > A$		$b > a'$
$A m B$	$B mi A$		$a' = b$
$A o B$	$B oi A$		$b > a \wedge a' > b \wedge b' > a'$
$A d B$	$B di A$		$a > b \wedge b' > a'$
$A s B$	$B si A$		$a = b \wedge b' > a'$
$A f B$	$B fi A$		$a > b \wedge b' = a'$
$A \equiv B$	$B \equiv A$		$a = b \wedge a' = b'$

Table1. Relations temporelles d'Allen.

Ces relations peuvent être définies à partir des trois relations ordinaires <, =, > entre des bornes de deux intervalles à positionner l'un par rapport à l'autre. Par exemple, supposant que pour chaque intervalle A , la borne inférieure est dénotée par a et la borne supérieure par a' , alors la déclaration A *chevauche* B correspond à $(b > a) \wedge (a' > b) \wedge (b' > a')$ comme c'est indiqué dans la Table1. Notons que seulement un sous-ensemble des relations entre les bornes des deux intervalles considérés, suffit pour complètement caractériser ces relations qualitatives

puisque on a $a \leq a'$, $b \leq b'$ et que les relations $<$, $=$, $>$ sont transitives.

Allen [1] a fourni un ensemble d'axiomes décrivant la composition des 13 relations et un algorithme permettant d'inférer de nouvelles informations. Par exemple,

$$\begin{aligned} A \text{ précède } B \text{ et } B \text{ précède } C &\Rightarrow A \text{ précède } C, \\ A \text{ rencontre } B \text{ et } B \text{ pendant } C &\Rightarrow (A \text{ chevauche } C) \vee \\ &\quad (A \text{ pendant } C) \vee (A \text{ commence } C). \end{aligned}$$

Le dernier exemple montre qu'on est obligé d'introduire des disjonctions de relations primitives pour traiter l'incertitude sur les relations, même si la composition est effectuée entre deux relations primitives.

2.2 Compérateurs absolus flous

La représentation des compérateurs flous exprimés en termes de différence de valeurs, est tout d'abord discutée. Puis, la composition des relations floues modélisant des égalités approchées, ou des inégalités graduées, est rappelée. Des règles d'inférence contenant des relations floues paramétrisées sont ensuite établies.

2.2.1 Egalité approchée et inégalité graduée

Une *égalité approchée* entre deux valeurs, représentant ici des dates, modélisée par une relation floue E avec μ_E sa fonction d'appartenance (E signifie "Egal"), peut être basée sur une distance telle que la valeur absolue de la différence. C'est-à-dire,

$$\mu_E(x, y) = \mu_L(|x - y|),$$

où L est un ensemble flou qui modélise la disparité floue maximale entre deux valeurs qui sont estimées approximativement égales. Dans un but de simplicité, les ensembles flous et les relations floues sont supposés être définis sur la droite réelle. Mais, on pourrait nous restreindre aux valeurs entières ou rationnelles si nécessaire. Une égalité approchée est représentée par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mu_E(x, y) = \mu_L(|x - y|) &= \max \left(0, \min \left(1, \frac{\delta + \epsilon - |x - y|}{\epsilon} \right) \right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } |x - y| \leq \delta \\ 0 & \text{si } |x - y| > \delta + \epsilon \\ \frac{\delta + \epsilon - |x - y|}{\epsilon} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

avec δ et ϵ sont respectivement des paramètres positifs et strictement positifs, qui modulent l'égalité approchée. Ici L est un ensemble flou centré en 0, i.e. $\mu_L(d) = \mu_L(-d)$ pour garantir la symétrie de E : $\mu_E(x, y) = \mu_E(y, x)$. Voir Figure 1 où on utilise la représentation trapézoïdale, notée $L = (-\delta, \delta, \epsilon, \epsilon)$. L'égalité classique peut être obtenue pour $\delta = 0$ et $\epsilon \rightarrow 0$.

L'égalité approchée entre les quantités a et b (au sens de E) peut donc être écrite sous la forme :

$$a - b \in L \Leftrightarrow b - a \in L \Leftrightarrow a E(L) b,$$

ce qui signifie que les valeurs possibles de la différence $a - b$ sont restreintes par l'ensemble flou L. En particulier, $a E(0) b$ signifie que $a = b$. Notons qu'on pourrait aussi modéliser l'égalité approchée en termes de voisinage du rapport x/y à 1. Ceci constitue les bases du calcul sur les ordres de grandeur relatifs flous exprimés en termes de relations de voisinage et de négligibilité, développé dans [16]. Cependant, la représentation de l'égalité approchée, basée sur la différence, semble plus convenable pour la modélisation temporelle car la différence entre les dates a un sens, mais non leur rapport.

D'une façon similaire, une *inégalité plus ou moins forte* peut être modélisée par une relation floue G (G signifie "Grand") de la forme :

$$\mu_G(x, y) = \mu_K(x - y).$$

Dans ce qui suit, on considère

$\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mu_G(x, y) = \mu_K(x - y) &= \max \left(0, \min \left(1, \frac{x - y - \lambda}{\rho} \right) \right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x > y + \lambda + \rho \\ 0 & \text{si } x \leq y + \lambda \\ \frac{x - y - \lambda}{\rho} & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

On suppose $\rho > 0$, i.e. G renforce l'idée de "*strictement plus grand que*". On doit aussi avoir $\lambda \geq 0$ afin de garantir que G soit une relation en conformité avec l'idée de "*plus grand que*". En effet, si $\lambda < 0$ alors $\exists (x, y)$ tel que $\mu_G(x, y) > 0$ et $x < y$, à condition que x et y restent assez proches. La relation "*strictement plus grand que*" ($>$) est obtenue pour $\lambda = 0$ et $\rho \rightarrow 0$. Une contrainte plus ou moins forte de type "*a est plus grand que b*" (au sens de G) peut donc être écrite sous la forme

$$a - b \in K \Leftrightarrow a G(K) b,$$

où K est un ensemble flou de valeurs positives avec une fonction d'appartenance strictement croissante entre λ et $\lambda + \rho$. Voir Figure 1 où $K = (\lambda + \rho, +\infty, \rho, +\infty)$. Selon les valeurs des paramètres λ et ρ , la modalité qui indique de combien a est plus grand que b peut être exprimée dans un contexte donné par les termes linguistiques tels que "légèrement", "beaucoup", etc. $G(0)$ signifie " $>$ ".

Des relations floues "*plus petit que*" peuvent être aussi définies. Notons que $a G(K) c \Leftrightarrow a - c \in K \Leftrightarrow c - a \in K^{\text{ant}} \Leftrightarrow c S(K^{\text{ant}}) a$ où S signifie plus petit que, K^{ant} est l'antonyme de K défini par $\mu_{K^{\text{ant}}}(d) = \mu_K(-d)$. Ainsi, si a est *beaucoup plus grand que* c , c est *beaucoup plus petit que* a .

2.2.2 Composition des relations floues et nombres flous

La composition $G(K) \circ E(L)$ de deux relations floues $G(K)$ et $E(L)$ est définie par

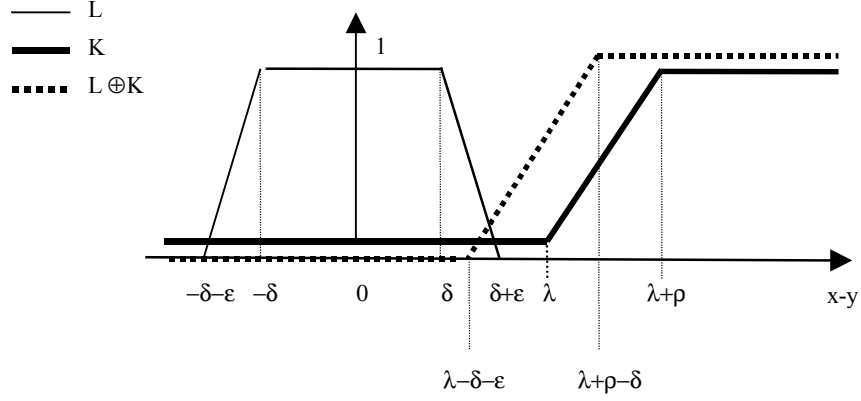


Fig. 1: Egalité approchée et inégalité stricte graduée.

$\forall x \in X, \forall z \in Z,$

$$\begin{aligned} \mu_{G(K) \circ E(L)}(x, z) &= \sup_{y \in Y} \min(\mu_G(x, y), \mu_E(y, z)) \\ &= \sup_{y \in Y} \min(\mu_K(x - y), \mu_L(y - z)) \\ &= \sup_{s, t: x - z = s + t} \min(\mu_K(s), \mu_L(t)) \\ &= \mu_{K \oplus L}(x - z), \end{aligned}$$

où on reconnaît l'expression de l'addition étendue $\oplus$ des ensembles flous K et L [9]. Dans la Figure 1, $K \oplus L = (\lambda + \rho - \delta, +\infty, \rho + \epsilon, +\infty)$. Pour plus de détails sur l'arithmétique floue, voir [9].

Considérons l'exemple suivant. Supposons qu'on sait que "a est approximativement égal à b" (i.e. $a E(L) b$) et que "b est plus grand que c" (i.e. $b G(K) c$), alors on peut déduire que

$$a - c \in K \oplus L \Leftrightarrow a G(K \oplus L) c,$$

en utilisant la formule de composition ci-dessus. Le résultat est représenté en Figure 1 où les relations E(L) et G(K) sont utilisées. On peut voir facilement qu'il est certain que $a > c + \lambda - (\delta + \epsilon)$ et que la valeur de la différence $a - c$ appartient à $L \oplus K$ avec un degré 1 dès que $a \geq c + \lambda + \rho - \delta$.

2.2.3 Règles d'inférence floues paramétrisées

En exploitant le fait que la composition des relations floues E(L) et G(K) se réduit à de simples opérations arithmétiques sur les paramètres K et L sous-jacents, précisant les sémantiques de E et G, des règles d'inférence paramétrisées peuvent être obtenues. Ainsi, l'ensemble des règles suivantes, décrivant les comportements des comparateurs flous E et G, a été établi [6] :

- Propriétés de base de E et G

$$R_1: a \leq c \leq b \text{ et } a E(L) b \Rightarrow a E(L) c \quad \text{Convexité}$$

$$R_2: a E(L) b \Leftrightarrow b E(L) a \quad \text{Symétrie}$$

$$R_3: a E(L) b \Leftrightarrow a + c E(L) b + c \quad \text{E-Compatibilité avec l'addition}$$

$$R_4: a G(K) b \Leftrightarrow a + c G(K) b + c \quad \text{G-Compatibilité avec l'addition}$$

- Règles de fermeture

$$R_5: a E(L) b \text{ et } b E(L') c \Rightarrow a E(L \oplus L') c \quad \text{E-Transitivité}$$

$$R_6: a G(K) b \text{ et } b G(K') c \Rightarrow a G(K \oplus K') c \quad \text{G-Transitivité}$$

$$R_7: a E(L) b \text{ et } b G(K) c \Rightarrow a G(K \oplus L) c. \quad \text{E-G-Composition}$$

Notons que la règle R_7 correspond à l'exemple ci-dessus. La règle R_5 exprime l'affaiblissement de la transitivité pour l'égalité approchée : a peut ne pas être aussi proche de c que a est proche de b et b de c. Au contraire, R_6 exprime un renforcement : a est beaucoup plus grand que c à un degré plus élevé que a par rapport à b, et b par rapport à c. Ainsi, les règles R_1 à R_7 nous permettent de calculer formellement les paramètres flous des relations dans un processus d'inférence, et de les interpréter.

A partir des règles de base précédentes, d'autres règles peuvent être établies :

- Stabilité par rapport à la somme

$$R_8: a E(L) b \text{ et } c E(L') d \Rightarrow a + c E(L \oplus L') b + d$$

$$R_9: a E(L) b \text{ et } c G(K) d \Rightarrow a + c G(L \oplus K) b + d$$

$$R_{10}: a G(K) b \text{ et } c G(K') d \Rightarrow a + c G(K \oplus K') b + d$$

En effet, considérons la règle R_8 par exemple. L'application de R_3 permet d'écrire $a E(L) b \Rightarrow a + c E(L) b + c$ et $c E(L') d \Rightarrow b + c E(L') b + d$, alors par R_5 on prouve R_8 . Il peut être montré qu'en fait R_8 est équivalente à R_5 puisque R_8 implique R_5 (en posant $b = c$ et en appliquant R_3). Maintenant, puisque $a > b$ est équivalent à $a G(0) b$ où $k = 0$ correspond au cas où $\lambda = 0$ et $\rho \rightarrow 0$ dans (2). Les propriétés intuitives suivantes de la relation floue G peuvent être aussi dérivées en utilisant la règle R_6 (puisque $K \oplus 0 = K$) :

$$R_{11}: a > b \text{ et } b G(K) c \Rightarrow a G(K) c,$$

$$R_{12}: a G(K) b \text{ and } b > c \Rightarrow a G(K) c.$$

On peut encore montrer que :

$$R_{13}: a + b G(K) c + d \text{ et } c E(L) a \Rightarrow b G(K \oplus L) d,$$

(en utilisant R_3 deux fois et R_7)

$$R_{14}: a + b E(L) c \text{ et } c G(K) a \Rightarrow b G(L \oplus K) 0.$$

(en utilisant R_9 et R_4)

Des règles contenant des durées peuvent être aussi dérivées. Par exemple, Si $a G(K) b$ et $b - c \in D$ alors $a G(K \oplus D) c$, où D représente l'information floue sur le temps passé entre b et c.

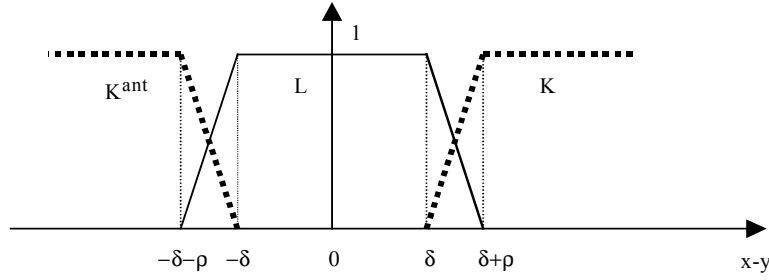


Fig. 2: "Au moins approximativement égal à", "clairement différent" et "plus grand (ou plus petit) que".

3 Relations d'Allen floues

Cette section discute l'extension des relations d'Allen, basée sur des relations d'égalité approchée et d'inégalité stricte graduée. En utilisant les règles d'inférence établies en Section 2.2.3, on montre que la composition des relations d'Allen ordinaires peut être facilement étendue, en pratique, en ajoutant au calcul classique la manipulation arithmétique des paramètres flous.

3.1 Modélisation

En utilisant les comparateurs flous paramétrisés $E(L)$ et $G(K)$, on peut définir des contreparties floues des relations d'Allen. L'idée est que les relations qui peuvent être vérifiées entre des bornes d'intervalles peuvent ne pas être décrites en termes précis. Par exemple, on s'exprimera en termes d'égalité approchée (au sens de E) plutôt qu'en termes d'égalité précise afin d'éviter les discontinuités brutales entre le cas d'une relation de "parfaite" rencontre et le cas d'une relation *précède* quand la borne supérieure du premier intervalle est proche de la borne inférieure du second intervalle.

Ainsi, en termes approximatifs, étant donné deux dates a et b . Elles peuvent être "approximativement égales" au sens de $E(L)$ ou, a peut être "clairement différent de" b au sens de non $E(L)$. Cette dernière relation correspond à "beaucoup plus grand que" au sens de $G(K)$ ou à "beaucoup plus petit que" au sens de $S(K^{\text{ant}})$. Par conséquent, les paramètres L , K et K^{ant} sont des éléments d'une partition floue (comme indiqué dans la Figure 2), C'est-à-dire

$$\forall d \in \mathbb{R}, \mu_K(d) + \mu_{K^{\text{ant}}}(d) + \mu_L(d) = 1,$$

puisque K et K^{ant} sont obtenus par une opération de complémentation floue appliquée sur L . Chaque paramètre peut être obtenu à partir de chaque autre paramètre de la manière suivante : Soit $K = (\gamma, +\infty, \rho, +\infty)$ un nombre flou. L'ensemble flou L centré en 0 associé à K est égal à $(-\gamma+\rho, \gamma-\rho, \rho, \rho)$. Dans ce cas, on écrira $L = K^c$. Réciproquement, soit $L = (-\delta, \delta, \rho, \rho)$ un nombre flou centré en 0. Le nombre flou K associé à L est égal à $(\delta+\rho, +\infty, \rho, +\infty)$ et $K^{\text{ant}} = (-\infty, -\delta-\rho, +\infty, \rho)$. Par convention,

on écrit $K = L_+^c$ et $K^{\text{ant}} = L_-^c$, en distinguant les parties positives et négatives du nombre flou L^c ¹.

Ainsi, puisque L , K et K^{ant} sont étroitement reliés, il suffit d'avoir un seul paramètre sous-jacent pour ces relations. Ce qui a été adopté dans la définition des relations d'Allen floues (qui seront introduites ci-dessous). Il apparaît ainsi que $E(L)$, $G(K)$ et $S(K^{\text{ant}})$ avec L et K interdéfinis comme expliqué ci-dessus, sont des contreparties floues des relations classiques $=$, $>$ et $<$ dans le sens non flou.

Soient $A = [a, a']$ et $B = [b, b']$ deux intervalles de temps (il est supposé que tous les intervalles considérés $[a, a']$ sont tels que $a < a'$). Les relations d'Allen floues peuvent être maintenant définies comme illustré dans la Table 2.

Relation d'Allen floue	Définition	Label
$A \text{ F-précède}(L) B$	$b \ G(L_+^c) a'$	$fb(L)$
$B \text{ F-suit}(L) A$		$fa(L)$
$A \text{ F-rencontre}(L) B$	$a' \ E(L) b$	$fm(L)$
$B \text{ F-rencontré_par}(L) A$		$fmi(L)$
$A \text{ F-chevauche}(L) B$	$b \ G(L_+^c) a \wedge$	$fo(L)$
$B \text{ F-chevauché_par}(L) A$	$a' \ G(L_+^c) b \wedge$	$foi(L)$
	$b' \ G(L_+^c) a'$	
$A \text{ F-pendant}(L) B$	$a \ G(L_+^c) b \wedge$	$fd(L)$
$B \text{ F-contien}(L) A$	$b' \ G(L_+^c) a'$	$fdi(L)$
$A \text{ F-commence}(L) B$	$a \ E(L) b \wedge$	$fs(L)$
$B \text{ F-commencé_par}(L) A$	$b' \ G(L_+^c) a'$	$fsi(L)$
$A \text{ F-terme}(L) B$	$a' \ E(L) b' \wedge$	$ff(L)$
$B \text{ F-terminé_par}(L) A$	$a \ G(L_+^c) b$	$ffi(L)$
$A \text{ F-égal}(L) B$	$a \ E(L) b \wedge$	$fe(L)$
$B \text{ F-égal}(L) A$	$a' \ E(L) b'$	$fe(L)$

Table 2. Relations d'Allen floues.

Comme on peut le voir les relations d'Allen floues sont de trois types : i) Les relations qui sont définies uniquement

¹ $\mu_{L^c}(t) = 1 - \mu_L(t)$.

sur la base de l'inégalité floue G , i.e. fb , fo , fd et leurs inverses ; ii) les relations qui sont définies sur la base de l'égalité approchée E et sur l'inégalité floue G , i.e. les relations fs , ff et leurs inverses ; iii) les relations qui sont définies uniquement sur la base de l'égalité approchée E , i.e. les relations fm , fe et leurs inverses.

Guesgen et al. [15] ont proposé une autre modélisation des relations d'Allen floues. Ils définissent une relation d'Allen floue comme un ensemble flou de relations d'Allen ordinaires, les degrés d'appartenance étant estimés selon un système de voisinage entre les relations (cette notion de voisinage des relations est celle introduite dans [12]). Dans la modélisation proposée ci-dessus, une relation floue permet aussi de recouvrir plusieurs situations correspondant à différentes relations d'Allen ordinaires ; par exemple, $F\text{-rencontre}(L)$ recouvre la situation "rencontre" ordinaire et aussi les situations comme "précède légèrement" ou "chevauche légèrement". Cependant ici, le paramètre flou L contrôle à quel point on peut s'éloigner du "rencontre" ordinaire, et peut fournir des bases pour la sémantique de ce que "légèrement" signifie dans les expressions ci-dessus. De la même manière, on peut voir que $F\text{-égal}(L)$ peut recouvrir la situation ordinaire exprimée par "presque contient" ou "presque pendant".

3.2 Raisonnement basé sur les relations d'Allen floues

Comme dans le cas classique, on peut raisonner sur la base des relations d'Allen floues établies par le calcul de la fermeture transitive des relations temporelles floues en utilisant les règles d'inférence données en Section 2.2.3. Introduisons tout d'abord quelques notations qui seront utilisées dans la prochaine table de transitivité. Soient r_p et r_q deux relations parmi les 13 relations floues de la Table 2. On dénote par $\langle r_p, r_q \rangle$ le A-voisinage conceptuel (au sens introduit dans [12]) qui commence par la relation r_p et finit par la relation r_q . La structure de voisinage utilisée, est celle basée sur la relation dite "A-voisin". L'ensemble disjonctif $\langle r_p, r_q \rangle$ contient les relations du voisin conceptuel qui appartiennent au plus court chemin entre r_p et r_q . Par exemple, $\langle fb, fd \rangle$ contient $\{fb, fm, fo, fs, fd\}$ et $\langle fs, fsi \rangle$ contient $\{fs, fe, fsi\}$.

Montrons sur quelques exemples comment les axiomes décrivant le comportement de la transitivité des relations d'Allen floues peuvent être établis (avec $A = [a, a']$ dénote un intervalle de temps) :

i) Supposons qu'on sait que $A fb(L_1) B$ et $B fb(L_2) C$, la relation temporelle qui tient entre A et C peut être obtenue comme suit :

$$A fb(L_1) B \Leftrightarrow b G((L_1)_+^c) a',$$

$$B fb(L_2) C \Leftrightarrow c G((L_2)_+^c) b'.$$

Maintenant, par application de la règle R_{11} sur $b G((L_1)_+^c)$ a' , on obtient $b' G((L_1)_+^c) a'$ puisque $b' > b$. La règle de

transitivité R_6 appliquée sur $c G((L_2)_+^c) b'$ et $b' G((L_1)_+^c) a'$, implique que $c G((L_2)_+^c \oplus (L_1)_+^c) a'$. Ceci signifie que $A fb(L_2 \oplus L_1) C$ puisque $(L_1)_+^c \oplus (L_2)_+^c = (L_1 \oplus L_2)_+^c$.

ii) Considérons maintenant les déclarations $A fb(L_1) B$ et $B fmi(L_2) C$. En utilisant les définitions de $fb(L_1)$ et $fmi(L_2)$, on a :

$$A fb(L_1) B \Leftrightarrow b G((L_1)_+^c) a',$$

$$B fmi(L_2) C \Leftrightarrow b E(L_2) c' \Leftrightarrow c' E(L_2) b. \quad (\text{par la règle } R_2)$$

Par application de la règle R_7 sur $c' E(L_2) b$ et $b G((L_1)_+^c) a'$, on déduit $c' G(L_2 \oplus (L_1)_+^c) a'$ (qui sera notée par H_3).

Maintenant selon la localisation de la date c par rapport aux dates a et a' , plusieurs relations mutuellement exclusives peuvent tenir entre les intervalles de temps A et C . Soient H_1 (resp. H_2), H'_1 (resp. H'_2), H_1'' (resp. H''_2) les relations $c > a$ (resp. $c > a'$), $c = a$ (resp. $c = a'$) et $c < a$ (resp. $c < a'$) respectivement. Les différentes relations primitives qui pourraient être vérifiées entre A et C sont :

$$fb = H_2 \quad (\text{qui signifie que } fb \text{ requiert seulement l'hypothèse } H_2)$$

$$fm = H'_2$$

$$fo = H_1 \wedge H''_2 \wedge H_3 \quad (\text{qui signifie que } fo \text{ requiert simultanément les hypothèses } H_1, H''_2 \text{ et } H_3)$$

$$fs = H'_1 \wedge H_3$$

$$fd = H''_1 \wedge H_3$$

Dans une forme condensée, la relation entre A et C s'écrit $\langle fb, fd \rangle$ qui correspond à la disjonction des relations atomiques fb , fm , fo , fs et fd . Le paramètre flou qui sera associé à la relation $\langle fb, fd \rangle$ peut alors être calculé comme suit. Les relations fb et fm peuvent aussi être exprimées par $H_1 \wedge H_2 \wedge H_3$ et $H_1 \wedge H'_2 \wedge H_3$ respectivement (puisque H_1 et H_3 sont implicitement satisfaites dans ces cas). La disjonction $fb \vee fm \vee fo$ se réduit à $H_1 \wedge H_3$ puisque $H_2 \vee H'_2 \vee H''_2 = \mathbb{T}$ (où $\mathbb{T}$ est une tautologie). Ainsi, $(fb \vee fm \vee fo) \vee fs \vee fd$ se réduit aussi à H_3 puisque $H_1 \vee H'_1 \vee H''_1 = \mathbb{T}$. Ceci signifie que la relation temporelle floue entre A et C est vérifiée au sens de l'ensemble flou sous-jacent dans la relation G qui tient entre les dates c' et a' . Ainsi, on conclut que $A \langle fb, fd \rangle (L_1) C$ avec $L_1 = ((L_1)_+^c \oplus L_2)^c$.

iii) Supposons maintenant que $A fs(L_1) B$ et $B fsi(L_2) C$. D'après les définitions de $fs(L_1)$ et $fsi(L_2)$, les deux équivalences suivantes tiennent :

$$A fs(L_1) B \Leftrightarrow a E(L_1) b \wedge b' G((L_1)_+^c) a',$$

$$B fsi(L_2) C \Leftrightarrow b E(L_2) c \wedge b' G((L_2)_+^c) c'.$$

La règle de transitivité R_5 , appliquée à $a E(L_1) b$ et $b E(L_2) c$, permet de déduire $a E(L_1 \oplus L_2) c$ (qui sera dénotée par H_1). Les relations atomiques qui pourraient donc tenir entre A et C sont :

$$fs = H_1 \wedge H_3 \quad (H_3 \text{ désigne } c' > a')$$

$$fe = H_1 \wedge H'_3 \quad (H'_3 \text{ désigne } c' = a')$$

$$fsi = H_1 \wedge H''_3 \quad (H''_3 \text{ désigne } c' < a')$$

D'une manière similaire, comme ci-dessus, on peut aussi montrer que la disjonction $fs \vee fe \vee fsi$ se réduit à H_1 . Ce qui signifie que $A \prec fs.fsi > (L_1 \oplus L_2) C$.

iv) Supposons maintenant que les relations $A fs(L_1) B$ et $B fff(L_2) C$ sont vérifiées. A partir des définitions de $fs(L_1)$ et $fff(L_2)$, on peut écrire :

$$A fs(L_1) B \Leftrightarrow a E(L_1) b \wedge b' G((L_1)_+^c) a',$$

$$B fff(L_2) C \Leftrightarrow b G((L_2)_+^c) c \wedge b' E(L_2) c'.$$

Les règles R_7 et R_2 permettent de déduire $a G((L_2)_+^c \oplus L_1) c$ et $c' G((L_1)_+^c \oplus L_2) a'$. Ceci signifie que $A fd(L) C$ avec $L = ((L_1 \oplus (L_2)_+^c) \cup ((L_1)_+^c \oplus L_2))^c$ ² (puisque $a G(K) b \Rightarrow a G(K') b$ si $K \subseteq K'$).

v) Considérons maintenant les informations exprimées par $A fo(L_1) B$ et $B foi(L_2) C$ et regardons quelle information temporelle floue peut être inférée. Il est facile de voir que les relations suivantes tiennent entre les bornes des intervalles :

$$b G((L_1)_+^c) a \wedge a' G((L_1)_+^c) b \wedge b' G((L_1)_+^c) a',$$

$$b G((L_2)_+^c) c \wedge c' G((L_2)_+^c) b \wedge b' G((L_2)_+^c) c'.$$

La règle R_6 appliquée sur $a' G((L_1)_+^c) b$ et $b G((L_2)_+^c) c$ (resp. $c' G((L_2)_+^c) b$ et $b G((L_1)_+^c) a$) permet d'inférer $a' G((L_1)_+^c \oplus (L_2)_+^c) c$ (resp. $c' G((L_1)_+^c \oplus (L_2)_+^c) a$). La première relation signifie que la relation temporelle fb ne tient jamais entre les intervalles de temps A et C ; tandis que la seconde relation signifie que la relation temporelle fa ne tient aussi jamais entre A et C . Ainsi, on conclut que la relation qui pourrait tenir entre A et C correspond à la disjonction des relations de la Table 2, à l'exception des relations fb et fa . Cette situation "d'Indétermination Partielle" est dénotée par "P-IND" dans la table de transitivité. ♦

L'ensemble complet des axiomes de transitivité est donné en Table 3 en Annexe. Le symbole "T-IND" utilisé dans la Table 3 désigne "l'Indétermination Totale" qui signifie qu'aucune information ne peut être inférée. C'est-à-dire, cette entrée de la table correspond à la disjonction des 13 relations floues données dans la Table 2.

Notons que les inférences qui peuvent être dérivées de la table de composition (i.e. Table 3), conduisent à des relations dont les paramètres flous ont les formes suivantes :

i) $(L_1 \oplus L_2)$ quand les relations initiales sont paramétrisées par L_1 et L_2 . Puisque $(L_1)_+^c \supseteq (L_1 \oplus L_2)_+^c$ et $(L_2)_+^c \supseteq (L_1 \oplus L_2)_+^c$ (resp. $L_1 \subseteq L_1 \oplus L_2$ et $L_2 \subseteq L_1 \oplus L_2$) alors, la relation temporelle floue obtenue, qui est définie

seulement sur la base de l'inégalité G (resp. l'égalité approchée E), est renforcée (resp. affaiblie).

ii) $((L_1)_+^c \oplus L_2)^c$ quand les relations initiales sont paramétrisées par L_1 et L_2 . Puisque $(L_1)_+^c \subseteq (L_1)_+^c \oplus L_2$ (resp. $L_1 \supseteq ((L_1)_+^c \oplus L_2)^c$ alors, la relation temporelle floue obtenue, qui est définie seulement sur la base de l'inégalité G (resp. l'égalité approchée E), est affaiblie (resp. renforcée).

Il est important de noter que l'itération des axiomes de transitivité peut conduire à des effets de dégradation dans les relations temporelles floues inférées. En effet, les relations symboliques obtenues pourraient ne pas être en complète conformité avec les sémantiques intuitives sous-jacentes des relations temporelles auxquelles elles réfèrent. Ceci est essentiellement dû au fait que quand le paramètre flou L (resp. K) devient trop permissif (resp. proche de 0), on s'éloigne des sémantiques intuitives de l'égalité approchée (resp. *beaucoup plus grand que*) exprimées par E (resp. G).

4 Relations d'Allen incertaines

Une relation d'Allen incertaine peut être définie à partir des relations $>$, $<$, ou $=$ incertaines. Par exemple, $a >_\alpha b$ exprimant que $a > b$ avec une certitude α , peut être modélisée par :

$$>_\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > y \\ 1 - \alpha & \text{sinon,} \end{cases}$$

Puisque le degré de certitude (appelé aussi nécessité) d'un événement est égal à 1 moins le degré de possibilité de l'événement opposé en théorie des possibilités.

Rappelons qu'en théorie des possibilités, l'incertitude d'un événement (flou) A est évaluée à l'aide de deux mesures duales de possibilité et de nécessité, comme suit :

$$\Pi(A, \pi) = \sup_x \min(\mu_A(x), \pi(x)), \quad (3)$$

$$N(A, \pi) = 1 - \Pi(\bar{A}, \pi) = \inf_x \max(\mu_A(x), 1 - \pi(x)), \quad (4)$$

où π est la distribution de possibilité représentant l'information disponible [9]. Etant donné une information floue sur les dates, sur les longueurs d'intervalles de temps, ou sur les relations entre dates, ou entre intervalles de temps, d'autres relations ou spécifications d'incertitude sur les relations peuvent être déduites.

Soient les informations floues sur la localisation possible des dates a et b , représentées par π_a et π_b respectivement, on peut évaluer la certitude qu'une date précise *précède/suit* une autre. Par exemple, la certitude que $a > b$ est exprimée par [9] :

$$N(a > b) = N(>, \min(\pi_a, \pi_b)) = 1 - \sup_{s \leq t} \min(\pi_a(s), \pi_b(t)). \quad (5)$$

Plus généralement, la mesure définie par (5) peut être généralisée en introduisant une version floue de la relation d'ordre $>$ au sens de la relation floue G (définie par (2))

² La fonction d'appartenance de l'ensemble flou L est telle que $\mu_L(d) = \max(\mu((L_2)_+^c \oplus L_1)(d), \mu((L_1)_+^c \oplus L_2)(d))$.

pour estimer la nécessité que a est *beaucoup plus grand* que b ; c'est-à-dire,

$$N(a \text{ G(K)} b) = N(G(K), \min(\pi_a, \pi_b)) \\ = \inf_{s, t} \max(\mu_G(s, t), 1 - \pi_a(s), 1 - \pi_b(t)). \quad (6)$$

On peut aussi estimer à quel point il est certain que deux dates sont (au moins) *approximativement égales* dans le sens de la relation floue E (définie par (1)) ; c'est-à-dire,

$$N(a \text{ E(L)} b) = N(E(L), \min(\pi_a, \pi_b)) \\ = \inf_{s, t} \max(\mu_L(s, t), 1 - \pi_a(s), 1 - \pi_b(t)). \quad (7)$$

4.1 Degrés de certitude des relations d'Allen ordinaires et floues

Les mesures de possibilité et de nécessité peuvent aussi être utilisées pour discuter les positions relatives de deux intervalles de temps $A = [a, a']$ et $B = [b, b']$ et pour estimer à quel point il est possible, ou certain, que des relations d'Allen (ou leurs versions floues) tiennent entre intervalles de temps, quand la connaissance est entachée d'incertitude. Il est supposé que les intervalles considérés $[a, a']$ sont tels que $N(a' > a) = 1$. Par exemple, le degré de nécessité (ou de certitude) que A précède B est évalué par

$$N(A \text{ précède } B) = N(b > a').$$

D'une manière similaire, le degré de nécessité (ou de certitude) que A chevauche B est évalué par

$N(A \text{ chevauche } B) = \min(N(b > a), N(a' > b), N(b' > a'))$, tandis que le degré de nécessité que A se déroule pendant B est donné par

$$N(A \text{ pendant } B) = \min(N(a > b), N(b' > a')).$$

On peut aussi estimer à quel point il est certain que l'assertion $A \text{ r } B$, avec r est une disjonction des relations d'Allen atomiques, tient entre A et B . Par exemple, $N(A \text{ r } B)$ avec $r = \text{chevauche} \vee \text{pendant}$, est estimé par $\min(N(a' > b), N(b' > a'))$.

Relation d'Allen floue $\tilde{r}$	Degré de certitude $N(A \tilde{r} B)$
$A \text{ fb(L)} B$	$N(b \text{ G(L)}_+^c a')$
$A \text{ fm(L)} B$	$N(a' \text{ E(L)} b)$
$A \text{ fo(L)} B$	$\min(N(b \text{ G(L)}_+^c a), N(a' \text{ G(L)}_+^c b), N(b' \text{ G(L)}_+^c a'))$
$A \text{ fd(L)} B$	$\min(N(a \text{ G(L)}_+^c b), N(b' \text{ G(L)}_+^c a'))$
$A \text{ fs(L)} B$	$\min(N(a \text{ E(L)} b), N(b' \text{ G(L)}_+^c a'))$
$A \text{ ff(L)} B$	$\min(N(a' \text{ E(L)} b'), N(a \text{ G(L)}_+^c b))$
$A \text{ fe(L)} B$	$\min(N(a \text{ E(L)} b), N(a' \text{ E(L)} b'))$

Table 4. Degrés de certitude des relations d'Allen floues

Pour les autres relations d'Allen, i.e. celles définies sur la base de l'égalité stricte entre les bornes d'intervalles, on utilise l'indice $N(\cdot =_E \cdot)^3$, où $=_E$ est une égalité approchée au sens de E , définie selon (7). Ainsi, on obtient les résultats suivants :

$$N(A \text{ égal}_E B) = \min(N(a =_E b), N(a' =_E b')),$$

$$N(A \text{ rencontre}_E B) = N(a' =_E b),$$

$$N(A \text{ commence}_E B) = \min(N(a =_E b), N(b' > a')),$$

$$N(A \text{ termine}_E B) = \min(N(a' =_E b'), N(a > b)).$$

Maintenant en utilisant les indices $N(G(K), \cdot)$ et $N(E(L), \cdot)$ définis par (6) et (7) respectivement, on peut évaluer à quel point il est certain que les relations d'Allen floues tiennent entre deux intervalles de temps, comme montré en Table 4.

4.2 Schémas d'inférence avec les relations d'Allen floues

Soient $A = [a, a']$, $B = [b, b']$ et $C = [c, c']$ trois intervalles de temps. En utilisant la propriété de transitivité de $N(>, \cdot)$ et les définitions ci-dessus, différents schémas de raisonnement peuvent être facilement établis. Par exemple, on a

$$N(A \text{ précède } B) \geq \alpha$$

$$N(C \text{ pendant } A) \geq \beta$$

$$N(C \text{ précède } B) \geq \min(\alpha, \beta)$$

$$N(A \text{ précède } B) \geq \alpha$$

$$N(C \text{ termine } B) \geq \beta$$

$$N(A \text{ précède } C) \geq \min(\alpha, \beta)$$

Considérons la preuve de (8). Il est facile de voir que les assertions suivantes sont vérifiées : $N(b > a') \geq \alpha$ et $\min(N(c > a), N(a' > c')) \geq \beta$. Maintenant, à partir de $N(b > a') \geq \alpha$ et $N(a' > c') \geq \beta$ on déduit $N(b > c') \geq \min(\alpha, \beta)$ par la propriété de transitivité de $N(>, \cdot)$. Ceci signifie que $N(C \text{ précède } B) \geq \min(\alpha, \beta)$. D'une manière similaire, on peut prouver (9) en remarquant que $N(b > a') \geq \alpha$ et $\min(N(c > b), N(c' = b')) \geq \beta$.

Notons que des résultats similaires sont vérifiés, en changeant *pendant* par *chevauche* (resp. *commence*) dans le schéma (8), et *termine* par *pendant* (resp. *chevauché par*) dans (9).

Dans le but d'établir des schémas d'inférence sur des relations d'Allen floues, introduisons tout d'abord le schéma suivant, qui contient une relation d'ordre et une relation d'égalité approchée, déjà discuté dans [10] :

$$N(a \text{ G(K)} b) \geq \alpha$$

$$N(b \text{ E(L)} c) \geq \beta$$

$$N(a \text{ G(K)} \circ \text{E(L)} c) \geq \min(\alpha, \beta). \quad (10)$$

³ Puisque notre connaissance sur les valeurs de a , a' , b et b' est floue, et on ne peut pas vérifier l'égalité stricte de deux quantités avec certitude à partir de leurs valeurs imprécisément connues.

De plus, en utilisant une variante de la règle R_7 (i.e., la règle $a \text{ G}(\text{K}) \ b \text{ et } b \text{ E}(\text{L}) \ c \Rightarrow a \text{ G}(\text{K} \oplus \text{L}) \ c$), on déduit $\text{G}(\text{K}) \circ \text{E}(\text{L}) = \text{G}(\text{K} \oplus \text{L})$. Ainsi, $\text{N}(a \text{ G}(\text{K} \oplus \text{L}) \ c) \geq \min(\alpha, \beta)$. Il est à noter que ce schéma tient aussi en changeant G par E , ou E par G .

En utilisant les règles R_1 à R_7 , on peut facilement établir les différents schémas d'inférence suivants (où $\text{L}_2 = (\text{L}_1 \oplus (\text{L}_2)_+^c)^c$):

$$\frac{\text{N}(A \text{ fm}(\text{L}_1) \ B) \geq \alpha \quad \text{N}(C \text{ fd}(\text{L}_2) \ A) \geq \beta}{\text{N}(C \text{ fb}(\text{L}_2) \ B) \geq \min(\alpha, \beta)} \quad (11)$$

$$\frac{\text{N}(A \text{ fb}(\text{L}_1) \ B) \geq \alpha \quad \text{N}(C \text{ fd}(\text{L}_2) \ A) \geq \beta}{\text{N}(C \text{ fb}(\text{L}_1 \oplus \text{L}_2) \ B) \geq \min(\alpha, \beta)} \quad (12)$$

$$\frac{\text{N}(A \text{ fm}(\text{L}_1) \ B) \geq \alpha \quad \text{N}(C \text{ fs}(\text{L}_2) \ B) \geq \beta}{\text{N}(C \text{ fm}(\text{L}_1 \oplus \text{L}_2) \ A) \geq \min(\alpha, \beta)} \quad (13)$$

$$\frac{\text{N}(B \text{ fd}(\text{L}_1) \ A) \geq \alpha \quad \text{N}(C \text{ fd}(\text{L}_2) \ B) \geq \beta}{\text{N}(C \text{ fd}(\text{L}_1 \oplus \text{L}_2) \ A) \geq \min(\alpha, \beta)} \quad (14)$$

Preuve. Considérons la preuve de (11) et (12). Il est facile de voir que les deux assertions initiales de (11) s'écrivent $\text{N}(b \text{ E}(\text{L}_1) \ a') \geq \alpha$ et $\min(\text{N}(c \text{ G}((\text{L}_2)_+^c) \ a), \text{N}(a' \text{ G}((\text{L}_2)_+^c) \ c')) \geq \beta$ respectivement. Maintenant, par application du schéma (10) sur $\text{N}(b \text{ E}(\text{L}_1) \ a') \geq \alpha$ et $\text{N}(a' \text{ G}((\text{L}_2)_+^c) \ c') \geq \beta$, on déduit $\text{N}(b \text{ E}(\text{L}_1) \circ \text{G}((\text{L}_2)_+^c) \ c') \geq \min(\alpha, \beta)$ qui implique que $\text{N}(b \text{ G}((\text{L}_2)_+^c \oplus \text{L}_1) \ c') \geq \min(\alpha, \beta)$, selon la règle R_7 . Ceci signifie que $\text{N}(C \text{ fb}((\text{L}_2) \ B) \geq \min(\alpha, \beta)$.

D'une manière similaire, on peut prouver le schéma (12) en remarquant que ses conditions initiales s'écrivent aussi $\text{N}(b \text{ G}((\text{L}_1)_+^c) \ a') \geq \alpha$ et $\min(\text{N}(c \text{ G}((\text{L}_2)_+^c) \ a), \text{N}(a' \text{ G}((\text{L}_2)_+^c) \ c')) \geq \beta$ respectivement. Par (10), on obtient $\text{N}(b \text{ G}((\text{L}_1)_+^c) \circ \text{G}((\text{L}_2)_+^c) \ c') \geq \min(\alpha, \beta)$. Ainsi, on conclut que $\text{N}(b \text{ G}((\text{L}_1)_+^c \oplus (\text{L}_2)_+^c) \ c') \geq \min(\alpha, \beta)$, par la règle R_6 . Ceci signifie que $\text{N}(C \text{ fb}(\text{L}_1 \oplus \text{L}_2) \ B) \geq \min(\alpha, \beta)$. ♦

Des résultats similaires peuvent être aussi prouvés en changeant F -pendant par F -chevauche dans les schémas (11) et (12), et F -commence par F -égal dans le schéma (13).

5. Conclusion

Dans ce papier, nous avons suggéré comment les différents problèmes soulevés par le caractère flou des catégories utilisées pour exprimer l'information, peuvent être traités en raisonnement temporel. Particulièrement, nous avons fourni une extension, basée sur les ensembles flous, de l'approche d'Allen sur la représentation à base d'intervalles des relations temporelles. Le raisonnement basé sur les relations temporelles floues peut être mis en œuvre en utilisant les règles d'inférence qui s'expriment en termes des comparateurs absolus flous $\text{E}(\text{L})$ et $\text{G}(\text{K})$, d'une manière simple et naturelle. Par ailleurs, nous avons montré comment l'incertitude sur des relations d'Allen entre deux intervalles (ou leurs versions floues), peut être traitée en termes des mesures de nécessité, et à l'aide de schémas de raisonnement déductif généralisé. Ce travail peut être développé selon plusieurs directions, en particulier par l'adaptation des algorithmes de propagation des relations temporelles classiques aux relations floues. Enfin, une autre ligne prometteuse [7] pour des futurs travaux de recherche concerne l'extension de certaines idées présentées ici au raisonnement spatial flou, tout en s'inspirant aussi de travaux existants [5], [14], ou [3].

Bibliographie

- [1] J. F. Allen, Maintaining knowledge about temporal intervals, Comm. of the ACM, 26, pp. 832-843, 1983.
- [2] S. Barro, R. Marin, J. Mira, A. Paton, A Model and a language for the fuzzy representation and handling of time, Fuzzy Sets and Systems, 17, pp. 141-164, 1994.
- [3] I. Bloch, Logique modale et relations spatiales qualitatives à partir de dilations et d'érosions algébriques et morphologiques, Proc. 13^{ème} Congrès de Reconnaissance des Formes et d'Intelligence Artificielle, Angers, pp. 1003-1012, 2002.
- [4] M.A. Cárdenas, R. Marin, I. Navarette, Fuzzy temporal constraint logic: a valid resolution principle, Fuzzy sets and Systems, 117, pp. 231-250, 2001.
- [5] M. A. Cobb, F. E. Petry, K.B. Shaw, Fuzzy spatial relationship refinements based on minimum bounding rectangle variations, Fuzzy Sets and Systems, 113, pp. 111-120, 2000.
- [6] D. Dubois, A. HadjAli, H. Prade, Fuzzy qualitative reasoning with words, In: Computing with Words (Paul P. Wang, ed.), in a Series of Books on Intelligent Systems, John Wiley & Son, pp. 347-366, 2001.
- [7] D. Dubois, A. HadjAli, H. Prade, Des relations temporelles floues aux relations spatiales floues. *A paraître dans* : Actes de la 13^{ème} Conférence Francophone sur la Logique Floue et ses Applications (LFA'2003), Tours, France, 26-27 Novembre, 2003.
- [8] D. Dubois, J. Lang, H. Prade, timed possibilistic logic, Fundamentae Informaticae, 15, pp. 211-234, 1991.
- [9] D. Dubois, H. Prade, Possibility Theory, Plenum Press, 1988.

- [10] D. Dubois, H. Prade, Processing fuzzy temporal knowledge, IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, 19, pp. 729-744, 1989.
- [11] D. Dubois, H. Prade, Fuzziness and certainty in temporal reasoning, Proc. ECAI-2002 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning, Lyon, 2002.
- [12] C. Freksa, Temporal reasoning based on semi-intervals, Artificial Intelligence, 54, pp. 199-227, 1992.
- [13] L. Godo, L. Vila, Possibilistic temporal reasoning based on fuzzy temporal constraints, Proc. of the 14th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'95), Montréal, pp. 1916-1922, 1995.
- [14] H.W. Guesgen, J. Albrecht, Imprecise reasoning in geographic information systems, Fuzzy Sets and Systems, 113, pp. 121-131, 2000.
- [15] H.W. Guesgen, J. Hertzberg, A. Philpott, Towards implementing fuzzy Allen relations, Proc. ECAI-94 Workshop on Spatial and Temporal Reasoning, Amsterdam, The Netherlands, pp. 49-55, 1994.
- [16] A. HadjAli, D. Dubois, H. Prade, Qualitative reasoning based on fuzzy relative orders of magnitude, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 11, pp. 9-23, 2003.
- [17] D. Q. Qian, Y. Z. Lu, A strategy of problem solving in a fuzzy reasoning network, Fuzzy Sets and Systems, 33, pp. 137-154, 1994.
- [18] L. Vila, L. Godo, On fuzzy temporal constraint networks, Mathware & Soft Computing, 1, pp. 315-334, 1994.
- [19] J. Wainer, S. Sandri, Fuzzy temporal categorical and intensity information in diagnosis, Lectures Notes in AI, Vol. 1515, Springer, pp. 181-190, 1998.

Annexe :

B r ₂ C													
A r ₁ B	fb(L ₂)	fa(L ₂)	fm(L ₂)	fmi(L ₂)	fo(L ₂)	foi(L ₂)	fd(L ₂)	fdi(L ₂)	fs(L ₂)	fsi(L ₂)	ff(L ₂)	ffi(L ₂)	fe(L ₂)
fb(L ₁)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	T-IND	fb(L ₁)	<fb..fd> (L ₁)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	<fb..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	<fb..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	fb(L ₁)	fb(L ₁)	<fb..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	fb(L ₁)
fa(L ₁)	T-IND	fa(L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fd> (L ₁)	fa(L ₁)	<fa..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fd> (L ₁)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁)	fa(L ₁)	fa(L ₁)
fm(L ₁)	fb(L ₂)	<fa..fdi> (L ₂)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	<ff..ffi> (L ₁ ⊕L ₂)	fb(L ₂)	<fo..fd> (L ₂)	<fo..fd> (L ₂)	fb(L ₂)	fm (L ₁ ⊕L ₂)	fm (L ₁ ⊕L ₂)	<fo..fd> (L ₂)	fb(L ₂)	fm (L ₁ ⊕L ₂)
fmi(L ₁)	<fb..fdi> (L ₂)	fa(L ₂)	<fs..fsi> (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	<foi..fd> (L ₂)	fa(L ₂)	<foi..fd> (L ₂)	fa(L ₂)	<foi..fd> (L ₂)	fa(L ₂)	fmi (L ₁ ⊕L ₂)	fmi (L ₁ ⊕L ₂)	fmi (L ₁ ⊕L ₂)
fo(L ₁)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	fb(L ₁)	<foi..fdi> (L ₁)	<fb..fo> (L ₁ ⊕L ₂)	P-IND	<fo..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	<fb..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	fo (L ₂ ⊕L ₁)	<foi..fdi> (L ₁)	<fo..fd> (L ₁)	<fb..fo> (L ₁ ⊕L ₂)	fo(L ₁)
foi(L ₁)	<fb..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	<fo..fdi> (L ₁)	fa(L ₁)	P-IND	<fa..foi> (L ₁ ⊕L ₂)	<foi..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	<foi..fd> (L ₁)	<fa..foi> (L ₁)	foi(L ₁)	<foi..fd> (L ₁)	foi(L ₁)
fd(L ₁)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	fb(L ₁)	fa(L ₁)	<fb..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fd> (L ₁ ⊕L ₂)	fd (L ₁ ⊕L ₂)	T-IND	fd(L ₁)	<fa..fd> (L ₁)	fd(L ₁)	<fb..fd> (L ₁)	fd(L ₁)
fdi(L ₁)	<fb..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	<fa..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	<fo..fdi> (L ₁)	<foi..fdi> (L ₁)	<fo..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	<foi..fdi> (L ₁ ⊕L ₂)	P-IND	fdi (L ₁ ⊕L ₂)	<fo..fdi> (L ₁)	fdi(L ₁)	<foi..fdi> (L ₁)	fdi(L ₁)	fdi(L ₁)
fs(L ₁)	fb (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₂)	fb(L ₁)	fmi (L ₁ ⊕L ₂)	<fb..fo> (L ₂)	<foi..fd> (L ₂)	fd(L ₂)	<fb..fdi> (L ₂)	fs(L ₁ ⊕L ₂)	<fs..fsi> (L ₁ ⊕L ₂)	fd(L ₂)	<fb..fo> (L ₂)	fs(L ₁)
fsi(L ₁)	<fb..fdi> (L ₂)	fa(L ₂)	<fo..fdi> (L ₁)	fmi (L ₁ ⊕L ₂)	<fo..fdi> (L ₂)	foi(L ₂)	<foi..fd> (L ₂)	fdi(L ₂)	<fs..fsi> (L ₁ ⊕L ₂)	fsi (L ₁ ⊕L ₂)	foi(L ₂)	fdi(L ₂)	ffi(L ₁)
ff(L ₁)	fb(L ₂)	fa(L ₁ ⊕L ₂)	fm (L ₁ ⊕L ₂)	fa(L ₁)	<fo..fd> (L ₂)	<fa..foi> (L ₂)	fd(L ₂)	<fa..fdi> (L ₂)	fd(L ₂)	<fa..foi> (L ₂)	ff(L ₁ ⊕L ₂)	<ff..ffi> (L ₁ ⊕L ₂)	ff(L ₁)
ffi(L ₁)	fb(L ₂)	<fa..fdi> (L ₂)	fm (L ₁ ⊕L ₂)	<foi..fdi> (L ₁)	fo(L ₂)	<foi..fdi> (L ₂)	<fo..fd> (L ₂)	fdi(L ₂)	fo(L ₂)	fdi(L ₂)	<ff..ffi> (L ₁ ⊕L ₂)	ffi (L ₁ ⊕L ₂)	ffi(L ₁)
fe(L ₁)	fb(L ₂)	fa(L ₂)	fm (L ₁ ⊕L ₂)	fmi (L ₁ ⊕L ₂)	fo(L ₂)	foi(L ₂)	fd(L ₂)	fdi(L ₂)	fs(L ₂)	fsi(L ₂)	ff(L ₂)	ffi(L ₂)	fe(L ₁ ⊕L ₂)

Table 3: Composition des relations d'Allen floues.

$$\mathbb{L} = ((L_1 \oplus (L_2)_+^c) \cup ((L_1)_+^c \oplus L_2))^c, \quad \mathbb{L}_1 = ((L_1)_+^c \oplus L_2)^c, \quad \mathbb{L}_2 = (L_1 \oplus (L_2)_+^c)^c.$$