

Raisonner qualitativement avec des croyances partiellement ordonnées

Qualitative reasoning with partially ordered beliefs

S. Benferhat¹

S. Lagrue^{1,2,3}

O. Papini³

¹ CRIL - CNRS
Université d'Artois,
Rue Jean Souvraz, SP 18
62307 Lens Cedex, France

² SOMEI/PRAXITEC
115, rue St Jacques,
13006 Marseille, France

³ SIS
Université de Toulon et du Var,
Avenue de l'Université BP 132,
83957 La Garde cedex, France

benferhat@cril.univ-artois.fr

lagrue@univ-tln.fr

papini@univ-tln.fr

Résumé

Dans de nombreuses applications, la fiabilité entre les informations disponibles est seulement partiellement définie. Cependant, la plupart des travaux permettant de gérer l'incertain ne sont utilisables qu'avec des pré-ordres totaux. Pourtant gérer ces incomparabilités offrirait plus de flexibilité afin de représenter des croyances incomplètes.

Parmi les travaux permettant de gérer l'incertain, la logique possibiliste est une extension de la logique classique permettant de traiter qualitativement des informations totalement ordonnées. Les priorités sont explicitées à l'aide de formules pondérées dont les poids représentent les bornes inférieures de mesures de nécessité.

Nous proposons dans ce papier deux extensions différentes de la logique possibiliste, tant d'un point de vue sémantique que d'un point de vue syntaxique. Nous montrons que les concepts de base de la logique possibiliste trouve une contrepartie naturelle dans le cas des pré-ordres partiels. Enfin, nous montrons qu'une seule extension est vraiment adaptée à la gestion de croyances partiellement ordonnées.

Mots Clef

Croyances partiellement ordonnées, raisonnement dans l'incertain, pré-ordres partiels, logique possibiliste.

Abstract

In many applications, the reliability relation associated with available information is only partially defined, while most of existing uncertainty frameworks deal with totally ordered beliefs. Partial pre-orders offer more flexibility than total pre-orders to represent incomplete beliefs.

Possibilistic logic, which is an extension of classical logic, deals with totally ordered information. It offers a natural qualitative framework for handling uncertain information. Priorities are encoded by means of weighted formulas, where weights are lower bounds of necessity measures. This paper proposes an extension of Possibilistic logic for

dealing with partially beliefs. We show that there are two different ways to define a possibilistic logic machinery which both extend the standard one.

Keywords

Partially ordered beliefs, reasoning with uncertain beliefs, partial pre-orders, possibilistic logic.

1 Introduction

Dans de nombreuses applications, la fiabilité entre les différentes informations est seulement partiellement définie. La plupart des méthodes proposées pour gérer l'incertitude, dont la logique possibiliste, ne traitent que des croyances totalement ordonnées. Or, des pré-ordres partiels peuvent offrir plus de flexibilité que les pré-ordres totaux pour représenter de l'information incomplète. De plus, ils permettent de traiter des informations qui ne sont pas forcément comparables.

Le besoin d'extension des travaux sur l'incertain aux pré-ordres partiels est d'autant plus crucial si l'on considère la dynamique des croyances. En effet, même si les informations sont totalement ordonnées, il arrive qu'en utilisant certains opérateurs de mise à jour [14], l'incorporation d'une nouvelle information mène à des croyances partiellement ordonnées.

On retrouve ce problème lorsque l'on tente de fusionner différentes sources d'informations. En effet, l'application de méthodes de fusion basées sur les sous-ensembles préférés [5, 2], peut mener à un ensemble d'informations partiellement ordonnées.

La logique possibiliste est une extension de la logique classique qui permet de traiter des informations totalement ordonnées. Les priorités entre ces informations sont représentées à l'aide de formules pondérées, où chaque poids représente la borne inférieure d'une mesure de nécessité. La logique possibiliste possède une inférence syntaxique, correcte et complète par rapport à une inférence

sémantique basée sur des distributions de possibilité. Enfin sa complexité est très proche de celle de la logique classique.

Ainsi, ce papier propose une extension des notions de base de la logique possibiliste [8] à l'information partiellement ordonnée. En d'autres termes, nous utilisons un pré-ordre partiel au lieu d'associer à chaque formule propositionnelle (ou chaque interprétation) un réel dans $[0, 1]$. Deux méthodes étendant la logique possibiliste sont présentées. Ce papier complète les résultats obtenus dans [3].

Le papier est organisé comme suit. La section 2 introduit brièvement la logique possibiliste tandis que la section 3 introduit différentes définitions concernant les pré-ordres partiels. La section 4 propose une extension sémantique de la logique possibiliste tandis que la section 5 propose deux inférences syntaxiques. Enfin, deux méthodes différentes sont proposées pour représenter de façon compacte un pré-ordre partiel sur les interprétations à l'aide d'un pré-ordre partiel sur les formules. La section 6 discute des propriétés des deux inférences définies.

2 Quelques notions de base en logique possibiliste

Nous considérons $\mathcal{L}$ comme étant un langage propositionnel fini. Ω représente l'ensemble des interprétations de $\mathcal{L}$, et ω représente un élément de Ω . Enfin si φ représente une formule, alors $Mod(\varphi)$ représente l'ensemble des modèles de φ .

L'élément de base de la sémantique de la logique possibiliste est la distribution de possibilité [9], notée π , qui est une fonction de Ω dans l'intervalle $[0, 1]$. $\pi(\omega)$ évalue à quel point ω est compatible, ou cohérent, avec nos croyances disponibles. $\pi(\omega) = 0$ signifie que ω est impossible, $\pi(\omega) = 1$ signifie que ω est totalement possible. $\pi(\omega) \geq \pi(\omega')$ signifie que ω est plus plausible que ω' . Une distribution π est dite normalisée, ou cohérente, si il existe une interprétation ω telle que $\pi(\omega) = 1$. Un pré-ordre total sur les interprétations, $\leq_\pi$, peut être associé à une distribution de possibilité :

$$\forall \omega, \omega' \in \Omega, \omega \leq_\pi \omega' \text{ ssi } \pi(\omega') \leq \pi(\omega).$$

Nous notons $Pref(\pi)$ l'ensemble des interprétations préférées, i.e., celles qui ont le plus grand degré de possibilité. Plus formellement :

$$Pref(\pi) = \{\omega \in \Omega : \nexists \omega', \pi(\omega') > \pi(\omega)\}.$$

Une formule ψ est une conséquence plausible de nos croyances (représentées par π), noté $\pi \models \psi$ si et seulement si $Pref(\pi) \subseteq Mod(\psi)$.

Exemple 1 Soit a et b deux variables propositionnelles et $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ l'ensemble des interprétations tel que $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$, $\omega_1 = \{\neg a, b\}$, $\omega_2 = \{a, \neg b\}$ et $\omega_3 = \{a, b\}$. Soit π une distribution de possibilité telle que $\pi(\omega_0) = 0$, $\pi(\omega_1) = 0.5$ et $\pi(\omega_2) = \pi(\omega_3) = 1$.

La formule $a \vee b$ est conséquence plausible de π . En effet, nous avons $Mod(a \vee b) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ qui contient $Pref(\pi) = \{\omega_2, \omega_3\}$.

D'un point de vue syntaxique, les informations incertaines sont représentées au moyen de bases de croyances possibilistes. Une base de croyances possibiliste K est un ensemble de formules pondérées de la forme $K = \{(\varphi_i, \alpha_i) : i = 1, \dots, n\}$, où φ_i est une formule propositionnelle et $\alpha_i \in [0, 1]$. Le réel α_i représente la borne inférieure du degré de certitude de la formule φ_i . Une base de croyances possibiliste contient uniquement des informations un tant soit peu certaine. Effectivement, toutes les formules ayant pour poids 0 peuvent être retirées de K sans aucun changement pour l'inférence (voir [8] pour plus de détails).

En outre, une base de croyances possibiliste peut être représentée par un pré-ordre total $\leq_K$ sur un ensemble de formules :

$$\varphi \leq_K \varphi' \text{ ssi } (\varphi, \alpha), (\varphi', \beta) \in K \text{ et } \beta \leq \alpha.$$

Les formules minimales pour $\leq_K$ sont celles qui ont le plus grand poids et donc sont celles qui sont préférées.

En logique possibiliste, une même formule peut apparaître avec différents poids. Par exemple, il est possible de considérer une base de croyances possibiliste K telle que $K = \{(a, 0.6), (b, 0.4), (a, 0.2)\}$. Dans ce cas, des précautions doivent être prises avant de construire $\leq_K$. Deux solutions sont possibles. L'une étant de supprimer toutes les formules redondantes avec les poids les moins élevés (ce qui conduit aux mêmes conclusions, voir [8]). Une autre solution consiste à remplacer les formules identiques par des formules syntaxiquement différentes mais logiquement équivalentes. Par exemple la formule pondérée $(a, 0.2)$ peut être remplacée par $(a \vee a, 0.2)$.

Supposons que $K_{\geq \alpha}$ représente l'ensemble des formules propositionnelles de K qui ont un poids au moins égal à α , i.e. $K_{\geq \alpha} = \{\varphi : (\varphi, \beta) \in K, \beta \geq \alpha\}$. Le degré d'incohérence d'une base de croyances possibiliste K est noté $Inc(K)$ et est défini ainsi :

$$Inc(K) = \min\{\alpha : K_{\geq \alpha} \text{ soit cohérent}\}.$$

Une formule ψ est syntaxiquement déduite de K , noté par $K \vdash_\pi \psi$, si et seulement si :

$$Inc(K) < Inc(K \cup \{(\neg \psi, 1)\}).$$

Il a été démontré que l'inférence possibiliste est basée sur une sous-base classique de K composée des formules propositionnelles dont le poids est strictement supérieur au degré d'incohérence de K [8].

Exemple 2 Soit $K = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5)\}$. Montrons que la formule $a \vee b$ est conséquence de K . Nous avons $Inc(K) = 0$ et $Inc(K \cup \{(\neg a \wedge \neg b, 1)\}) = 1$, or $Inc(K) < Inc(K \cup \{(\neg a \wedge \neg b, 1)\})$. Plus généralement ; comme K est cohérente (i.e., $Inc(K) = 0$), alors ψ est

une conséquence plausible de K si et seulement si ψ est une conséquence classique de l'ensemble des formules de K , en d'autres termes $\{a \vee b, a\}$, et donc, de façon équivalente, de la formule a .

Toute base de croyances possibiliste induit une unique distribution de possibilités, notée π_K . L'idée est de considérer que les interprétations qui satisfont toutes les formules de K sont complètement possibles et de leur associer le degré de possibilité le plus élevé c'est à dire 1. Les autres interprétations sont ordonnées en fonction de la plus grande formule qu'elles falsifient. Plus formellement, $\forall \omega \in \Omega$:

$$\pi_K(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall (\varphi, a) \in K : \omega \models \varphi, \\ 1 - \max\{a : (\varphi, a) \in K \text{ et } \omega \not\models \varphi\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exemple 3 Calculons la distribution de possibilité π_K associée à la base $K = \{(a \vee b, 1), (a, 0.5)\}$. Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ tel que $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$, $\omega_1 = \{\neg a, b\}$, $\omega_2 = \{a, \neg b\}$ et $\omega_3 = \{a, b\}$. Nous avons $\pi_K(\omega_0) = 0$, $\pi_K(\omega_1) = 0.5$, et $\pi_K(\omega_2) = \pi_K(\omega_3) = 1$, qui est la même distribution que celle proposée dans l'exemple 1.

L'inférence sémantique coïncide avec l'inférence syntaxique. Ainsi, si π_K représente la distribution de possibilité associée à la base de croyances possibiliste K , alors [8] :

$$\forall \psi \in \mathcal{L}, \pi_K \models \psi \text{ ssi } K \vdash_{\pi} \psi.$$

On peut remarquer que toutes les tautologies peuvent être retirées de K , sans changer la distribution de possibilité associée. De même, il a été montré dans [8] que les formules sous-sommées peuvent être retirées elles aussi. Une formule φ est dite sous-sommée si elle peut être déduite d'une autre formule qui a un poids strictement plus élevé qu'elle.

Enfin, toutes les formules pondérées peuvent être transformées de façon équivalente en leur forme normale conjonctive. Si (φ, a) appartient à K et $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_n$ représente la forme normale conjonctive de φ , alors (φ, a) peut être remplacée par (C_1, a) , (C_2, a) , $\dots$, (C_n, a) sans changer la distribution de possibilité induite [8].

3 Pré-ordres partiels : définitions et notations

3.1 Définitions basiques

Un pré-ordre partiel $\preceq$ sur un ensemble A est une relation binaire réflexive ($a \preceq a$) et transitive (si $a \preceq b$ et $b \preceq c$ alors $a \preceq c$). Dans toute la suite de ce papier, $a \preceq b$ signifie intuitivement que a est au moins aussi préféré¹ que b .

Un ordre partiel strict $\prec$ sur un ensemble A est une relation binaire irreflexive (on ne peut avoir $a \prec a$) et transitive

¹Ce papier se focalise sur la gestion de croyances, en non sur la gestion de préférences au sens de la théorie de la décision. Le terme « est préféré » est à prendre dans son sens le plus large. Il peut être remplacé par « est plus sûr », « est plus plausible », « est de meilleure qualité », « est plus fiable », etc.

(nous utilisons « ordre partiel strict » et non « pré-ordre partiel strict » car un ordre partiel strict est forcément anti-symétrique). $a \prec b$ signifie intuitivement que a est strictement préféré à b . Un ordre partiel strict est généralement défini à partir d'un pré-ordre partiel de la façon suivante : $a \prec b$ si on a $a \preceq b$ mais pas $b \preceq a$.

L'égalité est définie par $a \approx b$ ssi $a \preceq b$ et $b \preceq a$. Ainsi $a \approx b$ signifie que a et b sont aussi préférés l'un que l'autre. L'incomparabilité entre deux éléments, notée $\sim$, est définie par $a \sim b$ si et seulement si on n'a ni $a \preceq b$ ni $b \preceq a$. Ainsi $a \sim b$ signifie que a n'est pas préféré à b et que b n'est pas préféré à a .

Dans la suite de ce papier $a \not\preceq b$ (resp. $a \not\prec b$, $a \not\approx b$) signifie qu'on a pas $a \preceq b$ (resp. $a \prec b$, $a \approx b$).

Un pré-ordre total $\leq$ est une relation réflexive et transitive telle que $\forall a, b \in A : a \leq b$ ou $b \leq a$.

Soit $\prec$ un ordre partiel strict sur un ensemble A . L'ensemble des éléments minimaux de A pour $\prec$ est défini ainsi :

$$\text{Min}(A, \prec) = \{a : a \in A, \nexists b \in A, b \prec a\}.$$

Seule la relation stricte est utilisée pour déterminer les éléments minimaux de A .

3.2 D'un pré-ordre partiel sur les éléments à un pré-ordre partiel sur les sous-ensemble

Soit un pré-ordre partiel $\preceq$ sur un ensemble fini A et son ordre partiel strict associé $\prec$. Nous avons besoin, pour la suite de ce papier, de comparer les sous-ensembles de A . Intuitivement, un sous-ensemble X est préféré à un sous-ensemble Y si les meilleurs éléments de X sont préférés aux meilleurs éléments de Y . Selon Halpern [12] (voir aussi Cayrol et al. [6] dans le cadre de gestion de préférences), il y a deux principales méthodes pour comparer les sous-ensembles de A . Ces deux relations sur 2^A seront appelés respectivement relation « forte » et « faible ». Dans les deux cas, la relation de préférence sera obtenue en explicitant un pré-ordre partiel et un ordre partiel strict.

Considérons tout d'abord la relation « forte ». Soit $\preceq$ un pré-ordre partiel sur un ensemble A et $\prec$ son ordre total associé, défini par $a \prec b$ ssi $a \preceq b$ et $a \not\preceq b$.

La première manière de définir une relation de préférence sur les sous-ensembles X et Y de A est de considérer que X est préféré à Y si il existe au moins un élément dans X qui est préféré à tous les éléments de Y . Plus formellement :

Définition 1 Soit $\preceq$ un pré-ordre partiel sur A et $X, Y \subseteq A$ (avec X ou Y non-vide) :

– X est « fortement » préféré à Y , noté $X \preceq_s Y$, ssi $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$ tel que $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec), x \preceq y$,

²Comme nous considérons que A est fini, $\text{Min}(A, \prec)$ n'est jamais vide. L'extention au cas infini nécessite la propriété de « well foundedness » des pré-ordres partiels considérés.

- X est strictement « fortement » préféré à Y , noté $X \prec_s Y$, ssi $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$ tel que $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec)$, $x \prec y$,
- l'égalité « forte », notée $\approx_s$, est simplement définie par : $X \approx_s Y$ ssi $X \preceq_s Y$ et $Y \preceq_s X$.
Si $X = Y = \emptyset$, alors nous avons $X \preceq_s Y$ et $Y \preceq_s X$.

La relation $\preceq_s$ est transitive mais n'est pas réflexive. Par exemple, si nous considérons $A = \{a, b\}$ et $\preceq$ tel que $a \sim b$ alors $\{a, b\} \not\preceq_s \{a, b\}$. Par contre $\prec_s$ est un ordre partiel strict, c'est à dire qu'il est irréflexif et transitif. Afin de clarifier les relations entre $\prec_s$ et $\preceq_s$, nous avons établi les propriétés suivantes. Soient X, Y et $\subseteq A$:

1. si $X \prec_s Y$ alors $X \preceq_s Y$,
2. si $X \prec_s Y$ et $Y \preceq_s Z$ alors $X \prec_s Z$,
3. si $X \preceq_s Y$ et $Y \prec_s Z$ alors $X \prec_s Z$,
4. si $X \prec_s Y$ alors on a $X \preceq_s Y$ et $Y \not\preceq_s X$.

La réciproque de 4. est fausse, ainsi que l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 4 Soit $A = \{a, b\}$, $X = \{a, b\}$ et $Y = \{a\}$. Supposons que $\preceq$ est un pré-ordre partiel tel que $a \sim b$. Alors on a bien $X \preceq_s Y$ (en effet, $a \in X$ est préférée à tous les éléments de Y) et $Y \not\preceq_s X$. En revanche, on n'a pas $X \prec_s Y$.

L'une des limitations de la préférence « forte » est qu'elle produit de nombreuses incomparabilités, ainsi que l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 5 Soit $\preceq$ un pré-ordre sur un ensemble A tel que $A = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, $x_1 = y_1$ et $x_2 = y_2$. Soient $X, Y \subseteq A$ tels que $X = \{x_1, x_2\}$ et $Y = \{y_1, y_2\}$. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que X et Y soient également préférés. Pourtant, en appliquant la définition 1, on a ni $X \preceq_s Y$, ni $Y \preceq_s X$.

Parmi les autres raisons pour lesquelles $\preceq_s$ n'est pas désirable, nous pouvons citer le fait qu'elle ne satisfait pas la propriété de monotonie ($Y \subseteq X$ implique $X \preceq_s Y$), qui est une propriété attendue pour une mesure de plausibilité [13]. Par exemple, prenons $A = \{a, b, c\}$, $X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{a, b\}$. Supposons que $\preceq$ soit un pré-ordre partiel sur A tel que $a \sim b$, $a \sim c$ et $b \sim c$. Alors, on a bien $Y \subseteq X$, mais on n'a pas $X \preceq_s Y$.

Nous présentons maintenant la relation « faible ». Une autre façon de définir une relation de préférence sur des sous-ensembles X et Y de A est de considérer que X est préféré à Y si pour tous les éléments y de Y , il existe au moins un élément x dans X qui soit préféré à y , plus formellement :

Définition 2 Soit $\preceq$ un pré-ordre partiel sur A et $X, Y \subseteq A$ (ni X , ni Y ne sont vides) :

- X est « faiblement » préféré à Y , noté $X \preceq_w Y$ ssi $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec)$, $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$ tel que $x \preceq y$,

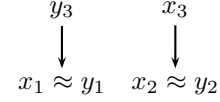


FIG. 1 – $X \not\preceq_s Y$ et $X \approx_w Y$

- X est strictement « faiblement » préféré à Y , noté $X \prec_w Y$ ssi $\forall y \in \text{Min}(Y, \prec)$ $\exists x \in \text{Min}(X, \prec)$, tel que $x \prec y$,
- l'égalité « faible », noté $\approx_w$, est définie par $X \approx_w Y$ ssi $X \preceq_w Y$ et $Y \preceq_w X$.
Si $X = Y = \emptyset$, on a $X \preceq_w Y$ et $Y \preceq_w X$.

Il peut être montré que $\preceq_w$ est un pré-ordre partiel (réflexif et transitif) et que $\prec_w$ est un ordre partiel strict (irréflexif et transitif)

La proposition suivante donne une définition équivalente de $\approx_w$.

Proposition 3 Soient X et Y deux sous-ensembles non vides de A , $\preceq$ un pré-ordre partiel sur A et $\prec$ son ordre partiel strict usuellement associé. Alors :

$$X \approx_w Y \text{ ssi } X \preceq_w Y \text{ et } \preceq_w X \text{ ssi } \forall x \in \text{Min}(X, \prec), \exists y \in \text{Min}(Y, \prec) \text{ tel que } x \approx y \quad \text{et} \\ \forall y \in \text{Min}(Y, \prec), \exists x \in \text{Min}(X, \prec) \text{ tel que } x \approx y.$$

Exemple 6 La figure 1 montre un cas où $X \not\preceq_s Y$ et $X \approx_w Y$, avec $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Une flèche $x \leftarrow y$ signifie que $x \prec y$. Pour plus de lisibilité, la transitivité et la réflexivité ne sont pas représentées. On a donc $\text{Min}(X, \prec) = \{x_1, x_2\}$ et $\text{Min}(Y, \prec) = \{y_1, y_2\}$. On a $X \approx_w Y$, car $x_1 \approx y_1$ et $x_2 \approx y_2$, mais $X \preceq_s Y$ n'est pas vérifié : il n'existe pas d'élément dans X qui soit au moins aussi préféré que tous les éléments de Y .

Plus généralement, il peut être démontré que la définition de $\prec_s$ (resp. $\preceq_s$) implique la définition de $\prec_w$ (resp. $\preceq_w$), plus précisément :

$$\forall X, Y \subseteq A, \text{ si } X \prec_s Y \text{ alors } X \prec_w Y, \\ \forall X, Y \subseteq A, \text{ si } X \preceq_s Y \text{ alors } X \preceq_w Y.$$

Néanmoins le contre-exemple suivant montre que la contrepartie est fausse.

Exemple 7 Soit $A = \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$ et $\preceq$ un pré-ordre partiel sur A et $\prec$ son ordre partiel strict usuellement associé tel que $x_1 \prec y_1$ et $x_2 \prec y_2$ (voir la figure 2).

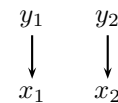


FIG. 2 – $X \not\preceq_s Y$ et $X \prec_w Y$

Soient X et Y deux sous ensembles de A tels que $X = \{x_1, x_2\}$ et $Y = \{y_1, y_2\}$. Nous avons $X \prec_w Y$, en effet x_1 est préféré à y_1 et x_2 est préféré à y_2 . En revanche, on n'a pas $X \prec_s Y$: il n'y a pas d'élément dans X qui soit préféré à tous les meilleurs éléments de Y .

Les propriétés suivantes décrivent les liens entre $\preceq_w$ et $\prec_w$, soient $X, Y, Z \subseteq A$, alors :

1. si $X \prec_w Y$ alors $X \preceq_w Y$,
2. si $X \prec_w Y$ et $Y \preceq_w Z$ alors $X \prec_w Z$,
3. si $X \preceq_w Y$ et $Y \prec_w Z$ alors $X \prec_w Z$,
4. si $X \prec_w Y$ alors on a $X \preceq_w Y$. En revanche, on a pas $Y \preceq_w X$.

Comme pour la préférence « forte », la contrepartie de 4. est fautive, comme le montre le même (contre-) exemple 4. La propriété de stricte monotonie (définie par $X \subset Y$ implique $X \prec Y$), qui n'est pas désirable dans le cadre de la théorie des possibilités, n'est vérifiée ni par la préférence « forte », ni par la préférence « faible ».

En revanche, la propriété de monotonie, qui elle est désirable, est vérifiée par $\preceq_w$:

$$X \subseteq Y \text{ implique } X \preceq_w Y.$$

Enfin la proposition suivante montre que, dans le cas où $\preceq$ est un pré-ordre total, les deux relations $\prec_w$ et $\prec_s$ sont équivalentes.

Proposition 4 Soit $\preceq$ un pré-ordre total sur A :

$$\forall X, Y \subseteq A \text{ et } X, Y \neq \emptyset, X \prec_w Y \text{ ssi } X \prec_s Y.$$

4 Une extension sémantique de la logique possibiliste

L'extension de la logique possibiliste à des échelles de valuations différentes de $[0, 1]$ a déjà été étudiée, par exemple dans [7, 15, 10].

4.1 Utiliser un treillis booléen pour représenter un pré-ordre partiel

Dans leur volonté de traiter à la fois l'incertain et le temporel dans un cadre logique, Dubois et al. utilisent un treillis booléen S^T , où T représente un ensemble de temps possibles, à la place de l'intervalle $[1, 0]$. $\pi(\omega) = \mathcal{T} \subseteq T$ signifie qu'à toute instance de $\mathcal{T}$, ω est possible (tout au moins non exclue). Les concepts de nécessité et de possibilité sont naturellement étendus, les opérateurs maximum, minimum et le renversement d'échelle étant remplacés respectivement par l'union, l'intersection et le complémentaire. Une formule pondérée aura la forme $(\varphi, \mathcal{T})$, avec $\mathcal{T} \subseteq T$, ce qui signifie que φ est vrai au moins pendant les temps de $\mathcal{T}$.

L'inférence possibiliste est elle aussi étendue lorsque l'on utilise un treillis booléen à la place de l'intervalle $[0, 1]$, le principe de résolution devenant :

$$(C, \tau), (C', \tau') \vdash (C \wedge C', \tau \cap \tau').$$

Le degré d'incohérence Inc d'un ensemble de formule F étant lui défini par $Inc(F) = \bigcup \{\tau, F \vdash (\perp, \tau)\}$. Une formule ψ sera conséquence plausible de F si $Inc(F \cup \{(\neg\psi, T)\}) > Inc(F)$.

Cette extension prend tout son sens dans la prise en charge d'informations temporelles dans le cadre de la logique possibiliste. Par contre, cette extension n'est pas satisfaisante dans le cadre de croyances incohérentes.

Exemple 8 Soit $\Sigma = \{\neg a, a, \neg b, b\}$ un ensemble de formules propositionnelles et $\preceq_\Sigma$ le pré-ordre associé représenté par la figure 3.

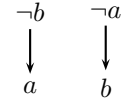


FIG. 3 – Exemple de $\preceq_\Sigma$

En d'autres termes, $\preceq_\Sigma$ est tel que $a \prec_\Sigma \neg b$ et $b \prec_\Sigma \neg a$. Essayons de plonger ce pré-ordre partiel dans un treillis booléen composé de trois instants tel que $T = \{t_1, t_2, t_3\}$ et représenté par la figure 4.

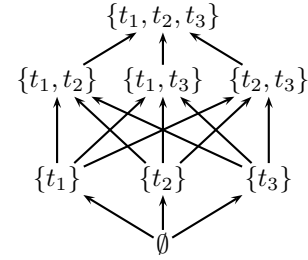


FIG. 4 – Un treillis booléen S^T

Une valuation possible pour chaque formule serait :

$$F = \{(a, \{t_1, t_2\}), (b, \{t_2, t_3\}), (\neg b, \{t_1\}), (\neg a, \{t_3\})\}.$$

Nous avons $Inc = \bigcup \{\tau, F \vdash (\perp, \tau)\} = \emptyset$. En effet, deux choix s'offrent à nous pour parvenir à $\perp$: $(a, \{t_1, t_2\}), (\neg a, \{t_3\}) \vdash (\perp, \emptyset)$ et $(b, \{t_2, t_3\}), (\neg b, \{t_1\}) \vdash (\perp, \emptyset)$.

Dans ce cas, en appliquant la méthode d'inférence ci-dessus, à la fois a et $\neg a$ peuvent être inférés (par exemple $Inc(F \cup \{(a, \{t_1, t_2, t_3\})\}) > \emptyset$), et donc toutes formules. Il ne semble pas très intuitif de considérer que la formule $a \wedge b$, composée des deux éléments préférés de Σ ne soit pas préférée à $\neg a \wedge \neg b$ qui comprend les deux éléments les moins préférés de Σ .

Ce papier se situe dans le même esprit que ces travaux : étendre $[0, 1]$ à d'autres échelles afin de pouvoir traiter l'incomparabilité entre différentes informations. Cependant, nous ne nous focalisons pas sur des treillis, mais sur des pré-ordres partiels, plus généraux.

4.2 Extension sémantique aux pré-ordres partiels

Une relation de plausibilité entre les éléments de Ω décrite à l'aide d'un pré-ordre $\preceq_\Omega$ et de son ordre strict $\prec_\Omega$ usuellement associé est l'extension d'une distribution de possibilité. $\omega \preceq_\Omega \omega'$ (resp. $\omega \prec_\Omega \omega'$) signifie que ω est au moins aussi plausible (resp. strictement plus plausible) que ω' .

Remarquons que contrairement à une distribution de possibilité, nous ne pouvons pas représenter les interprétations qui seraient totalement possibles (représentées par $\pi(\omega) = 1$), nous pouvons seulement représenter la notion de « meilleure » interprétation. De façon similaire, nous ne pouvons pas représenter les interprétations totalement impossibles (représentées par $\pi(\omega) = 0$), mais seulement les interprétations les moins plausibles. Ainsi, comme dans les fonctions conditionnelles ordinales de Spohn (OCF) [16], toutes les interprétations sont considérées quelque peu possibles.

Nos croyances étant représentées par $\preceq_\Omega$, une formule ψ est une conclusion plausible si elle satisfait toutes les interprétations préférées de $\preceq_\Omega$. Plus formellement :

Définition 5 Soit $\preceq_\Omega$ un pré-ordre partiel sur Ω et $\prec_\Omega$ son ordre partiel strict usuellement associé. Une formule ψ est inférée de $\preceq_\Omega$, noté $(\Omega, \prec_\Omega) \models \psi$, ssi $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega) \subseteq \text{Mod}(\psi)$.

Seul l'ordre partiel strict $\prec_\Omega$ intervient pour définir notre relation d'inférence.

Illustrons cette définition par l'exemple suivant.

Exemple 9 Soient a et b deux variables propositionnelles. Soit $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ tel que $\omega_0 = \{\neg a, \neg b\}$, $\omega_1 = \{\neg a, b\}$, $\omega_2 = \{a, \neg b\}$ et $\omega_3 = \{a, b\}$. Soit $\preceq_\Omega$ un ordre partiel sur Ω avec pour seule contrainte $\omega_3 \prec_\Omega \omega_0$ et représenté par la figure 5.

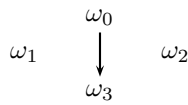


FIG. 5 – Exemple de $\prec_\Omega$

Alors la formule $a \vee b$ peut être inférée de $(\Omega, \prec_\Omega)$. En effet nous avons $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ et $\text{Mod}(a \vee b) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ qui contient $\text{Min}(\Omega, \prec_\Omega)$. Ainsi nous avons $(\Omega, \prec_\Omega) \models a \vee b$.

Cette inférence est une extension directe de celle utilisée en logique possibiliste. Plus formellement :

Proposition 6 Soit π une distribution de possibilité et $\leq_\pi$ le pré-ordre total associé à π , i.e.. $\omega \leq_\pi \omega'$ ssi $\pi(\omega') \leq \pi(\omega)$, alors :

$$\pi \models \psi \text{ ssi } (\Omega, \prec_\Omega) \models \psi.$$

5 Une extension syntaxique de la logique possibiliste

Cette section présente deux contreparties syntaxiques à l'inférence sémantique proposée dans la section précédente. Tout d'abord nous montrons comment représenter de façon compacte un pré-ordre partiel sur $\preceq_\Omega$ au moyen d'un pré-ordre partiel $\preceq_\Sigma$ sur un ensemble de formules Σ . Puis, à partir de cette relation, nous construisons une relation de préférence sur les ensembles cohérents de Σ qui sera finalement utilisée pour définir nos inférences syntaxiques.

5.1 Représentation compacte et inférence syntaxique

D'un point de vue sémantique, nous représentons des informations partiellement ordonnées par un couple $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, où Σ représente un ensemble de formules et $\preceq_\Sigma$ représente un pré-ordre partiel sur ces formules. Un tel couple sera appelé base de croyances partiellement ordonnées. Soient φ et φ' deux formules de Σ , $\varphi \preceq_\Sigma \varphi'$ signifie que φ est *au moins aussi préférée* (au moins aussi importante) que φ . $\varphi \prec_\Sigma \varphi'$ est défini usuellement par $\varphi \preceq_\Sigma \varphi'$ et $\varphi' \not\preceq_\Sigma \varphi$. Nous nous plaçons dans un cadre général où Σ n'a ni besoin d'être déductivement close ni même cohérente.

Pour définir nos inférences syntaxiques sur $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, nous avons tout d'abord besoin de définir une relation de préférence entre les sous-ensembles cohérents de Σ . Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble de tous les sous-ensembles cohérents de Σ , deux relations de préférence peuvent être définies, suivant l'utilisation des définitions 1 ou 2.

Définition 7 Soient $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$.

- $C_1 \preceq_{c,w} C_2$ (resp. $C_1 \preceq_{c,s} C_2$) ssi $\{\varphi_2 \notin C_2\} \preceq_w \{\varphi_1 \notin C_1\}$ (resp. $\{\varphi_2 \notin C_2\} \preceq_s \{\varphi_1 \notin C_1\}$),
- $C_1 \prec_{c,w} C_2$ (resp. $C_1 \prec_{c,s} C_2$) ssi $\{\varphi_2 \notin C_2\} \prec_w \{\varphi_1 \notin C_1\}$ (resp. $\{\varphi_2 \notin C_2\} \prec_s \{\varphi_1 \notin C_1\}$).

Intuitivement, C_1 est préféré à C_2 si les éléments n'appartenant pas à C_1 sont préférés aux éléments n'appartenant pas à C_2 . Ceci est une extension naturelle du « Best Out Ordering » utilisé dans [2] dans le cadre d'informations totalement ordonnées. Nous noterons Core_w (resp. Core_s) l'ensemble des sous-ensembles cohérents préférés de Σ pour $\prec_{c,w}$ (resp. $\prec_{c,s}$). Plus formellement :

$$\begin{aligned} \text{Core}_w &= \text{Min}(\mathcal{C}, \prec_{c,w}) \text{ et} \\ \text{Core}_s &= \text{Min}(\mathcal{C}, \prec_{c,s}). \end{aligned}$$

Exemple 10 (suite) Reprenons l'exemple 8. On remarquera que Σ est incohérente. $\mathcal{C}$ est composé de neuf sous-ensembles cohérents, listés dans le tableau 1.

C_i	$\{\varphi \in C_i\}$	$\{\varphi \notin C_i\}$	$Min(\{\varphi \notin C_i\}, \prec_\Sigma)$
C_0	$\emptyset$	$\{a, \neg a, b, \neg b\}$	$\{a, b\}$
C_1	$\{a\}$	$\{\neg a, b, \neg b\}$	$\{\neg b, b\}$
C_2	$\{\neg a\}$	$\{a, b, \neg b\}$	$\{a, b\}$
C_3	$\{b\}$	$\{a, \neg a, \neg b\}$	$\{a, \neg a\}$
C_4	$\{\neg b\}$	$\{a, \neg a, b\}$	$\{a, b\}$
C_5	$\{a, b\}$	$\{\neg a, \neg b\}$	$\{\neg a, \neg b\}$
C_6	$\{a, \neg b\}$	$\{\neg a, b\}$	$\{b\}$
C_7	$\{\neg a, \neg b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
C_8	$\{\neg a, b\}$	$\{a, \neg b\}$	$\{a\}$

TAB. 1 – Sous-ensembles cohérents de Σ .

Par exemple, nous avons $C_0 \approx_{C,w} C_2$. En effet, les éléments minimaux en dehors de C_0 (a et b) coïncident avec les éléments minimaux qui sont en dehors de C_2 . De même, nous avons : $C_0 \approx_{C,w} C_2 \approx_{C,w} C_4 \approx_{C,w} C_7$.

Nous avons aussi $C_5 \preceq_{C,w} C_1$, car tous les éléments préférés en dehors de C_5 ($\neg a$ ou $\neg b$) sont moins préférés qu'au moins un élément n'appartenant pas à C_1 (resp. $\neg b$ et b). De plus, on peut remarquer qu'on n'a pas $C_5 \prec_{C,w} C_1$.

Nous avons $C_5 \prec_{C,w} C_0$. En effet, pour chaque élément en dehors de C_5 ($\neg a$ ou $\neg b$), il existe un élément qui lui est strictement préféré et qui n'appartient pas à C_0 (resp. b et a).

La figure 6 donne une représentation graphique de $\preceq_{C,w}$ et de $\prec_{C,w}$. Les lignes pleines représentent $\prec_{C,w}$, tandis que les lignes en pointillés représentent $\preceq_{C,w}$. Pour plus de lisibilité, ni la transitivité, ni la réflexivité ne sont représentées.

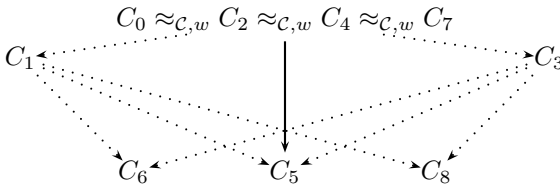


FIG. 6 – $\preceq_{C,w}$ et $\prec_{C,w}$

La figure 7 montre le même résultat pour $\preceq_s$ et $\prec_s$. Clairement, $\preceq_{C,s}$ et $\prec_{C,s}$ sont beaucoup plus prudentes que respectivement $\preceq_{C,w}$ et $\prec_{C,w}$: elles produisent beaucoup plus d'incomparabilités.

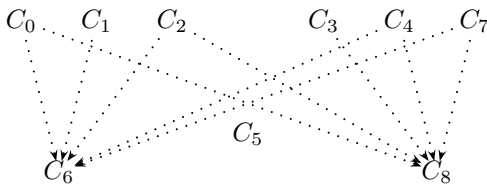


FIG. 7 – $\preceq_{C,s}$ et $\prec_{C,s}$

Nous présentons maintenant nos définitions d'inférences syntaxiques, qui, une fois de plus, ne font intervenir que les préférences strictes.

Définition 8 Une formule ψ est inféré de $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, noté $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_w \psi$, (resp. $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_s \psi$) ssi $\forall C \in Core_w$ (resp. $Core_s$), $C \cup \neg\psi$ est incohérent.

Exemple 11 (suite) Considérons à nouveau l'exemple 8. Nous avons :

$$\begin{aligned} Core_w &= \{C_1, C_3, C_5, C_6, C_8\} \\ &= \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, \neg b\}, \{\neg a, b\}\}. \end{aligned}$$

La formule $a \vee b$ peut être inféré de $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, en effet $\forall C_i \in Core_w$, nous avons $\neg(a \vee b) \cup C_i$ qui est incohérent. Plus précisément, $\{a\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$, $\{b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$, $\{a, b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$, $\{a, \neg b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$ et $\{\neg a, b\} \cup \{\neg a \wedge \neg b\}$ sont tous incohérents. Ainsi nous avons $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_w a \vee b$.

Comme corollaire de la proposition 4, lorsque $\preceq_\Sigma$ est un ordre total, $Core_w = Core_s$. De plus, il peut être montré qu'il existe un élément C_s de $Core_s$, tel que quelque soit $C \in Core_s$, nous avons $C_s \subseteq C$.

L'inférence syntaxique étend l'inférence syntaxique de la logique possibiliste, qui ne traite que l'information totalement ordonnée. Ainsi, nous avons :

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_w \psi \text{ ssi } (\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_s \psi \text{ ssi } \Sigma \vdash_\pi \psi.$$

5.2 D'un pré-ordre partiel sur les formules à un pré-ordre total sur les interprétations

A partir de $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, nous pouvons générer deux relations de préférence sur les interprétations, suivant l'utilisation de la définition 1 ou de la définition 2. Nous notons $[\omega, \Sigma]$ l'ensemble des formules falsifiées par ω et préférées pour Σ , plus précisément :

$$[\omega, \Sigma] = Min(\{\varphi : \varphi \in \Sigma, \omega \not\models \varphi\}, \prec_\Sigma).$$

ω sera préféré à ω' si les formules falsifiées par ω' sont meilleures que les formules falsifiées par ω . Plus formellement :

Définition 9 Soit $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ une de base de croyances partiellement ordonnées :

- $\omega \preceq_{\Omega,w} \omega'$ (resp. $\omega \preceq_{\Omega,s} \omega'$) ssi $[\omega', \Sigma] \preceq_w [\omega, \Sigma]$ (resp. $[\omega', \Sigma] \preceq_s [\omega, \Sigma]$),
- $\omega \prec_{\Omega,w} \omega'$ (resp. $\omega \prec_{\Omega,s} \omega'$) ssi $[\omega', \Sigma] \prec_w [\omega, \Sigma]$ (resp. $[\omega', \Sigma] \prec_s [\omega, \Sigma]$),
- $\omega \approx_{\Omega,w} \omega'$ (resp. $\omega \approx_{\Omega,s} \omega'$) ssi $\omega \preceq_{\Omega,w} \omega'$ (resp. $\omega \preceq_{\Omega,s} \omega'$) et $\omega' \preceq_{\Omega,w} \omega$ (resp. $\omega' \preceq_{\Omega,s} \omega$).

Exemple 12 (suite) Considérons à nouveau l'exemple 8. Le tableau 2 montre l'ensemble des formules préférées pour chaque interprétation.

Par exemple, nous avons $\omega_1 \preceq_{\Omega,w} \omega_0$. En effet $[\omega_1, \Sigma] = \{a\}$ et $[\omega_0, \Sigma] = \{a, b\}$. Pour tout élément de $[\omega_1, \Sigma]$ (plus précisément a), nous avons un élément préféré dans $[\omega_0, \Sigma]$ (a , par transitivité).

De la définition de $\prec_w$, nous pouvons déduire que $\omega_3 \prec_{\Omega,w} \omega_0$. En effet $[\omega_3, \Sigma] = \{\neg a, \neg b\}$ et $[\omega_0, \Sigma] = \{a, b\}$.

Ω	a	b	$\{\varphi \in \Sigma : \omega_i \models \varphi\}$	$[\omega_i, \Sigma]$
ω_0	$\neg a$	$\neg b$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
ω_1	$\neg a$	b	$\{a, \neg b\}$	$\{a\}$
ω_2	a	$\neg b$	$\{\neg a, b\}$	$\{b\}$
ω_3	a	b	$\{\neg a, \neg b\}$	$\{\neg a, \neg b\}$

TAB. 2 – $[\omega_i, \Sigma]$

De plus nous avons $b \prec_{\Sigma} \neg a$ et $a \prec_{\Sigma} \neg b$, et donc $\{a, b\} \prec_w \{\neg a, \neg b\}$, ce qui implique, d'après la définition 9, $\omega_3 \prec_{\Omega, w} \omega_0$. La figure 8 fournit une représentation graphique de $\preceq_{\Omega, w}$ et de $\prec_{\Omega, w}$.



FIG. 8 – $\preceq_{\Omega, w}$ et $\prec_{\Omega, w}$

Les relations de préférence $\preceq_{\Omega, w}$ et $\preceq_{\Omega, s}$ induites sur les interprétations à partir d'une base de croyances partiellement ordonnées sont des extensions de celles utilisées en logique possibiliste. Plus précisément, soit $K = \{(\varphi_i, a_i) : i = 1 \dots n\}$ une base de croyances possibiliste. Soit $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ la base de croyances ordonnées associée à K , tel que $K = \{\varphi_i : (\varphi_i, a_i) \in \Sigma\}$ et pour tous $(\varphi_i, a_i), (\varphi_j, a_j) \in \Sigma$ $\varphi_i \preceq_{\Sigma} \varphi_j$ ssi $a_j \leq a_i$. Il peut être montré que :

$$\begin{aligned} \omega \preceq_{\Omega, w} \omega' & \text{ ssi } \pi_{\Sigma}(\omega') \leq \pi_{\Sigma}(\omega) \quad \text{et} \\ \omega \preceq_{\Omega, s} \omega' & \text{ ssi } \pi_{\Sigma}(\omega') \leq \pi_{\Sigma}(\omega). \end{aligned}$$

La proposition suivante montre que les inférences syntaxiques définies par la définition 8 sont équivalentes à l'inférence sémantique définie par la définition 5. Autrement dit, si le pré-ordre partiel $\preceq_{\Sigma}$ sur les formules est transformé en un pré-ordre partiel $\preceq_{\Omega}$ sur les interprétations, l'inférence de la définition 9 mène aux mêmes conclusions que l'application directe de l'inférence syntaxique de la définition 8.

Proposition 10 Soit $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ une base de croyances partiellement ordonnées. Soient $\preceq_{\Omega, w}$ et $\preceq_{\Omega, s}$ les deux pré-ordres partiels sur l'ensemble des interprétations de Ω obtenues en utilisant la définition 9. Alors :

$$\begin{aligned} (\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_w \psi & \text{ ssi } (\Omega, \preceq_{\Omega, w}) \models \psi \quad \text{et} \\ (\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_s \psi & \text{ ssi } (\Omega, \preceq_{\Omega, s}) \models \psi. \end{aligned}$$

Exemple 13 (suite) Considérons à nouveau l'exemple 8 où nous avons $(\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_w a \vee b$. Soit $\preceq_{\Omega, w}$ (resp. $\prec_{\Omega, w}$) le pré-ordre partiel (resp. l'ordre partiel strict) associé à $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ et calculé dans l'exemple 12. Nous avons $\text{Mod}(a \vee b) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ qui contient $\text{Min}(\Omega, \prec_{\Omega, w})$. Nous avons donc aussi $(\Omega, \prec_{\Omega, w}) \models a \vee b$.

6 Quelques propriétés sur les inférences définies

6.1 Tautologies et formules sous-sommées

Comme en logique possibiliste, toutes les tautologies peuvent être retirées de la base de croyances partiellement ordonnées initiale, sans aucun changement dans les conclusions de nos deux méthodes d'inférence. Cela est simplement du au fait que les tautologies n'interviennent pas dans le calcul de $\prec_{\Omega, w}$ et de $\prec_{\Omega, s}$, étant donné que les tautologies sont vérifiées par toutes les interprétations.

La définition suivante fournit une extension naturelle de la notion de formules sous-sommées.

Définition 11 Soit $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ une base de croyances partiellement ordonnées et $\prec_{\Sigma}$ l'ordre partiel strict associé à $\preceq_{\Sigma}$. Soit $\varphi \in \Sigma$ et $\text{Pref}q(\varphi, \prec_{\Sigma}) = \{\psi \in \Sigma : \psi \prec_{\Sigma} \varphi\}$. $\varphi \in \Sigma$ est dite sous-sommée dans $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ si :

$$\text{Pref}q(\varphi, \prec_{\Sigma}) \vdash \varphi.$$

Et comme en logique possibiliste, les formules sous-sommées peuvent être retirées sans effet sur nos inférences :

Proposition 12 Soit $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ une base de croyances partiellement ordonnées et $\text{Sub} \subset \Sigma$ l'ensemble des formules sous-sommées de Σ . Soit Σ' tel que $\Sigma' = \Sigma \setminus \text{Sub}$ et $\preceq'_{\Sigma}$ la restriction de $\preceq_{\Sigma}$ aux éléments de Σ' . Alors :

$$\begin{aligned} \forall \psi, (\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_w \psi & \text{ ssi } (\Sigma', \preceq'_{\Sigma}) \vdash_w \psi \quad \text{et} \\ \forall \psi, (\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_s \psi & \text{ ssi } (\Sigma', \preceq'_{\Sigma}) \vdash_s \psi. \end{aligned}$$

De même qu'en logique possibiliste, toute formule peut être remplacée par sa forme CNF sans changement sur l'inférence.

Définition 13 Soit $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ une base de croyances partiellement ordonnées. Soit $\varphi \in \Sigma$ et $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ sa forme clausale. $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ peut être transformée en une autre base de croyances partiellement ordonnées $(\Sigma', \preceq'_{\Sigma'})$ par la méthode suivante :

- $\Sigma' = (\Sigma \setminus \{\varphi\}) \cup \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ et $\forall \varphi' \in \Sigma \setminus \{\varphi\}$, $C \forall_i \in \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$:
- si $\varphi' \preceq_{\Sigma} \varphi$ (resp. $\varphi' \prec_{\Sigma} \varphi$) alors $\varphi' \preceq_{\Sigma'} C_i$ (resp. $\varphi' \prec_{\Sigma'} \varphi$),
- si $\varphi \preceq_{\Sigma} \varphi'$ (resp. $\varphi \prec_{\Sigma} \varphi'$) alors $C_i \preceq_{\Sigma'} \varphi'$ (resp. $C_i \prec_{\Sigma'} \varphi'$),
- si $\varphi' \sim_{\Sigma} \varphi$ alors $\varphi' \sim_{\Sigma'} C_i$.

Enfin, $\forall C_i, C_j \in \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$:

- $C_i \approx_{\Sigma'} C_j$.

Proposition 14 Soit $(\Sigma, \preceq_{\Sigma})$ une base de croyances partiellement ordonnées et $(\Sigma', \preceq'_{\Sigma'})$ la base de croyances partiellement ordonnées obtenue en utilisant la définition 13. Alors :

$$\begin{aligned} \forall \psi, (\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_w \psi & \text{ ssi } (\Sigma', \preceq'_{\Sigma'}) \vdash_w \psi \quad \text{et} \\ \forall \psi, (\Sigma, \preceq_{\Sigma}) \vdash_s \psi & \text{ ssi } (\Sigma', \preceq'_{\Sigma'}) \vdash_s \psi. \end{aligned}$$

6.2 Bases de croyances totalement ordonnées compatibles

Une méthode naturelle pour représenter une base de croyances partiellement ordonnées $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ est de considérer l'ensemble de toutes les bases compatibles de croyances totalement ordonnées $(\Sigma, \leq_\Sigma)$. Intuitivement, $(\Sigma, \leq_\Sigma)$ est dite compatible avec $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ si $\leq_\Sigma$ étend $\preceq_\Sigma$, en d'autres termes $\leq_\Sigma$ préserve la relation stricte et non-strict de préférence entre les formules de Σ . Plus formellement :

Définition 15 Soit $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ une base de croyances partiellement ordonnées et $\prec_\Sigma$ l'ordre partiel strict usuellement associé à $\preceq_\Sigma$. Une base de croyances totalement ordonnées $(\Sigma, \leq_\Sigma)$ est dite compatible avec $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ ssi :

- (i) $\forall \varphi, \varphi' \in \Sigma : \text{si } \varphi \prec_\Sigma \varphi' \text{ alors } \varphi <_\Sigma \varphi'$,
- (ii) $\forall \varphi, \varphi' \in \Sigma : \text{si } \varphi \preceq_\Sigma \varphi' \text{ alors } \varphi \leq_\Sigma \varphi'$.

La famille des bases de croyances totalement ordonnées compatibles avec $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ est notée $\mathcal{F}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$.

Exemple 14 (suite) Considérons à nouveau l'exemple 8. Voici deux bases de croyances totalement ordonnées compatibles avec $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, notées $(\Sigma, \leq_{1,\Sigma})$ et $(\Sigma, \leq_{2,\Sigma})$ et définies par :

$$\begin{aligned} a \approx_{1,\Sigma} b &<_{1,\Sigma} \neg a <_{1,\Sigma} \neg b \\ a <_{2,\Sigma} \neg b &<_{2,\Sigma} b <_{2,\Sigma} \neg a. \end{aligned}$$

Étant donnée $\mathcal{F}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, il est possible de définir une relation d'inférence plausible à partir d'une base de croyances partiellement ordonnées. Une formule ψ est une conséquence plausible de la base de croyances partiellement ordonnées $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ si ψ est conséquence plausible de toutes les bases de croyances totalement ordonnées compatibles. Plus formellement :

Définition 16 Une formule ψ est dite conséquence plausible de $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$, notée $(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{po} \psi$, si elle est conséquence possibiliste de toutes les bases de croyances totalement ordonnées compatibles :

$$(\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{po} \psi \text{ ssi } \forall (\Sigma, \leq_\Sigma) \in \mathcal{F}(\Sigma, \preceq_\Sigma), \Sigma \vdash_\pi \psi.$$

Cette définition syntaxique est équivalente à la définition sémantique suivante :

Définition 17 Soit $\mathcal{F}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ la famille des bases de croyances totalement ordonnées compatibles avec la base de croyances partiellement ordonnées $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$. Soit $\mathcal{F}(\Omega, \preceq_\Omega)$ la famille de toutes les distributions qualitatives de possibilités induites par tous les éléments de $\mathcal{F}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$. Alors :

$$(\Omega, \preceq_\Omega) \models_{po} \psi \text{ ssi } \forall \pi_{\leq_\Omega} \in \mathcal{F}(\Omega, \preceq_\Omega), \pi_{\leq_\Omega} \models \psi.$$

Exemple 15 (suite) Considérons à nouveau l'exemple 8. La formule b n'est pas une conclusion plausible de $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$

). En effet, elle ne peut être inférée de la base de croyances totalement ordonnées $(\Sigma, \leq_{2,\Sigma})$ telle que :

$$a <_{2,\Sigma} \neg b <_{2,\Sigma} b <_{2,\Sigma} \neg a.$$

De même, la formule $a \wedge b$ ne peut être une conclusion plausible, puisqu'elle ne peut pas être déduite de $(\Sigma, \leq_{2,\Sigma})$ non plus.

En revanche, la formule $a \vee b$ est une conclusion plausible de $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ puisque ni $\neg a$, ni $\neg b$ ne peut appartenir aux formules préférées d'une base de croyances totalement ordonnées compatible (sinon soit $a \prec_\Sigma \neg b$, soit $b \prec_\Sigma \neg a$ est violée). Ce qui veut dire que a ou b peut appartenir aux formules les plus plausibles de chaque base compatible et donc $a \vee b$ est une conclusion plausible de toutes les bases compatibles.

La proposition suivante montre que la définition d'inférence sémantique basée sur la relation « faible » est équivalente à l'inférence basée sur les bases compatibles décrite par la définition 17 :

Proposition 18 Soit $(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ une base de croyances partiellement ordonnées, $\prec_{\Omega,w}$ l'ordre sur les interprétations induit par la définition 9 et $\mathcal{F}(\Sigma, \preceq_\Sigma)$ la famille de toutes les bases totalement ordonnées qui lui sont compatibles. Alors :

$$\forall \psi \in \mathcal{L}, (\Sigma, \preceq_\Sigma) \vdash_{po} \psi \text{ ssi } (\Omega, \prec_{\Omega,w}) \models \psi.$$

En revanche l'inférence « forte » de la définition 8 ne vérifie pas cette proposition, ainsi que le montre le (contre-)exemple suivant :

Exemple 16 (suite) Considérons à nouveau l'exemple 8. Si nous calculons $\preceq_{\Omega,s}$ et $\prec_{\Omega,s}$, toutes les interprétations sont incomparables. En effet, il n'existe pas de formule falsifiée par une interprétation qui soit préférée à toutes les formules falsifiées par une autre interprétation (chaque interprétation falsifiant deux formules). Ainsi nous avons $\text{Min}(\prec_{\Omega,s}, \Omega) = \Omega$, d'où seules les tautologies peuvent être inférées.

La proposition 18 et le contre-exemple précédent donnent des arguments supplémentaires de poids dans l'optique de choisir l'inférence qui paraît la plus naturelle pour gérer l'information partiellement ordonnée. Ainsi l'inférence « faible » semble définitivement la mieux adaptée pour la gestion de croyances partiellement ordonnées.

7 Conclusion et perspectives

Ce papier a proposé une extension de la logique possibiliste permettant de traiter des croyances partiellement ordonnées.

Deux définitions d'inférences syntaxiques ont été étudiées. Ces deux inférences étendent celles qui sont utilisées en logique possibiliste. De plus, ces inférences syntaxiques

sont correctes et complètes avec l'inférence sémantique proposée.

Bien qu'elle étende elle aussi la logique possibiliste, l'inférence syntaxique « forte » est moins intéressante que l'inférence syntaxique « faible ». En effet, la relation induite sur les sous-bases cohérentes ou entre les interprétations n'est pas un pré-ordre partiel. De plus, elle ne satisfait pas la propriété de monotonie. L'inférence qui lui est associée est beaucoup trop prudente et surtout elle ne vérifie pas l'équivalence avec l'inférence naturelle basée sur les bases compatibles.

A contrario, l'inférence dite « faible » est tout à fait adaptée à la gestion d'informations partiellement ordonnées : elle produit des conclusions équivalentes à l'intersection des conclusions qui peuvent être obtenues à partir de toutes les bases totalement ordonnées compatibles, sans avoir à toutes les générer, ceci uniquement en se focalisant sur les sous-ensembles cohérents préférés. De plus l'inférence syntaxique « faible » est équivalente à une inférence sémantique naturelle et intuitive.

L'inférence « faible » reste fortement tributaire du nombre de sous-ensembles cohérents de l'ensemble de formules initiales. Ainsi, nous travaillons actuellement sur une méthode constructive afin d'améliorer notre méthode pour pouvoir l'utiliser dans le cas concret de l'information géographique, où les informations sont à la fois souvent partiellement ordonnées et en grande quantité.

En outre, compte tenu des nombreuses évolutions qui l'affecte, l'information géographique a souvent besoin d'être révisée. C'est pourquoi nous avons proposé dans [4] une méthode de révision [1] étendant des méthodes de révision bien connues aux ordres partiels. Le calcul des croyances associées à ces informations révisées a conduit à ces travaux et donne un intérêt encore grandissant à une méthode constructive pour calculer cette ensemble de croyances.

Enfin, les travaux exposés dans ce papier doivent être comparés aux mesures de plausibilité telles qu'elles ont été définies par Friedman et Halpern [11, 13]. En effet, ces travaux, dont le but est d'unifier différents formalismes (comme par exemple la logique possibiliste), utilisent eux aussi un pré-ordre partiel sur l'ensemble des interprétations Ω et définissent à partir de celui-ci un pré-ordre partiel sur les sous-ensembles d'interprétations de Ω .

8 Remerciement

Ces travaux ont été réalisés dans le cadre du projet européen REV !GIS #IST-1999-14189.

Site Web : <http://www.cmi.univ-mrs.fr/REVGIS>.

Références

[1] C. Alchourron, P. Gärdenfors, and D. Makinson. On the logic of theory change : Partial meet functions for contraction and revision. *Journal of Symbolic Logic*, 50 :510–530, 1985.

[2] S. Benferhat, C. Cayrol, D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Inconsistency management and prioritized syntax-based entailment. In *Proc. of the Thirteenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'93)*, pages 640–645, 1993.

[3] S. Benferhat, S. Lagrue, and O. Papini. Reasoning with partially ordered information in a possibilistic logic framework. In *Proc. of the Ninth International Conference, Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU'2002)*, volume 2, pages 1047–1052, 2002.

[4] S. Benferhat, S. Lagrue, and O. Papini. Revising partially ordered beliefs. In *Proc. of the 9th International Workshop on Non-Monotonic Reasoning*, pages 142–149, 2002.

[5] G. Brewka. Preferred subtheories : an extended logical framework for default reasoning. In *Proc. of the 11th Inter. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'89)*, pages 1043–1048, 1989.

[6] C. Cayrol, V. Royer, and C. Saurel. Management of preferences in assumption-based reasoning. In *Proc of Information Processing and the Management of Uncertainty in Knowledge based Systems (IPMU'92)*, pages 13–22. Springer, 1992.

[7] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Timed possibilistic logic. *Fundamenta Informaticae*, XV :211–234, 1992.

[8] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.

[9] D. Dubois and H. Prade. *Possibility Theory : An Approach to Computerized Processing of Uncertainty*. Plenum Press, New York, 1988.

[10] Didier Dubois, Jérôme Lang, and Henri Prade. Dealing with multi-source information in possibilistic logic. In *Proc. of the 10th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'92)*, pages 38–42, 1992.

[11] N. Friedman and J. Y. Halpern. Plausibility measure : A user's guide. In *Proceedings of the Eleventh Conference on Uncertainty in AI (UAI'1995)*, pages 175–184, 1995.

[12] J. Y. Halpern. Defining relative likelihood in partially-ordered preferential structures. *Journal of AI Research*, (7) :1–24, 1997.

[13] J. Y. Halpern. Plausibility measures : A general approach for representing uncertainty. In *Proceedings of the 17th International Joint Conference on AI (IJCAI 2001)*, pages 1474–1483, 2001.

[14] H. Katsuno and A. O. Mendelzon. On the difference between updating a knowledge base and revising it. In *Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 183–203, 1991.

[15] C. Lafage, J. Lang, and R. Sabbadin. A logic of supporters. In B. Bouchon-Meunier, R.R. Yager, and A.L. Zadeh, editors, *Information, uncertainty and fusion*, pages 381–392. Kluwer Academic, 1999.

[16] W. Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1998.