

Réseau causal possibiliste basé sur le produit et logique possibiliste quantitative

Product-based causal networks and quantitative possibilistic bases

Salem Benferhat¹ Faïza Khellaf² et Aïcha Mokhtari²

¹ CRIL - Université d'Artois rue Jean Souvraz, S.P. 18 62307 LENS Cedex France

benferhat@cril.univ-artois.fr

² LRIA- Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, BP 32 El Alia Alger Algérie

ghaned@wissal.dz mokhtari@wissal.dz

Résumé

Dans la théorie des possibilités, il existe deux types de réseaux causaux possibilistes selon que le conditionnement est basé sur l'opérateur minimum ou sur l'opérateur produit.

D'une manière similaire, il existe deux types de logiques possibilistes : la logique possibiliste standard (basée sur le minimum) et la logique possibiliste basée sur le produit, appelée logique possibiliste quantitative.

Récemment, plusieurs transformations d'équivalence entre la logique possibiliste standard et les réseaux causaux possibilistes ont été proposées.

Cet article contribue à cette optique et met en exergue la transformation d'un réseau causal possibiliste basé sur le produit en une base de connaissance possibiliste quantitative équivalente et inversement.

Mots clés

Logique possibiliste, Réseaux causaux possibilistes, distributions de possibilité conditionnelles.

Abstract

In possibility theory, there are two kinds of possibilistic causal networks depending if possibilistic conditioning is based on the minimum or on the product operator.

Similarly there are also two kinds of possibilistic logic: standard (min-based) possibilistic logic and product-based possibilistic logic.

Recently, several equivalent transformations between standard possibilistic logic and causal networks have been proposed.

This paper goes one step further and shows that product-based causal networks can be encoded in product-based knowledge bases, and conversely.

Keywords

Possibilistic logic, product-based causal network, conditional possibility distributions.

1 Introduction

En général, les informations incertaines ou les contraintes flexibles peuvent être représentées dans différents formats équivalents.

Dans la théorie des possibilités, les formats peuvent être par exemple:

- des représentations graphiques inspirées des réseaux causaux probabilistes [12,13],
- des représentations logiques qui sont des simples extensions de la logique classique.

Dans les représentations graphiques [1,9,10], les informations incertaines sont représentées par des réseaux causaux possibilistes composés de graphes acycliques orientés (DAG) et de distributions possibilistes conditionnelles locales.

En représentation logique [6], les informations incertaines sont codées par une base de connaissances possibiliste considérée comme un ensemble de formules pondérées de la forme (φ_i, α_i) où φ_i est une formule propositionnelle et α_i est un réel positif appartenant à l'intervalle $[0,1]$.

Chaque réseau causal possibiliste ou chaque base de connaissances possibiliste induit un pré-ordre total entre les interprétations possibles d'un langage, appelé distribution de possibilité.

Le degré de possibilité associé à une interprétation est obtenu en combinant les degrés de satisfaction de chaque formule pondérée de la base de connaissances ou en combinant les degrés de possibilité conditionnelle du réseau causal.

Dans la théorie des possibilités, deux opérateurs de combinaison ont été utilisés : l'opérateur minimum et l'opérateur produit.

Ceci explique l'existence de deux types de réseaux causaux possibilistes l'un basé sur le minimum et l'autre basé sur le produit.

Et d'une manière similaire, deux types de bases de connaissances possibilistes sont définies : l'un représenté par la logique possibiliste standard basée sur le minimum et l'autre représenté par la logique possibiliste basée sur le produit, que l'on appellera dans la suite logique possibiliste quantitative.

Les représentations graphiques et les représentations logiques peuvent modéliser les mêmes informations incertaines. Cependant, ces deux représentations utilisent des outils différents pour le raisonnement.

Les outils d'inférence dans les réseaux causaux sont en général de simples adaptations des algorithmes de propagation probabilistes [9,10].

En logique possibiliste, les outils d'inférence exploitent les récents développements des prouveurs SAT (test de satisfiabilité d'un ensemble de formules propositionnelles). Par conséquent, il est important d'établir des transformations équivalentes d'une représentation formelle à une autre afin de pouvoir bénéficier des avantages de ces différents outils d'inférence.

Un autre intérêt de ces transformations apparaît lors de la fusion des informations incertaines données sous différents formats et provenant de différentes sources.

En pratique, les modes de fusion existants supposent que les informations soient représentées dans un même format. Disposer d'un algorithme de transformations entre les différentes représentations permet de continuer à utiliser les modes de fusion existants, même si les informations à fusionner sont dans des formats différents.

Le but de cet article est de montrer une transformation équivalente des réseaux causaux possibilistes basés sur le produit et la logique possibiliste quantitative et inversement.

Comme nous allons le voir, le passage d'un réseau causal à une base possibiliste quantitative est immédiat, alors que le passage inverse est moins évident et nécessite l'établissement de plusieurs résultats intermédiaires.

Les résultats de cet article complètent ainsi les transformations précédentes effectuées entre la logique possibiliste standard et les réseaux causaux établies récemment dans [2, 3].

La suite de cet article est organisé comme suit :

La section 2 donne les définitions de base de la logique possibiliste et des réseaux causaux possibilistes. La section 3 donne le passage d'un réseau causal basé sur le produit vers une base quantitative. La section 4 donne la transformation inverse. La section 5 conclut l'article.

2 Définitions de base

Cette section donne les éléments de base sur la logique possibiliste et les réseaux causaux possibilistes, nécessaires pour la lecture de cet article.

Pour un exposé détaillé de la logique possibiliste voir [6].

Pour une présentation détaillée des réseaux possibilistes voir [1,9,10].

2.1 La logique possibiliste

Soit $\mathcal{L}$ un langage propositionnel fini et Ω l'ensemble des interprétations associées à $\mathcal{L}$. Soit $\varphi, \beta, \varphi, \dots$ des formules propositionnelles.

On note par $\omega \models \varphi$ pour dire que ω satisfait φ .

Une distribution possibiliste [6] π est une application de l'ensemble des interprétations Ω vers l'intervalle $[0,1]$.

$\pi(\omega)$ représente le degré de compatibilité de l'interprétation ω avec les informations disponibles. Par convention, $\pi(\omega)=0$ signifie que l'interprétation ω est impossible, $\pi(\omega)=1$ signifie que ω est totalement possible et $\pi(\omega) > \pi(\omega')$ signifie que ω est préférée à ω' .

Une distribution de possibilité π est dite normalisée s'il existe une interprétation ω tel que $\pi(\omega)=1$.

Dans cet article, nous considérons que des distributions normalisées.

Etant donné une distribution de possibilité π , deux mesures duales sont définies :

- La mesure de possibilité d'une formule φ :

$$\Pi(\varphi) = \max \{ \pi(\omega) : \omega \models \varphi \}$$

qui représente le degré de compatibilité de φ avec les croyances codées par π .

- La mesure de nécessité d'une formule φ :

$$N(\varphi) = 1 - \Pi(\neg \varphi)$$

qui exprime le degré de certitude ou d'inférence de φ à partir des croyances codées par π .

Une base de connaissances possibiliste Σ est un ensemble de formules pondérées :

$$\Sigma = \{ (\varphi_i, \alpha_i) \mid i=1, n \},$$

où φ_i est une formule propositionnelle et $\alpha_i \in [0,1]$ représente le degré de certitude minimal de φ_i .

Chaque couple (φ_i, α_i) de la base de connaissances possibiliste peut être considéré comme une contrainte qui restreint l'ensemble des interprétations possibles.

Si une interprétation ω satisfait φ_i alors son degré de possibilité est égale à 1 (ω est complètement compatible avec la croyance φ_i), sinon il est égale à $1 - \alpha_i$ (plus φ_i est certaine, moins ω est possible). En particulier, si $\alpha_i = 1$, alors toute interprétation falsifiant φ_i est complètement impossible.

Plus formellement, la distribution de possibilité associée à une formule élémentaire (φ_i, α_i) est définie par:

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_{(\varphi_i, \alpha_i)}(\omega) = \begin{cases} 1 - \alpha_i & \text{si } \omega \not\models \varphi_i \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Plus généralement, la distribution de possibilité associée à Σ est le résultat de la combinaison de l'ensemble des distributions de possibilité associées aux formules élémentaires (φ_i, α_i) de Σ , c'est à dire,

$$\forall \omega \in \Omega, \pi_{\Sigma}(\omega) = \square \{ \pi_{(\varphi_i, \alpha_i)}(\omega) \mid (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma \} \quad (2)$$

Où $\square$ correspond soit à l'opérateur minimum (logique possibiliste standard) soit à l'opérateur produit (*) (logique possibiliste quantitative).

Choisir le minimum revient à prendre la distribution de possibilité π la moins spécifique qui soit compatible avec Σ (une distribution de possibilité π est compatible avec Σ , si $\forall (\varphi, \alpha) \in \Sigma$, nous avons $N_{\pi}(\varphi) \geq \alpha$). La combinaison à base de produit donne également une distribution de possibilité compatible. Elle permet en plus d'exprimer la notion de renforcement entre les informations.

Dans la suite de l'article, nous nous intéressons au cas où $\square = *$ et la base possibiliste associée Σ est appelée base de connaissance possibiliste quantitative.

La définition (2) peut être écrite de façon équivalente : $\forall \omega \in \Omega$,

$$\pi_{\Sigma}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \forall (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma \quad \omega \models \varphi_i \\ * \{ (1 - \alpha_i) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma \mid \omega \not\models \varphi_i \} & \text{sinon} \end{cases} \quad (2')$$

2.2 Réseaux causaux possibilistes

Un réseau causal possibiliste [1], [9] et [10] est une représentation graphique des informations incertaines. Il offre une alternative au réseau causal probabiliste lorsque les données numériques ne sont pas toujours disponibles.

Soit $V = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un ensemble de variables. Nous dénotons par D_i le domaine associé à la variable A_i . L'ensemble des interprétations est le produit cartésien de tous les domaines des variables dans V .

Lorsque chaque variable est binaire, les domaines sont notés par : $D_i = \{a_i, \neg a_i\}$. Dans la perspective de cet article, et pour des raisons de simplicité et sans perte de généralité, nous ne considérons que des variables binaires.

Un graphe possibiliste noté par ΠG est un graphe acyclique orienté (DAG), où les nœuds représentent les variables (par exemple la température d'un patient...) et les arcs représentent les liens causaux existants entre les variables.

Quand il existe un lien du nœud A_i vers le nœud A_j , A_i est appelé un parent de A_j . L'ensemble des parents de A_j est noté par $\text{Par}(A_j)$.

L'incertitude est représentée dans chaque nœud par les distributions de possibilités conditionnelles locales exprimant la force des liens entre les variables.

Les distributions de possibilité conditionnelles sont associées au graphe de la manière suivante :

- pour les nœuds racines A_i , nous spécifions les distributions de possibilité à priori $\Pi(a_i)$, $\Pi(\neg a_i)$ avec $\max(\Pi(a_i), \Pi(\neg a_i)) = 1$ (condition de normalisation) .
- pour les autres nœuds A_j , nous spécifions les distributions de possibilité conditionnelles $\Pi(a_j|u_j)$, $\Pi(\neg a_j|u_j)$ avec $\max(\Pi(a_j|u_j), \Pi(\neg a_j|u_j)) = 1$ où u_j est une instance des parents de A_j .

Dans la théorie des possibilités, deux types de conditionnement ont été définis [5], [9] :

- Le conditionnement basé sur le minimum défini par :

$$\pi(\omega|\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi(\omega) = \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi \\ \pi(\omega) & \text{si } \pi(\omega) < \Pi(\varphi) \text{ et } \omega \models \varphi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3)$$

- Le conditionnement basé sur le produit défini par :

$$\pi(\omega|\varphi) = \begin{cases} \frac{\pi(\omega)}{\Pi(\varphi)} & \text{si } \omega \models \varphi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

Dans cet article, nous utiliserons le conditionnement basé sur le produit.

Chaque réseau causal produit (DAG et les distributions de possibilité conditionnelles locales) induit une distribution de possibilité conditionnelle jointe unique. Cette distribution est obtenue par une règle de chaînage (chain rule) similaire à celle donnée dans les réseaux causaux probabilistes [9,10].

Soit $\omega = a_1, a_2, \dots, a_n$, une interprétation. Nous avons :

$$\pi_{\text{dag}}(\omega) = *_{i=1..n} \Pi(a_i|u_i) \quad \text{tel que: } \omega \models a_i \wedge u_i \quad (5)$$

où a_i est l'instance de A_i qui est vraie dans ω et u_i est l'instance des parents de A_i qui est vrai dans ω .

Exemple 1.

Soit le graphe possibiliste basé sur le produit défini par la figure 1.

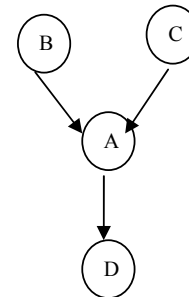


Figure 1. Exemple d'un DAG

Les distributions de possibilité conditionnelles locales sont données dans la Table 1.

b	$\Pi(b)$	c	$\Pi(c)$	a	b	c	$\Pi(a b \wedge c)$	d	a	$\Pi(d a)$
b	1	c	1	a	b	c	1	d	a	1
$\neg b$	0.3	$\neg c$	0.7	a	b	$\neg c$	0.6	d	$\neg a$	0.2
				a	$\neg b$	c	1	$\neg d$	a	0
				a	$\neg b$	$\neg c$	0.2	$\neg d$	$\neg a$	1
				$\neg a$	b	c	0.2			
				$\neg a$	b	$\neg c$	1			
				$\neg a$	$\neg b$	c	0.1			
				$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	1			

Table 1 Distributions de possibilité conditionnelles initiales

En utilisant la règle de chaînage définie en (5), nous obtenons la distribution de possibilité jointe donnée dans la Table2.

Par exemple :

$$\pi(a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) = \Pi(d|a) * \Pi(a|b \wedge \neg c) * \Pi(b) * \Pi(\neg c) \\ = 1 * 0.6 * 1 * 0.7 = 0.42$$

a	b	c	d	$\pi(a \wedge b \wedge c \wedge d)$	a	b	c	d	$\pi(a \wedge b \wedge c \wedge d)$
a	b	c	d	1	$\neg a$	b	c	d	0.04
a	b	c	$\neg d$	0	$\neg a$	b	c	$\neg d$	0.2
a	b	$\neg c$	d	0.42	$\neg a$	b	$\neg c$	d	0.14
a	b	$\neg c$	$\neg d$	0	$\neg a$	b	$\neg c$	$\neg d$	0.7
a	$\neg b$	c	d	0.3	$\neg a$	$\neg b$	c	d	0.006
a	$\neg b$	c	$\neg d$	0	$\neg a$	$\neg b$	c	$\neg d$	0.03
a	$\neg b$	$\neg c$	d	0.042	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	d	0.042
a	$\neg b$	$\neg c$	$\neg d$	0	$\neg a$	$\neg b$	$\neg c$	$\neg d$	0.21

Table 2 Distribution jointe globale obtenue par la règle de chaînage.

3 Du graphe possibiliste basé sur le produit à une base possibiliste quantitative

Afin de faciliter le passage du graphe causal basé sur le produit vers une base possibiliste quantitative, nous utilisons les mêmes notations introduites dans [4] pour représenter un réseau causal. C'est à dire un réseau causal est vu comme l'ensemble des triplets:

$$\Pi G = \{(a_i, u_i, \alpha_i) : \alpha_i = \Pi(a_i | u_i) \neq 1\},$$

où a_i est une instance de la variable A_i et u_i est un élément du produit cartésien du domaine D_j des variables $A_j \in \text{Par}(A_i)$.

Exemple 2 Reprenons l'exemple 1.

Soit le DAG présenté dans la Figure 1 et la Table 1. Alors le codage est représenté par :

$$\Pi G = \{(\neg b, \emptyset, 0.3), (\neg c, \emptyset, 0.7), (a, b \wedge c, 0.6), (a, \neg b, c, 0.2), (\neg a, b, c, 0.2), (\neg a, \neg b, c, 0.1), (d, \neg a, 0.2), (\neg d, a, 0)\}$$

A partir de cette notation, la construction de la base de connaissances Σ_{DAG} associée à un DAG est immédiate.

Elle est directement obtenue à partir de ΠG , en remplaçant chaque triplet (a, u, α) du graphe par la formule possibiliste $(\neg a \vee \neg u, 1 - \alpha)$. Intuitivement, cette transformation est obtenue en rappelant d'abord que (a, u, α) représente $\Pi(a|u) = \alpha$. Ensuite, dans les bases possibilistes, nous exprimons des nécessités sous forme d'implication matérielle. Par conséquent, $\Pi(a|u) = \alpha \Rightarrow N(\neg a|u) = 1 - \alpha$. En remplaçant le conditionnement par implication matérielle nous obtenons : $N(\neg a \vee \neg u) = 1 - \alpha$. Plus formellement, La base possibiliste Σ_{DAG} associée au DAG est définie comme suit :

$$\Sigma_{\text{DAG}} = \{(\neg a_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) : (a_i, u_i, \alpha_i) \in \Pi G\} \quad (6)$$

Exemple 3

La base possibiliste associée à ΠG de l'exemple 2 est la suivante :

$$\Sigma_{\text{DAG}} = \{(b, 0.7), (c, 0.3), (\neg a \vee \neg b \vee c, 0.4), (\neg a \vee b \vee \neg c, 0.8), (a \vee \neg b \vee \neg c, 0.8), (a \vee b \vee \neg c, 0.9), (\neg d \vee a, 0.8), (d \vee \neg a, 1)\}$$

Proposition 1

Soit ΠG un graphe possibiliste produit et soit Σ la base possibiliste associée à ΠG obtenue à partir de la définition (6).

Alors :

$$\pi_{\Sigma}(\omega) = \pi_{\text{dag}}(\omega)$$

où π_{Σ} est obtenu en utilisant la définition (2') et π_{dag} est obtenue à partir de la définition (5).

Preuve

Soit $\omega = a_1, a_2, \dots, a_n$

Nous distinguons deux cas :

- $\pi_{\Sigma}(\omega) \neq 1$

En utilisant la définition (2') sur la base

$\Sigma = \{(\neg a_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) : \Pi(a_i | u_i) = \alpha_i \in \Pi G\}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \pi_{\Sigma}(\omega) &= * \{(1 - (1 - \alpha_i)) : (\neg a_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) \in \Sigma \text{ et } \omega \models a_i \wedge u_i\} \\ &= * \{\alpha_i : (\neg a_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) \in \Sigma \text{ et } \omega \models a_i \wedge u_i\} \\ &= * \{\Pi_{i=1..n}(a_i | u_i) : \omega \models a_i \wedge u_i\} \\ &= \pi_{\text{dag}}(\omega) \end{aligned}$$

- $\pi_{\Sigma}(\omega) = 1$

Ça signifie que $\forall (\neg a_i \vee \neg u_i, 1 - \alpha_i) \in \Sigma, \omega \models \neg a_i \vee \neg u_i$.

Ce qui signifie qu'il n'existe pas de triplet $(a_i, u_i, \alpha_i) \in \Pi G$ tels que $\omega \models (a_i \wedge u_i)$. Par conséquent, tous les $\Pi(a_i | u_i)$ tels que $\omega \models (a_i \wedge u_i)$ sont égaux à 1.

D'où $\pi_{\text{dag}}(\omega) = \pi_{\Sigma}(\omega)$ □

Exemple 4

Nous pouvons vérifier que la distribution générée par le DAG de l'exemple 1 (Table 2) est identique à celle générée par la base de connaissances possibiliste de l'exemple 3.

Par exemple :soit $\omega_1 = a \wedge b \wedge \neg c \wedge d$

D'après la Table 2, nous avons :

$$\pi_{\text{dag}}(\omega_1) = 0.42.$$

Soit Σ la base de connaissances possibilistes donnée dans l'exemple 3. En utilisant la définition 2', nous obtenons aussi :

$$\begin{aligned}\pi_{\Sigma}(\omega_1) &= (1-0.3) * (1-0.4) = 0.7 * 0.6 \\ &= 0.42.\end{aligned}$$

4 D'une base possibiliste quantitative à un graphe causal basé sur le produit

La transformation inverse d'une base possibiliste quantitative Σ à un graphe causal basé sur le produit IIG est moins évidente. Pour cela, nous allons établir plusieurs lemmes intermédiaires.

Le premier lemme indique que l'on peut supprimer des tautologies des bases de connaissances possibilistes quantitatives.

Lemme 1

Si $(\tau, \alpha_i) \in \Sigma$ alors Σ et $\Sigma' = \Sigma - \{(\tau, \alpha_i)\}$ sont équivalentes, c'est à dire $\pi_{\Sigma} = \pi_{\Sigma'}$.

La preuve est immédiate vu que seules les formules falsifiées par des interprétations sont prises en compte dans le calcul des distributions de possibilité.

La suppression des tautologies est importante car elle permet d'éviter les dépendances impropres entre les variables. En effet, la clause $(a \vee \neg a \vee b, 1)$ peut suggérer que B dépend de A, ce qui n'est pas le cas.

Le lemme suivant donne une règle qui permet de réduire des formules :

Lemme 2 (réduction)

Soit Σ une base possibiliste. Soit $(x \vee p, \alpha)$ et $(x \vee \neg p, \alpha)$ deux formules de Σ .

Soit $\Sigma' = \Sigma - \{(x \vee p, \alpha), (x \vee \neg p, \alpha)\} \cup \{(x, \alpha)\}$

Alors :

Σ' et Σ sont équivalentes c'est-à-dire :

$$\forall \omega, \pi_{\Sigma}(\omega) = \pi_{\Sigma'}(\omega).$$

Preuve

La preuve est similaire que celle du lemme 3 ci-dessous.

Le lemme suivant donne le sens inverse du lemme 2 et montre que le remplacement de (x, α) par $(x \vee p, \alpha)$, $(x \vee \neg p, \alpha)$ n'affecte pas les distributions de possibilités induites.

Lemme 3: (Extension)

Soit Σ une base possibiliste. Soit (x, α) une formule de Σ .

Soit Σ' définie à partir de Σ comme suit :

$\Sigma' = \Sigma - \{(x, \alpha)\} \cup \{(x \vee p, \alpha), (x \vee \neg p, \alpha)\}$ Alors, Σ' et Σ sont équivalentes, i.e.

$$\forall \omega, \pi_{\Sigma}(\omega) = \pi_{\Sigma'}(\omega).$$

Preuve

Deux cas sont à considérer:

- Si $\omega \models x$ alors $\omega \models x \vee p$ et $\omega \models x \vee \neg p$
En utilisant la définition (2'):

$$\begin{aligned}\pi_{\Sigma}(\omega) &= * \{(1-\alpha_i) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma \text{ et } \omega \not\models \varphi_i\} \\ &= * \{(1-\alpha_i) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \{(x, \alpha)\} \cup \{(x \vee p, \alpha), \\ &\quad (x \vee \neg p, \alpha)\} \text{ et } \omega \not\models \varphi_i\} \\ &\quad (\text{vu que } \omega \text{ satisfait } (x \vee p, \alpha) \text{ et } (x \vee \neg p, \alpha)) \\ &= \pi_{\Sigma'}(\omega)\end{aligned}$$

- Si $\omega \not\models x$ alors soit $\omega \not\models x \vee p$ soit $\omega \not\models x \vee \neg p$, mais pas les deux (car toute interprétation satisfait exclusivement soit p soit $\neg p$ ou encore, falsifie exclusivement soit p soit $\neg p$).

Supposons que $\omega \not\models x$ et $\omega \not\models x \vee p$ alors $\omega \models x \vee \neg p$ (l'autre cas s'obtient par symétrie).

En utilisant la définition (2'), nous obtenons:

$$\begin{aligned}\pi_{\Sigma}(\omega) &= * \{(1-\alpha_i) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma \text{ et } \omega \not\models \varphi_i\} \\ &= (1-\alpha) * \{(1-\alpha_i) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \{(x, \alpha)\} \cup \{(x \vee p, \alpha)\}\} \\ &= * \{(1-\alpha_i) : (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \{(x, \alpha)\} \cup \{(x \vee p, \alpha), \\ &\quad (x \vee \neg p, \alpha)\}\} \\ &= \pi_{\Sigma'}(\omega)\end{aligned} \quad \square$$

La propriété suivante consiste à montrer comment prendre en compte les redondances dans une base possibiliste quantitative.

Lemme 4:

Si $(x, \alpha) \in \Sigma$ et $(x, \beta) \in \Sigma$ alors Σ et $\Sigma' = \Sigma - \{(x, \alpha), (x, \beta)\} \cup \{(x, \alpha * \beta)\}$ sont équivalentes.

Preuve

Nous considérons deux cas:

- Soit $\omega \models x$, alors

$$\begin{aligned}\pi_{\Sigma}(\omega) &= * \{(1-\alpha_i) : \omega \not\models \varphi_i \text{ et } (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma\} \\ &= * \{(1-\alpha_i) : \omega \not\models \varphi_i \text{ et } (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \{(x, \alpha), (x, \beta)\}\} \\ &\quad \text{vu que } \omega \text{ est un modèle de } x \\ &= * \{(1-\alpha_i) : \omega \not\models \varphi_i \text{ et } (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \{(x, \alpha), (x, \beta)\} \\ &\quad \cup \{(x, \alpha * \beta)\}\} \\ &= \pi_{\Sigma'}(\omega)\end{aligned}$$

- Soit $\omega \not\models x$, alors

$$\begin{aligned}\pi_{\Sigma}(\omega) &= * \{(1-\alpha_i) : \omega \not\models \varphi_i \text{ et } (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma\} \\ &= (1-\alpha) * (1-\beta) * \{(1-\alpha_i) : \omega \not\models \varphi_i \text{ et } (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \\ &\quad \{(x, \alpha), (x, \beta)\}\} \text{ car } \omega \text{ falsifie } x \\ &= * \{(1-\alpha_i) : \omega \not\models \varphi_i \text{ et } (\varphi_i, \alpha_i) \in \Sigma - \{(x, \alpha), (x, \beta)\} \cup \\ &\quad \{(x, \alpha * \beta)\}\} \\ &= \pi_{\Sigma'}(\omega)\end{aligned} \quad \square$$

En utilisant les quatre lemmes précédents, nous pouvons maintenant donner la construction du graphe à partir d'une base possibiliste quantitative.

Elle s'effectue en trois étapes:

- La première étape consiste à modifier la base possibiliste en supprimant les tautologies et en la simplifiant (lemme 2).

- La seconde étape consiste à construire le graphe en identifiant les parents de chaque variable.

- La troisième étape consiste à déterminer les possibilités conditionnelles associées au graphe.

Nous allons illustrer ces étapes en utilisant la base possibiliste quantitative suivante :

Exemple 5

$\Sigma = \{(a \vee b \vee c, 0.7), (a \vee b \vee \neg c, 0.7), (a \vee b, 0.7),$
 $(\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee c \vee d, 0.9), (b \vee c, 0.8),$
 $(\neg b \vee e, 0.2), (\neg d \vee f, 0.5), (a \vee b \vee \neg a, 1)\}.$

- **Etape 1** cette étape consiste à supprimer les tautologies de Σ et d'appliquer la réduction donnée dans le lemme 2.

Exemple 6

Après l'étape 1 la base de l'exemple 5 devient :

$\Sigma = \{(a \vee b, 0.7), (a \vee b, 0.7), (\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee c \vee d, 0.9),$
 $(b \vee c, 0.8), (\neg b \vee e, 0.2), (\neg d \vee f, 0.5)\}$

Elle est obtenue en supprimant la tautologie $(a \vee b \vee \neg a, 1)$ (Lemme 1) et en remplaçant les deux formules $(a \vee b \vee c, 0.7)$, $(a \vee b \vee \neg c, 0.7)$ par la formule $(a \vee b, 0.7)$ d'après le lemme 2.

- **Etape 2** la deuxième étape consiste à construire le graphe. Pour cela, nous allons ordonner arbitrairement les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$.

Intuitivement, nous considérons que les parents d'une variable X_i sont tous parmi les variables $X_{i+1} \dots X_n$ (pouvant être éventuellement vide).

Ensuite, nous décomposons successivement la base de connaissance Σ en $\Sigma_{X_1} \cup \Sigma_{X_2} \dots \cup \Sigma_{X_n}$ comme suit:

- Σ_{X_1} contient toutes les formules de Σ contenant au moins une instance de X_1
- Σ_{X_2} contient toutes les formules de $\Sigma - \Sigma_{X_1}$ contenant au moins une instance de X_2
-
- Σ_{X_n} contient toutes les formules de $\Sigma - \{\Sigma_{X_1} \cup \dots \cup \Sigma_{X_{n-1}}\}$ contenant au moins une instance de X_n .

Le graphe associé à une base Σ est tel que ses nœuds sont les variables X_i de Σ .

Les parents de la variable X_i sont définis comme simplement les variables contenue dans Σ_{X_i} .

Si $\Sigma_{X_i} = \emptyset$ alors la variable X_i est une racine du graphe.

Dans cette étape, nous avons supposé un ordre arbitraire entre les variables.

critère pour ordonner les variables. C'est à dire, à chaque étape, nous choisissons la variable ayant le moins de parents.

Exemple 7

Reprenons la base précédente :

$\Sigma = \{(a \vee b, 0.7), (\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee c \vee d, 0.9),$
 $\{(b \vee c, 0.8), (\neg b \vee e, 0.2), (\neg d \vee f, 0.5)\}$

Σ Contient six variables ordonnées arbitrairement comme suit:

$X_1=A, X_2=B, X_3=C, X_4=D, X_5=E, X_6=F.$

$\Sigma_A = \{(a \vee b, 0.7), (\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee c \vee d, 0.9)\}$, et

$\text{Par}(A) = \{B, C, D\}$

$\Sigma_B = \{(b \vee c, 0.8), (\neg b \vee e, 0.2)\}$, et $\text{Par}(B) = \{C, E\}$

$\Sigma_C = \emptyset$; $\text{Par}(C) = \emptyset$

$\Sigma_D = \{(\neg d \vee f, 0.5)\}$, et $\text{Par}(D) = \{F\}$

$\Sigma_E = \emptyset$; $\text{Par}(E) = \emptyset$

$\Sigma_F = \emptyset$; $\text{Par}(F) = \emptyset$

Nous obtenons ainsi le graphe suivant :

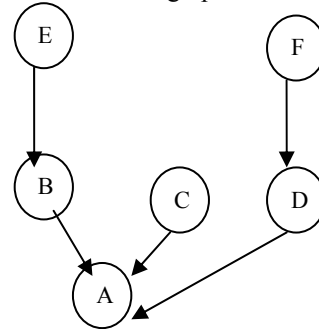


Figure 2: DAG associé à Σ

Proposition 2

Soit G le graphe obtenu dans l'étape 2. Alors G est un DAG.

La preuve est immédiate due au choix d'un ordre stricte $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ entre les variables.

- Etape 3: détermination des possibilités conditionnelles:

Cette phase consiste à calculer les distributions conditionnelles: $\Pi(X_i | \text{Par}(X_i))$ pour chaque variable.

Le calcul de $\Pi(X_i | \text{Par}(X_i))$ s'obtient à partir de Σ_{X_i} se déroule en trois phases:

a- Application du lemme 3 qui consiste à faire une extension de chaque formule $(x, \alpha) \in \Sigma_{X_i}$ à toutes les instances $X_j \in \text{Par}(X_i)$.

b- Application du lemme 4 qui consiste à remplacer les redondances.

Proposition 3

Soit Σ une base possibiliste quantitative. Soit Π_G le DAG obtenu à partir des étapes 1-3.

Alors, $\forall \omega \pi_\Sigma(\omega) = \pi_{\text{dag}}(\omega)$.

L'exemple 8 illustre les étapes a et b.

Exemple 8

- soit à appliquer l'étape (a) (c'est à dire le lemme 3) sur la base de connaissances Σ donnée dans l'exemple 6.

- Traitement du nœud A:

Pour le nœud A, nous avons $\text{Par}(A) = \{B, C, D\}$. Les formules $(a \vee b, 0.7)$, $(\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7)$ et $(a \vee c \vee d, 0.9)$ seront étendues aux différentes instances de ses parents (B, C, D) .

L'extension de la formule $(a \vee b, 0.7)$ dans Σ_A nous donne :

$$\Sigma_A = \{(a \vee b \vee c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee c \vee d, 0.9)\}$$

L'extension de la formule $(\neg a \vee c \vee \neg d, 0.7)$ dans Σ_A nous donne :

$$\Sigma_A = \{(a \vee b \vee c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee c \vee d, 0.9)\}$$

Et finalement, l'extension de la formule $(a \vee c \vee d, 0.9)$ dans Σ_A nous donne :

$$\Sigma_A = \{(a \vee b \vee c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee b \vee c \vee d, 0.9), (a \vee \neg b \vee c \vee d, 0.9)\}$$

En appliquant le lemme 4, pour supprimer les redondances, nous obtenons la base Σ_A finale:

$$\Sigma_A = \{(a \vee b \vee c \vee d, 0.63), (a \vee b \vee \neg c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee \neg b \vee c \vee d, 0.9)\}$$

- Traitement du nœud B:

Pour le nœud B, nous avons $\text{Par}(B) = \{C, E\}$. Les formules $(b \vee c, 0.8)$, $(\neg b \vee e, 0.2)$ sont considérées.

L'extension de Σ_B nous donne :

$$\Sigma_B = \{(b \vee c \vee e, 0.8), (b \vee c \vee \neg e, 0.8), (\neg b \vee c \vee e, 0.2), (\neg b \vee \neg c \vee e, 0.2)\}$$

- Traitement du nœud D

$$\Sigma_D = \{(\neg d \vee f, 0.5)\}$$

Les autres nœuds sont des racines, ce qui implique que leurs bases respectives sont vides, c'est à dire $\Sigma_C = \Sigma_E = \Sigma_F = \emptyset$

c- calcul des degrés de possibilités conditionnelles pour chaque instance de X_i et pour chaque instance des parents de X_i .

Plus précisément, soit $\Sigma = \Sigma_{X_1} \cup \Sigma_{X_2} \cup \dots \cup \Sigma_{X_n}$

Soit x une instance de la variable X_i et $u = y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n$ une instance de $\text{Par}(X_i)$.

La distribution conditionnelle d'une instance x de la variable X_i est définie comme suit :

$$\Pi(x|u) = \begin{cases} 1 - \alpha_i & \text{si } (\neg x \vee \neg u, \alpha_i) \in \Sigma_{X_i} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Exemple 9

Dans l'exemple 8, les bases Σ_{X_i} obtenues sont :

$$\Sigma_A = \{(a \vee b \vee c \vee d, 0.63), (a \vee b \vee \neg c \vee d, 0.7), (a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee b \vee \neg c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee b \vee c \vee \neg d, 0.7), (\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg d, 0.7), (a \vee \neg b \vee c \vee d, 0.9)\}$$

$$\Sigma_B = \{(b \vee c \vee e, 0.8), (b \vee c \vee \neg e, 0.8), (\neg b \vee c \vee e, 0.2), (\neg b \vee \neg c \vee e, 0.2)\}$$

$$\Sigma_D = \{(\neg d \vee f, 0.5)\}$$

$$\Sigma_C = \Sigma_E = \Sigma_F = \emptyset$$

En appliquant l'étape (c), c'est à dire l'équation (7), nous obtenons les distributions conditionnelles données dans la table suivante:

$\Pi(A|BCD)$

A BCD	bcd	bc $\neg$ d	b $\neg$ c d	b $\neg$ c $\neg$ d
a	1	1	0.3	1
$\neg$ a	1	1	1	0.1

A BCD	$\neg$ bcd	$\neg$ bc $\neg$ d	$\neg$ b $\neg$ c d	$\neg$ b $\neg$ c $\neg$ d
a	1	1	0.3	1
$\neg$ a	0.3	0.3	0.3	0.37

$\Pi(B|CE)$

B CE	ce	c $\neg$ e	$\neg$ ce	$\neg$ c $\neg$ e
b	1	0.8	1	0.8
$\neg$ b	1	1	0.2	0.2

$\Pi(D|F)$

D F	f	$\neg$ f
d	1	0.5
$\neg$ d	1	1

$\Pi(C)$

c	1
$\neg$ c	1

$\Pi(E)$

e	1
$\neg$ e	1

$\Pi(F)$

f	1
$\neg$ f	1

Table 2 : Distributions conditionnelles de l'exemple 8

5 Conclusion

Dans cet article, nous avons proposé une transformation équivalente entre les réseaux causaux basés sur le produit et la logique possibiliste quantitative.

La complexité de la transformation d'un graphe causal produit vers une base quantitative est linéaire.

Ce résultat est très similaire, en terme de complexité calculatoire, à celui de la transformation d'un graphe causal basé sur le minimum à une base possibiliste standard donné dans [4].

La transformation inverse d'une base possibiliste quantitative vers un réseau causal produit dépend du nombre maximum des parents de chaque variable. Cette transformation du point de vue calculatoire est beaucoup plus intéressante que celle de la transformation d'une base possibiliste (basée sur le minimum) vers un réseau causal basé sur le minimum donné dans [4].

En effet, la transformation donnée dans [4] nécessitait des étapes supplémentaires nécessaires pour garantir la cohérence d'un graphe possibiliste basé sur le minimum.

Les transformations présentées dans cet article permettent également de relier les réseaux causaux produit avec la logique des pénalités [8]. Ceci peut se faire grâce aux liens étroits qui existent entre la logique possibiliste quantitative et la logique des pénalités.

Un travail futur serait d'exploiter ces transformations afin de comparer les outils d'inférences développées dans les réseaux causaux possibilistes avec ceux développés dans la logique possibiliste quantitative.

Bibliographie

- [1] N.Ben Amor. Qualitative possibilistic graphical models from independance to propagation algorithms. Thèse de doctorat, 2002.
- [2] S.Benferhat, D.Dubois, S.Kaci and H.Prade. Graphical readings of possibilistic logic bases. UAI,2001.
- [3] S.Benferhat, D.Dubois, S.Kaci and H.Prade. Bridging logical, comparative and graphical possibilistic representation frameworks, ESQARU,2001.
- [4] S.Benferhat, D.Dubois, L.Garcia and H.Prade. On the transformation between possibilistic logic bases and possibilistic causal networks, IJAR,2002.
- [5] D.Dubois, H.Prade, the logical view of conditioning and its application to possibility and evidence theories, Int.J.Approx.Reason.4 (1), 23-46,1990.
- [6] D.Dubois, J.Lang, and H.Prade, possobilistic logic, In D.MGabbay, C.J.Hogger and J.A.Robinson ,editors, Handbook of logic in Artificial Intelligence and Logic Programming, Volume 3, pages 439-513. Clarendon Press- Oxford 1994.
- [7] F.Dupin de Saint Cyr, J.Lang and T.Schiex. Penalty logic and its link with Dempster-Shafer theory. In proc of the 10th conf. on uncertainty in Artificial intelligence, pages 204-211 Morgan Kaufmann, 1994.
- [8] F.Dupin de Saint Cyr. Gestion de l'évolutif et de l'incertain en logiques pondérées. Thèse de doctorat, Univ Paul Sabatier, 1996.
- [9] P.Fonk, Réseaux d'inférence pour le raisonnement possibiliste, PHD thesis, Univ de liège, Faculté des sciences, 1994.
- [10] J.Gebhardt and R.Kruse, Background and perspectives of possibilistic graphical models, in proceeding of European Conference of Symbolic and Quantitative Approches to Rreasoning and Uncertainty, pages 108-121, Bad Honnef Germany, 1997.
- [11] E.Hisdal, Conditional possibilities independence and noninteraction, Fuzzy Sets and Systems 1, 283-297,1978.
- [12] F.V.Jensen, An introduction to Bayesian networks,UCL Press, University College London, 1996.
- [13] J.Pearl, Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of plausible inference, Morgan Kaufmann, Los Altos, CA, 1988.
- [14] G.Pinkas. Propositional nonmonotonic reasoning and inconsistency in symmetric neural networks. In Proc. Of the 12th IJCAI, pages 525-530, Sydney, Australia, 1991.
- [15] L.Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems,1:3-28,1978.