

Shape from shading en conditions réalistes d'acquisition photographique

Towards shape from shading under realistic photographic conditions

Frédéric Courteille

Alain Crouzil

Jean-Denis Durou

Pierre Gurdjos

IRIT – équipe TCI

Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex 4

Mél: {courteil, crouzil, durou, gurdjos}@irit.fr

Résumé

Les hypothèses simplificatrices usuelles du shape from shading, technique bien connue de reconstruction tridimensionnelle à partir d'une seule vue, amènent à le formuler sous une forme apparemment simple, qui est « l'équation de l'eikonale ». La résolution de cette équation pose néanmoins de sérieuses difficultés, qui sont dues en grande partie à l'ambiguïté concave/convexe. Dans cet article, nous nous restreignons à un type de scène dont le relief ne présente plus cette ambiguïté, en l'occurrence un livre ouvert et posé à plat. Ce faisant, la résolution de l'équation de l'eikonale ne pose plus les mêmes difficultés, et nous pouvons envisager comme application, à terme, de remplacer la photocopie, opération longue, parfois délicate et comportant des défauts lorsque le livre est épais, par un système comportant essentiellement un appareil photographique et un logiciel calculant le relief des pages par shape from shading, puis opérant les corrections géométriques et photométriques nécessaires pour simuler une photocopie « à plat ». Bien entendu, la précision de la reconstruction tridimensionnelle étant cruciale pour un tel système, il est nécessaire de reformuler le shape from shading en conditions réalistes d'acquisition photographique, puis de tenter de le résoudre en prenant en compte ces modifications. En guise de validation de notre travail, des tests sont menés sur des simulations de photographies d'un livre ouvert.

Mots-clés

Shape from shading, projection perspective.

Abstract

Shape from shading is a well-known technique of 3D-reconstruction from a single image. The assumptions that are usually made lead to an apparently simple formulation, the so-called "eikonal equation". But the resolution of this equation presents serious difficulties, principally owing to the concave/convex ambiguity. In this paper, we restrict our investigation to a type of scene for which this shape ambiguity does not exist: a book laid down flat. In this case, the resolution of the eikonal equation does not present the same difficulties. We can imagine, as a future application,

the replacement of photocopying, which is a long and sometimes tricky operation giving unsatisfactory results as soon as the book is thick, by a system comprising a camera and a program. The shape of the pages would be recovered by the system, providing the information for the synthesis of a "virtual" image of a simulated flat photocopy, after geometrical and photometrical corrections. The accuracy of the 3D-reconstruction is crucial with such a system. It is therefore necessary to reformulate the shape from shading problem under realistic photographic conditions and to solve it taking into account these modifications. Our work is validated by experiments with simulated photographs of a book.

Keywords

Shape from shading, perspective projection.

1 Introduction

L'engouement qu'a connu le shape from shading (SFS) par le passé semble être légèrement retombé ces dernières années : la moyenne des publications par an est passée de quarante-cinq, durant la décennie 1989-1998, à trente-deux depuis 1999. Cela s'explique par les résultats décevants qui sont obtenus sur images réelles, comme l'ont montré deux études récentes [16, 6]. En l'état actuel des recherches, est-il sensé d'envisager des applications au shape from shading ? Dans cet article, nous répondons à cette question par l'affirmative. Nous nous intéressons à une application originellement proposée dans [13], puis reprise dans [2], qui consiste à utiliser le SFS pour éviter les défauts des photocopies de livres, lorsque ceux-ci ne peuvent pas être parfaitement plaqués sur le verre du photocopieur. Nous reprenons cette idée et la poussons plus loin, en abordant certains aspects théoriques du SFS qui doivent être remis en cause, contrairement aux travaux antérieurs dont la démarche est plus ou moins empirique. L'intérêt de scènes possédant un relief simple comme un livre ouvert posé sur une table est que le niveau de gris peut être directement interprété en termes d'orientation de la surface, sans aucune ambiguïté. En particulier, l'ambiguïté classique concave/convexe, qui est à l'origine d'illusions d'optique, est évi-

tée. Dès lors, le SFS peut devenir une méthode de reconstruction tridimensionnelle de précision, mais encore faut-il que la relation entre le niveau de gris et l'orientation de la surface soit fiable. Nous nous attachons donc à reformuler le SFS en conditions réalistes d'acquisition photographique, ce qui nous amène à remettre en question un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, parmi lesquelles l'hypothèse concernant le modèle de projection est la première visée.

Dans le paragraphe 2, nous rappelons les hypothèses usuelles du SFS et les équations obtenues sous ces hypothèses. Dans le paragraphe 3, nous remettons en question deux des hypothèses simplificatrices du SFS, ce qui nous amène à une nouvelle formulation du problème. Dans le paragraphe 4, nous nous intéressons à la résolution de la nouvelle équation du SFS. La méthode de résolution que nous proposons pour cette équation est testée, dans le paragraphe 5, sur l'image d'un livre ouvert posé sur une table. Le paragraphe 6 tire les conclusions de cette étude et dégage quelques perspectives.

2 Shape from shading idéal

Dans ce paragraphe, nous détaillons les hypothèses usuelles du SFS et les équations qui en découlent. Ce travail est nécessaire, dans la mesure où nous nous affranchirons ensuite de certaines de ces hypothèses, lorsque nous ne les jugerons pas réalistes, et nous en déduirons une nouvelle équation pour le SFS.

2.1 L'équation de luminance

Nous choisissons un repère tridimensionnel $\mathcal{R} = (Cxyz)$ lié à l'appareil photographique, dont l'origine est le centre optique C et l'axe Cz coïncide avec l'axe optique. Dans ce repère, la surface visible de la scène est un graphe décrit par l'équation $z = u(x, y)$. La figure 1 illustre ce repère et positionne les trois entités fondamentales qui sont mises en présence : la scène ; la source lumineuse ; l'appareil photographique, constitué de l'objectif et du récepteur photosensible, ce dernier étant mis en coïncidence avec le « plan de mise au point » Π (qui est le conjugué du « plan moyen de la scène » Ω), afin d'obtenir une image nette. Le *shape from shading*, ou photoclino-métrie, consiste à reconstruire le relief 3D d'une scène à partir d'une seule image en niveaux de gris de la scène, grâce à l'analyse des « ombres propres ». Ce problème étant relativement complexe, il est d'usage de le résoudre en faisant les hypothèses simplificatrices suivantes [4] :

H1 La fonction u est continue et dérivable, c'est-à-dire que l'objet n'a ni arête, ni partie cachée.

H2 La réflectance de la scène, qui décrit la manière dont la lumière est réémise, est connue en tout point.

H3 La scène est éclairée par une source lumineuse unique, émettant un flux lumineux parallèle et uniforme qui peut être décrit, en direction et en densité, par un vecteur $\vec{S}$.

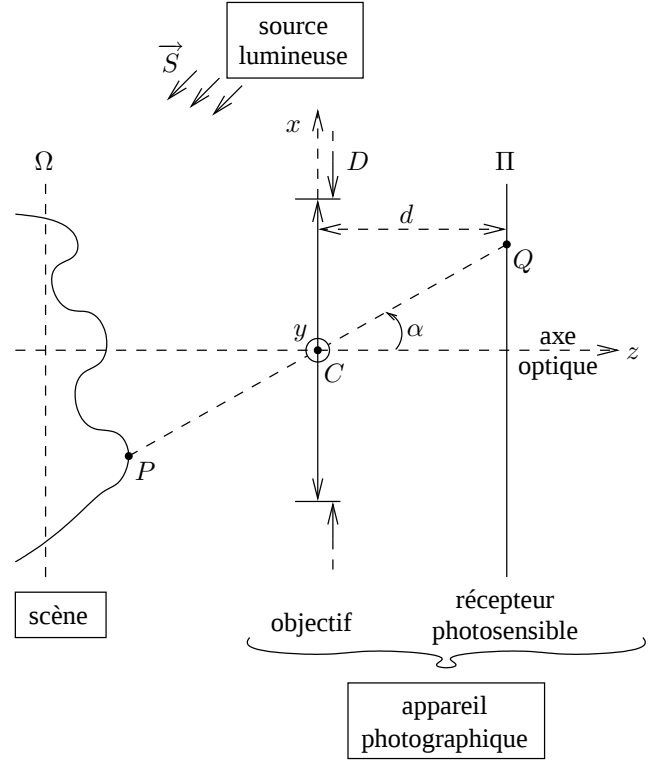


FIG. 1 – Schéma du montage optique.

H4 Les réflexions secondaires de la lumière sont négligées, ce qui est faux dès que la scène n'est pas convexe.

H5 L'image est nette et les différentes aberrations éventuelles du système optique sont négligeables.

H6 L'angle de champ α (cf. figure 1) reste faible.

H7 L'effet de perspective est négligeable.

En faisant les hypothèses H1 à H5, le SFS est modélisé par une équation dite « équation de luminance » (*image irradiance equation*, cf. [10]) :

$$\frac{\pi}{4} \cos^4 \alpha \left(\frac{D}{d} \right)^2 T L(P, \vec{PC}) = E(Q), \quad (1)$$

où D désigne le diamètre de la pupille d'entrée de l'objectif, d la distance de C au plan Π , T le coefficient de transmission des lentilles de l'objectif, $L(P, \vec{PC})$ la luminance de la surface au point P dans la direction $\vec{PC}$, et $E(Q)$ l'éclairement au point image Q conjugué de P (cf. figure 1). L'hypothèse H6 permet de négliger l'effet du facteur $\cos^4 \alpha$, et donc l'équation (1) peut être réécrite :

$$\frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{d} \right)^2 T L(P, \vec{PC}) = E(Q). \quad (2)$$

2.2 L'équation de l'eikonale

Aux hypothèses de base H1 à H7, deux autres hypothèses sont très souvent rajoutées :

H8 Le matériau est lambertien.

H9 Le vecteur $\vec{S}$ est parallèle à Cz , c'est-à-dire que l'éclairage est « frontal ».
L'hypothèse H8 permet de modéliser la luminance sous une forme analytique particulièrement simple qui ne dépend pas de la direction d'émission¹ :

$$L(P, \vec{PC}) = -\frac{\rho}{\pi} \vec{S} \cdot \vec{n}(P), \quad (3)$$

où ρ désigne l'albédo de la surface et $\vec{n}(P)$ la normale unitaire sortante au point P . Grâce à l'hypothèse H1, si $P = (x, y, u(x, y))$, il est facile de montrer que :

$$\vec{n}(P) = \frac{(-p(x, y), -q(x, y), 1)}{\sqrt{p(x, y)^2 + q(x, y)^2 + 1}}, \quad (4)$$

p et q désignant les deux dérivées partielles de u . Enfin, l'hypothèse H9 permet de calculer de manière élémentaire le produit scalaire du membre droit de (3) :

$$-\vec{S} \cdot \vec{n}(P) = \frac{S}{\sqrt{p(x, y)^2 + q(x, y)^2 + 1}}. \quad (5)$$

Grâce à (2), (3) et (5), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{D}{d} \right)^2 T \frac{\rho S}{\sqrt{p(x, y)^2 + q(x, y)^2 + 1}} = E(Q). \quad (6)$$

La résolution de (6) n'est possible que si l'on connaît $E(Q)$ pour tout (x, y) . Cette connaissance est plus difficile à obtenir qu'il n'y paraît. D'une part, on ne dispose, par le biais de l'image, que de niveaux de gris et non pas d'éclairements, et donc on suppose généralement que le récepteur photosensible est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe un coefficient β tel que le niveau de gris au point Q vaille :

$$I(Q) = \beta E(Q). \quad (7)$$

D'autre part, la correspondance entre un point objet P et son point image conjugué Q est le fruit d'une projection centrale, de centre C , sur le plan Π . Néanmoins, l'hypothèse H7 consiste à réaliser une approximation de cette projection par une projection orthogonale, également appelée « projection perspective faible » (*weak perspective projection*, cf. [7, §. 4.4]), qui consiste à appliquer les deux transformations successives suivantes : projection orthogonale de P sur le plan Ω , en un point P' ; projection centrale, de centre C , de P' sur le plan Π , en un point Q' . Ce point est différent de Q , point image obtenu par projection centrale, de centre C , de P sur Ω , comme l'illustre la figure 2. Nous reviendrons en détail sur la validité de cette approximation dans le paragraphe 3. L'hypothèse H7 permet de simplifier l'équation aux dérivées partielles (6). Choisissons, dans le plan Π , un repère $\mathcal{R}' = (AXY)$ tel que AX et AY soient parallèles, respectivement, à Cx et à Cy . L'origine A de

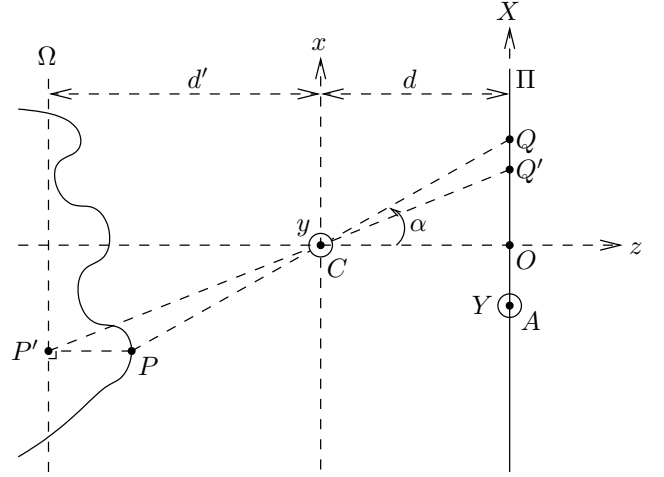


FIG. 2 – Approximation de la projection perspective.

ce repère n'a aucune raison de coïncider avec le « point principal » O , qui est l'intersection de Cz et du plan Π , et dont les coordonnées (X_O, Y_O) , dans le repère $\mathcal{R}'$, sont inconnues *a priori*. Les coordonnées (X', Y') de Q' , dans le repère $\mathcal{R}'$, s'expriment en fonction des coordonnées (x, y) de P dans le repère $\mathcal{R}$:

$$\begin{cases} X' - X_O = -\frac{d}{d'} x, \\ Y' - Y_O = -\frac{d}{d'} y. \end{cases} \quad (8)$$

Ces relations indiquent que Q' est l'image de P' par une similitude σ de centre C et de rapport $g = -d/d'$ (coefficient appelé « grandissement transversal », où d' désigne la distance de C au plan Ω (d' est lié à d par la « relation de conjugaison »). Il est donc judicieux d'introduire comme nouvelle inconnue la fonction $\tilde{u}$ définie par :

$$\tilde{u}(X', Y') = g u \left(\frac{X' - X_O}{g}, \frac{Y' - Y_O}{g} \right), \quad (9)$$

de telle sorte que la surface $z = \tilde{u}(X', Y')$ soit l'image du relief de la scène par la similitude σ . Étant donné que les pentes sont conservées par une similitude, et grâce à (7), on peut transformer l'équation (6) en :

$$\|\nabla \tilde{u}(X', Y')\|^2 = \left[\frac{D^2 T \rho S \beta}{4 d^2 I(X', Y')} \right]^2 - 1. \quad (10)$$

Cette équation, qui s'appelle « l'équation de l'eikonale », est la plus couramment rencontrée dans la littérature. C'est une équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre (équation de Hamilton-Jacobi du premier ordre). Le premier membre est positif ou nul et s'annule pour les points de la scène où la normale est parallèle à Cz , appelés « points singuliers ». Pour chacun de ces points, le niveau de gris I atteint sa valeur maximale $I_{\max}$:

$$I_{\max} = \frac{D^2 T \rho S \beta}{4 d^2}. \quad (11)$$

1. L'écriture exacte de (3) est $L(P, \vec{PC}) = \max\{-\frac{\rho}{\pi} \vec{S} \cdot \vec{n}(P), 0\}$, ce qui signifie qu'un point non éclairé a une luminance nulle.

L'équation de l'eikonale peut donc être réécrite :

$$\|\nabla \tilde{u}(X', Y')\|^2 = \frac{I_{\max}^2}{I(X', Y')^2} - 1. \quad (12)$$

Le seul paramètre de cette équation est $I_{\max}$, qui peut être mesuré directement sur l'image si elle contient au moins un point singulier. Rappelons que cette équation n'est valide qu'avec les hypothèses H1 à H9. Parmi ces hypothèses, certaines sont probablement plus réalistes que d'autres.

3 Shape from shading réaliste

3.1 Discussion des hypothèses

Parmi les hypothèses H1 à H9, qui permettent d'exprimer le SFS sous la forme de l'équation de l'eikonale, nous ne remettons en cause que les hypothèses H6 et H7, dans le cadre de ce travail. Bien entendu, une remise en question plus complète semblerait souhaitable, mais il faut remarquer que toutes ces hypothèses n'ont ni le même degré de vraisemblance, ni le même impact sur la modélisation du SFS. On peut les regrouper en deux catégories : (i) celles qui sont suffisamment réalistes pour ne pas rendre la modélisation caduque, tout au moins dans le cadre de l'application visée, ou qu'il est aisé de remettre en question (hypothèses H1, H3, H5, H8 et H9) ; (ii) celles qui ne semblent pas réalistes et qu'il n'est pas facile de remettre en question (hypothèses H4, H6 et H7). Seule l'hypothèse H2 ne peut pas être classée dans ces catégories, étant donné que c'est l'hypothèse de base du SFS, qui permet de lier une grandeur photométrique, la luminance, au relief. Sans cette hypothèse, le problème serait mal posé : il est par exemple impossible de distinguer la photographie d'une scène avec la photographie de cette photographie, dont on peut considérer qu'il s'agit d'une deuxième scène de relief plat.

Discutons brièvement de la validité des cinq hypothèses de la première catégorie, en les confrontant à l'application envisagée. L'hypothèse H1 n'est évidemment pas vérifiée si la scène est un livre ouvert posé sur le dos, puisque u est non dérivable au niveau de la reliure, sauf si les traitements sont appliqués séparément aux deux sous-images correspondant aux deux pages en regard, ce que nous ferons. Par ailleurs, pour éviter d'éventuelles parties cachées, il faut s'assurer que l'axe Cz soit bien situé dans le plan contenant la reliure et orthogonal au plan sur lequel le livre est posé. L'hypothèse H3 est assez facile à rendre valide en éclairage naturel, puisque la lumière du soleil la vérifie exactement. Une source ponctuelle placée suffisamment loin de la scène s'en approche également assez bien. En revanche, il a été montré dans [1] que si la position de la source est inconnue, alors le problème admet une famille de solutions, chacune étant associée à une position différente de la source. La netteté de l'image (H5) dépend de plusieurs facteurs, parmi lesquels la profondeur de champ est le plus important. Pour une scène immobile, l'ouverture de l'objectif peut être diminuée (ce qui a pour effet de diminuer D) afin d'augmenter la profondeur de champ, à condition que le temps

de pose soit augmenté (ce qui a pour effet d'augmenter β dans (7)). La formation de l'image se rapproche alors du sténopé, ancêtre de l'appareil photographique. Dans l'absolu, il ne faudrait pas négliger l'effet néfaste de certaines aberrations sur la netteté de l'image, comme la courbure de champ, la coma ou l'aplanétisme, mais les objectifs modernes corrigent bien ces défauts. Quant aux autres aberrations, la distorsion est sans doute la plus gênante, mais elle peut être corrigée soit par ajout d'un adaptateur, soit par modélisation et estimation préalable des paramètres du modèle. Enfin, l'aberration de vignetage, qui se traduit par un défaut d'éclairement sur certains points de l'image, peut également être compensée par calibrage préalable. L'hypothèse H8 semble généralement peu réaliste, mais la plupart des papiers constituent des matières assez proches de matériaux lambertiens. En outre, il est tout à fait envisageable de modéliser la loi de réflectance par un modèle photométrique plus complexe que la loi de Lambert et d'estimer préalablement les paramètres du modèle, voire de mesurer la fonction de réflectance du papier sur un goniomètre. En revanche, l'albédo ne devra absolument plus être considéré comme uniforme sur la surface de la scène, puisque les zones encrées ont un albédo proche de 0, alors que les zones non encrées ont un albédo proche de 1. Quant à l'hypothèse H9, elle est très difficile à mettre en œuvre, même si dans [5], un montage optique spécifique utilisant une lame semi-réfléchissante a été réalisé pour vérifier cette hypothèse. Hélas, la taille de la scène (dans le plan orthogonal à $\vec{S}$) ne doit pas excéder une dizaine de centimètres et cela semble rédhibitoire pour notre application.

Les hypothèses que nous réfutons dans le cadre de ce travail se limitent à H6 et H7. En ce qui concerne H4, sa remise en question semble extrêmement complexe, étant donné que le problème direct associé (problème classique de la synthèse d'images qui peut être résolu, par exemple, par la technique du « lancer de rayons ») est déjà relativement difficile à mener à bien. Cela est d'autant plus regrettable que l'application envisagée met à mal cette hypothèse dans la zone du livre située près de la reliure, qui constitue une surface globalement concave (cf. [14], où ce point a été pris en compte).

Afin de pouvoir discerner les effets des écarts à ces différentes hypothèses plus ou moins réalistes, des simulations seront réalisées à partir d'images de synthèse. Il est à noter que le traitement de telles images nous permet de contourner une étape délicate de notre application, à savoir la séparation des ombres propres et de l'albédo. Ce traitement sort du cadre de notre travail et ne sera pas décrit ultérieurement. Considérons maintenant de plus près les hypothèses H6 et H7, cœur de notre travail.

3.2 Influence des hypothèses H6 et H7

Pour montrer que ces deux hypothèses ne sont pas réalistes, nous avons représenté, sur la figure 3, deux images

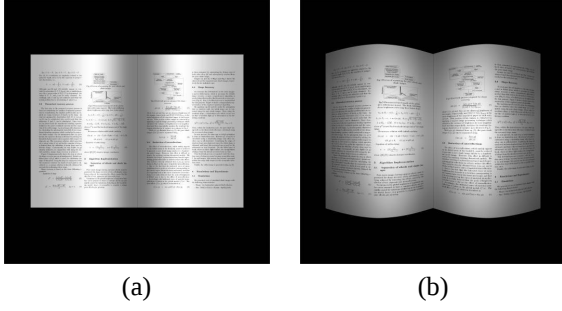


FIG. 3 – Images d'un livre ouvert : (a) avec les hypothèses H6 et H7 ; (b) sans les hypothèses H6 et H7.

du même livre² : l'image (a) correspond à toutes les hypothèses précédentes ; l'image (b) correspond à toutes les hypothèses sauf H6 et H7 (le facteur $\cos^4 \alpha$ n'est plus assimilé à 1 et la projection utilisée est la projection perspective). On distingue facilement, sur l'image 3(b), les deux effets provoqués par l'abandon des hypothèses H6 et H7. D'une part, l'abandon de l'hypothèse H6 fait que le niveau de gris n'est plus uniforme le long d'une colonne, sur la partie non encrée du livre. D'autre part, l'effet de perspective est flagrant : les lignes du texte, aussi bien que les bords supérieurs et inférieurs des pages, ne sont plus rectilignes (ceci provient du fait que la projection perspective, contrairement à la projection orthogonale, ne conserve pas le rapport des distances). La modélisation du SFS pour l'image 3(b) doit être revue, sans quoi on risquerait fort de faire une très mauvaise reconstruction, comme cela sera montré dans le paragraphe 4.

3.3 L'équation de l'eikonale perspective

Dans le raisonnement qui nous a permis d'établir l'équation de l'eikonale, revenons en amont des hypothèses H6 et H7, c'est-à-dire à l'équation (1). La remise en question de H7 nous oblige à considérer comme point image conjugué de P , le point Q , et non plus Q' (cf. figure 2). Une autre conséquence moins évidente est que l'hypothèse H1 doit être partiellement remise en question. En effet, pour une même scène, les parties cachées ne sont pas les mêmes pour les deux modèles de projection : le point P de la figure 4, qui ne serait pas visible en projection orthogonale, devient visible en projection perspective. Le choix de (x, y) comme variables devient donc caduque. La meilleure alternative consiste à utiliser comme nouvelles variables les coordonnées (X, Y) du plan Π , puisque chaque couple de valeurs (X, Y) correspond à un unique point visible de la

2. Ces deux images ont été calculées avec les caractéristiques suivantes : le livre a comme dimensions $312 \text{ mm} \times 441 \text{ mm}$; la distance focale de l'objectif vaut 50 mm ; les distances d et d' valent, respectivement, $59,4 \text{ mm}$ et 316 mm , et donc le grandissement transversal g vaut $-0,188$. Elles ont été simulées selon le procédé suivant : deux pages d'un article au format Postscript ont été plaquées sur un relief défini par la fonction $u(x, y) = -3,40 \cdot 10^{-9} y^4 + 1,09 \cdot 10^{-5} |y|^3 - 6,21 \cdot 10^{-3} y^2 + 0,883 |y| + 1,22$, pour $y \in [-220,5 \text{ mm}; 220,5 \text{ mm}]$, ce qui veut dire que les altitudes occupent l'intervalle $[0 \text{ mm}; 37 \text{ mm}]$. Signalons enfin que les images synthétisées comportent 3056×3056 pixels.

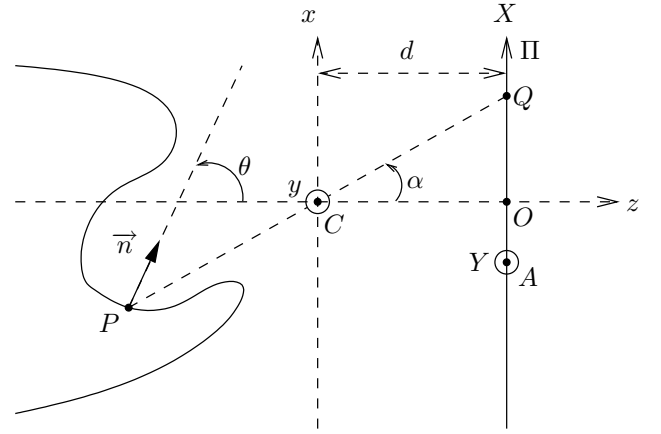


FIG. 4 – Le point P est caché en projection orthogonale et visible en projection perspective.

scène. La surface de la scène peut donc être représentée par trois équations paramétriques :

$$x = r(X, Y), \quad y = s(X, Y), \quad z = t(X, Y). \quad (13)$$

En observant la figure 2, on établit facilement que :

$$\begin{cases} \frac{X - X_O}{d} = \frac{x}{z}, \\ \frac{Y - Y_O}{d} = \frac{y}{z}, \end{cases} \quad (14)$$

d'où on conclut que :

$$\begin{cases} r(X, Y) = \frac{X - X_O}{d} t(X, Y), \\ s(X, Y) = \frac{Y - Y_O}{d} t(X, Y), \end{cases} \quad (15)$$

Pour établir la nouvelle équation du SFS, étant donné que (1) et (3) sont toujours valides, il nous faut calculer les coordonnées de la normale à la surface $\vec{n}(P)$ au point P . Or, les deux vecteurs suivants forment une base du plan tangent à la surface en P :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{P}}{\partial X}(P) = \left(\frac{\partial r}{\partial X}(X, Y), \frac{\partial s}{\partial X}(X, Y), \frac{\partial t}{\partial X}(X, Y) \right), \\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial Y}(P) = \left(\frac{\partial r}{\partial Y}(X, Y), \frac{\partial s}{\partial Y}(X, Y), \frac{\partial t}{\partial Y}(X, Y) \right). \end{cases} \quad (16)$$

En utilisant les relations (15), on peut éliminer r et s des expressions (16). Le produit vectoriel normalisé de ces deux vecteurs donne l'expression de $\vec{n}(P)$:

$$\vec{n}(P) = \frac{(-dv(X, Y), -dw(X, Y), \bar{t}(X, Y))}{\sqrt{d^2(v(X, Y)^2 + w(X, Y)^2) + \bar{t}(X, Y)^2}}, \quad (17)$$

où $v = \partial t / \partial X$, $w = \partial t / \partial Y$ et $\bar{t}(X, Y) = t(X, Y) + (X - X_O)v(X, Y) + (Y - Y_O)w(X, Y)$. En nous plaçant à nouveau dans le cadre de l'hypothèse H9 (éclairage frontal), le

produit scalaire $-\vec{S} \cdot \vec{n}(P)$ s'écrit donc :

$$-\vec{S} \cdot \vec{n}(P) = \frac{S \bar{t}(X,Y)}{\sqrt{d^2(v(X,Y)^2 + w(X,Y)^2) + \bar{t}(X,Y)^2}}. \quad (18)$$

La nouvelle équation modélisant le problème s'obtient enfin grâce à (1), (3), (18), (7) et (11) :

$$\frac{\bar{t}(X,Y)}{\sqrt{d^2(v(X,Y)^2 + w(X,Y)^2) + \bar{t}(X,Y)^2}} = \frac{I(X,Y)}{I_{\max} \cos^4 \alpha}. \quad (19)$$

Par ailleurs, la remise en question de l'hypothèse H6 nécessite de savoir évaluer le facteur $\cos^4 \alpha$. Or, il est aisé de vérifier sur la figure 2 que :

$$\cos^2 \alpha = \frac{d^2}{(X - X_O)^2 + (Y - Y_O)^2 + d^2}. \quad (20)$$

Cette expression peut donc être évaluée pour tout (X,Y) , à partir du moment où les paramètres X_O , Y_O et d sont connus. Il est alors intéressant de regrouper la donnée I et le facteur $\cos^4 \alpha$, en introduisant la fonction :

$$I'(X,Y) = \frac{I(X,Y)}{\cos^4 \alpha}. \quad (21)$$

Après quelques transformations, on peut réécrire l'équation (19) sous la forme :

$$\left[\frac{d}{\bar{t}(X,Y)} \right]^2 \|\nabla \bar{t}(X,Y)\|^2 = \frac{I_{\max}^2}{I'(X,Y)^2} - 1. \quad (22)$$

Cette équation, que nous nommons « équation de l'eikonale perspective », ressemble beaucoup à l'équation de l'eikonale (12). Il est intéressant de remarquer que les modifications provenant de l'abandon des hypothèses H6 et H7 sont indépendantes : l'abandon de H6 a comme conséquence que I est remplacé par I' , alors que l'abandon de H7 a comme conséquence d'introduire un facteur dans le membre de gauche. Il faut bien noter que la validité de H6 et celle de H7 ne sont pas corrélées. D'une part, H7 est parfaitement vérifiée pour une scène plane orthogonale à l'axe optique, quel que soit l'angle de champ, donc même si H6 n'est pas valide. D'autre part, une scène dont la profondeur est comparable à sa distance moyenne au centre optique ne vérifie pas H7, même pour un faible champ angulaire, donc même si H6 est valide.

Comme pour l'équation de l'eikonale (12), la valeur du second membre de l'équation de l'eikonale perspective (22) se situe dans l'intervalle $[0; +\infty[$: 0 si $I'(X,Y) = I_{\max}$, c'est-à-dire pour les points P où $\vec{n}(P)$ est parallèle à $\vec{S}$ et de sens contraire, et $+\infty$ pour les points où $\vec{n}(P)$ est orthogonal à $\vec{S}$ ³.

L'équation de l'eikonale perspective est encore du type Hamilton-Jacobi du premier ordre, mais il faut s'attendre à ce qu'elle soit plus compliquée à résoudre que l'équation de l'eikonale.

3. En réalité, l'équation (22) n'est pas valide pour les points visibles non éclairés, tel le point P de la figure 4. Remarquons que ce cas de figure ne pouvait pas se produire sous l'hypothèse de la projection orthogonale, en éclairage frontal.

4 Résolution de l'équation de l'eikonale perspective

4.1 Choix d'une stratégie de résolution

La grande majorité des articles en SFS s'attachent à résoudre le problème idéal modélisé par l'équation de l'eikonale. Il est vrai que cette équation recèle tellement d'embûches qu'aucune méthode de résolution ne donne réellement satisfaction. L'équation de l'eikonale laisse une grande latitude quant à la stratégie de résolution, dans la mesure où elle n'implique l'inconnue $\tilde{u}$ que par le biais de $\|\nabla \tilde{u}\|$. Différentes stratégies permettent sa résolution (liste non exhaustive) : (S1) calculer directement $\tilde{u}$; (S2) calculer dans un premier temps $\nabla \tilde{u}$ (S2a), puis $\tilde{u}$ par intégration (S2b). Il est avéré, ne serait-ce que par une analyse rapide du nombre de publications relevant de chacune de ces stratégies, que l'étape d'intégration S2b de la stratégie S2 est particulièrement simple à mener. En revanche, l'étape S2a de S2 est un problème mal posé typique. Sa résolution nécessite de rajouter des contraintes au problème afin de le rendre bien posé, mais il est parfois difficile de faire en sorte que la solution du problème bien posé soit fidèle, ne serait-ce que qualitativement, au relief de la scène (cf. néanmoins la méthode de résolution par optimisation stochastique récemment proposée dans [3]).

La résolution du SFS prenant en compte la perspective n'a été que très rarement abordée. En outre, ces rares contributions [12, 11, 8] n'ont jamais traité le problème dans sa généralité, donc la modélisation du SFS par l'équation de l'eikonale perspective proposée ci-dessus n'avait pas encore été établie, à notre connaissance. Étant donné que t et ∇t apparaissent simultanément dans (22), il semble que seule la stratégie S1 puisse être envisagée pour sa résolution. En réalité, il est également possible d'adopter la stratégie S2, mais cela nécessite de formuler le problème autrement, comme nous allons le voir. Le choix de S2 permettra de ne pas compliquer l'étape la plus difficile, à savoir S2a, mais nécessitera de compliquer l'étape la plus simple, à savoir S2b.

4.2 Résolution en deux étapes

En fait, seule la stratégie S1 est totalement rigoureuse d'un point de vue mathématique, vu que la stratégie S2 rajoute implicitement des inconnues au problème, qui sont censées correspondre aux composantes du gradient de l'inconnue. Néanmoins, si elle est plus rigoureuse, S1 est souvent plus compliquée à mettre en œuvre que S2. Les fonctions $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ rajoutées comme inconnues par S2, dans le cadre de la résolution de l'équation de l'eikonale, sont censées correspondre aux composantes de $\nabla \tilde{u}$, mais sans aucune garantie. En particulier, l'égalité de Schwartz $\partial \tilde{p} / \partial Y' = \partial \tilde{q} / \partial X'$ n'est généralement pas vérifiée, même si $\tilde{u}$ est de classe C^2 (imposer l'égalité de Schwartz comme contrainte reviendrait en fait à adopter la stratégie S1, cf. [9]). Cela signifie qu'aucune fonction $\tilde{u}$ n'admet comme gradient le couple de fonctions $(\tilde{p}, \tilde{q})$ trouvé lors de l'étape S2a. Malgré ce

défaut, il est intéressant de noter que la stratégie S2 est la plus souvent choisie.

Dans le cas de l'équation de l'eikonale perspective, il ne serait pas judicieux d'introduire comme nouvelles inconnues les fonctions v et w , qui se rajouteraient à l'inconnue « naturelle » du problème, à savoir la fonction t . Introduisons plutôt les deux fonctions $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ telles que la normale unitaire sortante au point P s'écrive :

$$\vec{n}(P) = \frac{(-\tilde{v}(X,Y), -\tilde{w}(X,Y), 1)}{\sqrt{\tilde{v}(X,Y)^2 + \tilde{w}(X,Y)^2 + 1}}. \quad (23)$$

La définition de la normale $\vec{n}(P)$ étant indépendante de tout paramétrage, et la troisième coordonnée du vecteur situé au numérateur de (23) étant fixée à 1, cela définit bien $\tilde{v}(X,Y)$ et $\tilde{w}(X,Y)$ sans ambiguïté, même si $\vec{n}(P)$ est parallèle au plan Π , auquel cas $\tilde{v}(X,Y)$ ou $\tilde{w}(X,Y)$ est infini. Par ailleurs, il est bien évident que le couple $(\tilde{v}, \tilde{w})$ n'est le gradient d'aucune fonction des variables (X,Y) , pas plus que les inconnues supplémentaires $(\tilde{p}, \tilde{q})$ n'étaient le gradient d'une quelconque fonction de (X', Y') , dans le cas de l'équation de l'eikonale. L'intérêt de ces nouvelles inconnues est qu'elles permettent d'exprimer très simplement le produit scalaire $-\vec{S} \cdot \vec{n}(P)$:

$$-\vec{S} \cdot \vec{n}(P) = \frac{S}{\sqrt{\tilde{v}(X,Y)^2 + \tilde{w}(X,Y)^2 + 1}}. \quad (24)$$

À partir de (1), (3), (24), (7) et (11), on peut établir l'équation suivante :

$$\tilde{v}(X,Y)^2 + \tilde{w}(X,Y)^2 = \frac{I_{\max}^2}{I'(X,Y)^2} - 1. \quad (25)$$

Nous proposons d'appeler cette équation « pseudo-équation de l'eikonale », car il ne s'agit plus du tout d'une équation aux dérivées partielles. Remarquons au passage que le second membre de cette équation est identique au second membre de l'équation de l'eikonale perspective, donc les deux premiers membres sont eux aussi égaux. Or, le premier membre de (25) a une interprétation géométrique particulièrement simple : il est égal à $\tan^2 \theta$, où θ est l'angle entre la normale $\vec{n}(P)$ et Cz (cf. figure 4). La résolution de l'équation (25) est évidemment un problème mal posé, et différentes stratégies peuvent être envisagées pour le rendre bien posé (cf. par exemple [11]). Nous ne nous attachons pas, dans cet article, à proposer une méthode de résolution originale de ce problème, qui est exactement identique au problème de l'étape S2a de l'équation de l'eikonale, pour lequel un nombre conséquent de méthodes de résolution existent déjà dans la littérature (cf. [9]).

Supposons que nous ayons pu, par l'intermédiaire d'une méthode plus ou moins performante, calculer les fonctions $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ que nous avons introduites comme nouvelles inconnues du problème. Nous savons par avance que ces fonctions ne vérifient pas l'égalité de Schwartz, mais cela se produit aussi avec l'équation de l'eikonale, donc nous allons appliquer la même démarche, qui consiste à postuler

qu'il existe bien une fonction $\tilde{t}$ telle que $\nabla \tilde{t} = (\tilde{v}, \tilde{w})$. L'intégration permettant le calcul de $\tilde{t}$ doit pouvoir être menée, entre deux points (X_1, Y_1) et (X_2, Y_2) , par un chemin quelconque, ce qui ne sera pas le cas puisque l'égalité de Schwartz n'est en général pas vérifiée. Nous utiliserons donc la méthode d'intégration de Wu et Li [15], qui utilise deux chemins d'intégration différents et fait la moyenne des deux intégrales, de telle sorte que l'erreur commise sur le relief reconstruit soit moindre. Nous allons maintenant détailler cette méthode d'intégration dans un cadre discret.

4.3 Méthode d'intégration itérative

Dorénavant, nous plaçons le problème dans un cadre discret. Pour cela, nous supposons que les pixels constituent un maillage carré régulier et que deux pixels voisins sont distants de δ . Nous notons (i, j) le pixel pour lequel $(X, Y) = (i\delta, j\delta)$. La version discrète de la méthode de Wu et Li consiste à calculer $\tilde{t}_{i+1, j+1}$ de la façon suivante :

$$\tilde{t}_{i+1, j+1} = \tilde{t}_{i, j} + l_{i, j} e(\tilde{v}_{i, j}) + m_{i, j} e(\tilde{w}_{i, j}), \quad (26)$$

où $e(\tilde{v}_{i, j}) = (\tilde{v}_{i, j} + \tilde{v}_{i+1, j} + \tilde{v}_{i, j+1} + \tilde{v}_{i+1, j+1})/4$, $e(\tilde{w}_{i, j}) = (\tilde{w}_{i, j} + \tilde{w}_{i+1, j} + \tilde{w}_{i, j+1} + \tilde{w}_{i+1, j+1})/4$, $l_{i, j}$ est la distance projetée sur l'axe Cx entre les points objets correspondant aux pixels (i, j) et $(i+1, j)$, et enfin $m_{i, j}$ est la distance projetée sur l'axe Cy entre les points objets correspondant aux pixels (i, j) et $(i, j+1)$. Bien entendu, si l'hypothèse H7 était valide, toutes les distances $l_{i, j}$ et $m_{i, j}$ seraient égales, comme le montre la figure 5. En revanche, il est évident que sans l'hypothèse H7, ces distances sont variables (cf. figure 6) et qui plus est, elles sont inconnues *a priori*, puisqu'elles sont directement liées au relief, c'est-à-dire à l'inconnue. Nous préconisons donc une version itérative de la méthode de Wu et Li : à l'itération 0, nous supposons que les points objets se trouvent situés sur un plan orthogonal à Cz (comme sur la figure 5), ce qui permet d'initialiser les matrices $L^0 = (l_{i, j}^0)_{(i, j)}$ et $M^0 = (m_{i, j}^0)_{(i, j)}$, dont tous les éléments sont égaux. La méthode d'intégration de Wu et Li donne le relief, c'est-à-dire les coefficients de la matrice $T^1 = (\tilde{t}_{i, j}^1)_{(i, j)}$, qui permet ensuite de calculer $L^1 = (l_{i, j}^1)_{(i, j)}$ et $M^1 = (m_{i, j}^1)_{(i, j)}$, et ainsi de suite. Nous allons maintenant tester cette méthode sur l'image de la figure 3(b), afin d'en vérifier la pertinence.

4.4 Convergence de l'intégration itérative

En partant des normales réelles du livre, la méthode d'intégration itérative qui vient d'être décrite converge rapidement vers le relief recherché (cf. figure 7). Notons $|\Delta z|$ l'écart moyen entre le relief reconstruit et le relief réel. À partir de la quatrième itération, la méthode n'apporte plus d'amélioration significative à la précision du relief reconstruit. C'est pourquoi, dorénavant, nous appliquerons systématiquement quatre itérations pour cette méthode (précisons que la preuve de convergence de cette méthode n'a pas été établie).

Il semble nécessaire d'observer le comportement de cette méthode face à des données $(\tilde{v}_{i, j}, \tilde{w}_{i, j})_{(i, j)}$ provenant de la

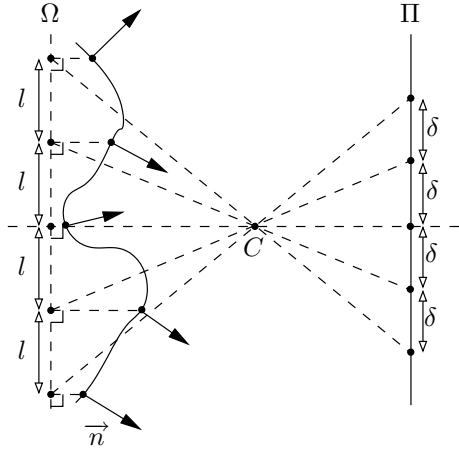


FIG. 5 – Intégration en projection orthogonale.

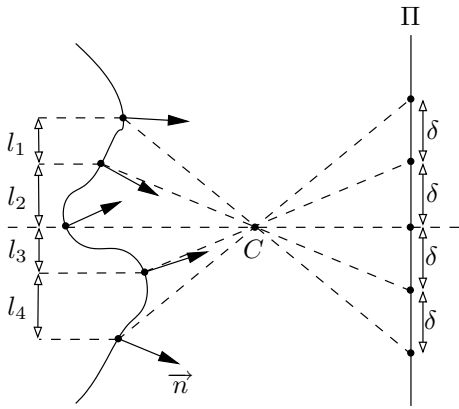


FIG. 6 – Intégration en projection perspective.

résolution de la pseudo-équation de l'eikonale. Or, comme nous l'avons déjà dit, nous n'avons pas développé de méthode de résolution de cette équation. Par conséquent, le seul moyen de calculer les valeurs $(\tilde{v}_{i,j}, \tilde{w}_{i,j})_{(i,j)}$ à partir d'une image est de choisir un relief tel que la pseudo-équation de l'eikonale soit bien posée. Si l'on sait que le relief de la scène observée est invariant par translation le long de l'axe Cx , on peut affirmer que $\tilde{v} = 0$, donc la pseudo-équation de l'eikonale ne comporte plus que $\tilde{w}$ comme inconnue. Cela ne suffit pas encore à la rendre bien posée, dans la mesure où le carré dans (25) ne permet pas de lever l'ambiguïté sur le signe de $\tilde{w}$, qui correspond à l'ambiguïté concave/convexe omniprésente en SFS. Néanmoins, si nous savons *a priori* que la scène est un livre ouvert posé à plat, cette ambiguïté peut être levée sans difficulté. Pour ces images, nous disposons donc bien d'une méthode de reconstruction par SFS prenant en compte la projection perspective et l'effet d'un champ angulaire élevé.

4.5 Robustesse de la méthode de reconstruction

La connaissance de trois paramètres intrinsèques de l'appareil photographique, à savoir d , X_O et Y_O , est requise pour

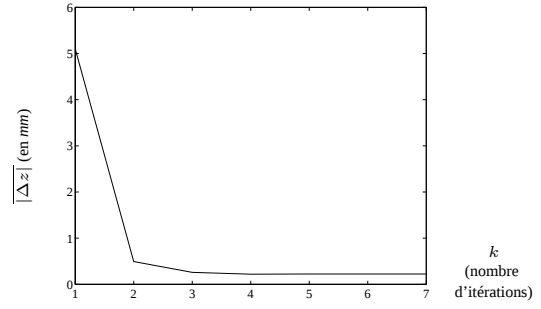


FIG. 7 – Convergence de l'intégration itérative.

le calcul de I' (cf. (20) et (21)), mais également, lors de la mise en œuvre de la méthode d'intégration itérative, pour le calcul des matrices de distances L^k et M^k (cela se voit aisément sur les figures 5 et 6). Il semble donc nécessaire de tester la robustesse de la méthode de reconstruction lorsque les valeurs de ces paramètres sont erronées. Pour cela, nous avons choisi d'introduire une erreur sur la valeur estimée de la distance focale f (qui est directement liée à la distance d , si l'on connaît la distance d' au plan moyen de la scène) ou sur la valeur de Y_O (comme, dans l'exemple traité, le relief est invariant par translation le long de Cx , il est plus significatif de modifier la valeur de Y_O que celle de X_O). Les figures 8 et 9 représentent $|\Delta z|$ en fonction de f et de Y_O . Par ailleurs, nous testons la robustesse de la méthode de reconstruction en modifiant l'éclairage, de telle sorte que $\vec{S}$, tout en restant dans le plan Cyz , fasse un angle γ avec l'axe optique, sans que cet angle soit pris en compte dans les équations, c'est-à-dire en supposant à tort que γ est nul. La figure 10 représente $|\Delta z|$ en fonction de γ . La méthode de reconstruction se comporte relativement bien face à ces perturbations. Il est important de remarquer que les intervalles de variation que nous avons utilisés pour f et Y_O sont de l'ordre de grandeur de ce que l'on trouve dans la littérature du calibrage. Par ailleurs, la valeur maximale de $|\gamma|$ (8 degrés) correspond à peu près à l'angle que fait un flash d'appareil photographique avec l'axe optique, pour une scène située à environ 30 cm, ce qui correspond bien à la valeur que nous avons choisie pour d' lors du calcul de l'image 3(b).

5 Application à la rectification de photographies de livres

Le problème de la rectification de photocopies de livres n'est pas nouveau. Dans [2], cette tâche est effectuée sur des images réelles prises par un système de reprographie spécifique, mais en utilisant une modélisation du SFS et une méthode de résolution classiques, qu'il était nécessaire d'adapter aux deux défauts les plus importants des photographies prises à faible distance, dus au champ angulaire élevé et aux effets importants de la perspective. Par ailleurs, il est à noter que les travaux de Wada *et al.* [13] portent sur la rectification d'images « scannées » de livres.

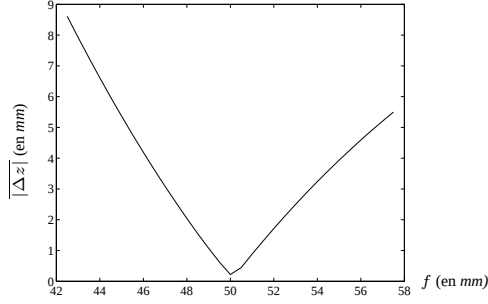


FIG. 8 – Moyenne des écarts au relief réel avec une estimation erronée de la distance focale (la valeur réelle de f est 50 mm).

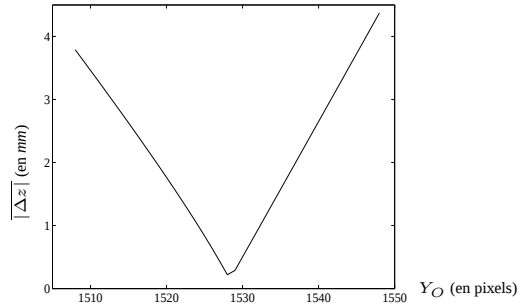


FIG. 9 – Moyenne des écarts au relief réel avec une estimation erronée de la position du point principal (la valeur réelle de Y_O est 1528 pixels).

Ces travaux soulèvent des problèmes similaires aux nôtres, mais un scanner ou une photocopieuse sont équipés de systèmes optiques spécifiques qui sont censés ne présenter aucune aberration pour un document parfaitement plat. En revanche, ces systèmes optiques ne sont pas des « systèmes optiques centrés » et sont de ce fait très complexes à modéliser. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons pensé qu'il était préférable d'utiliser un appareil photographique (l'autre raison essentielle étant que cela évite de poser le livre sur une plaque de verre, ce qui peut être fâcheux pour des livres anciens).

La méthode de reconstruction décrite dans cet article permet d'obtenir un nuage de points tridimensionnels situés sur la surface de la scène photographiée. Pour rectifier l'image, il reste encore à réaliser les étapes suivantes : (i) affecter à chaque point du nuage l'albédo qui lui correspond dans l'image de départ ; (ii) « déplier » ce nuage de points sur un plan ; (iii) calculer l'image de cette nouvelle scène. Un problème se pose lors de la réalisation de cette dernière étape : étant donné que le nuage déplié n'est pas régulier, il est nécessaire de rééchantillonner les niveaux de gris de l'image de départ pour former une grille régulière. Ce problème difficile dépasse nos compétences et ne se situe pas au cœur de notre travail. Nous avons donc utilisé la fonction `griddata` de `Matlab`, qui effectue une triangulation de Delaunay, contrairement à ce qui a été fait par certains auteurs [2]

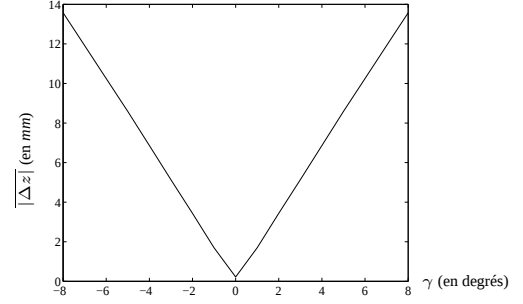
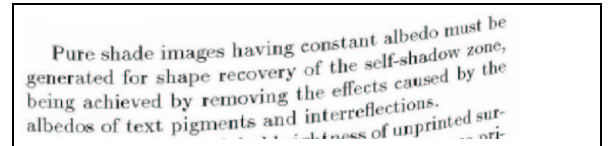
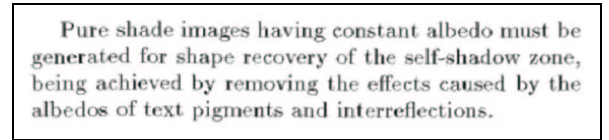


FIG. 10 – Moyenne des écarts au relief réel en fonction de la direction réelle de la source lumineuse, si on suppose à tort que γ est nul.

qui développent des méthodes d'interpolation spécifiques. La figure 11 représente une image originale (qui est en fait une partie grossie de l'image 3(b)) et l'image obtenue après rectification. Nous pouvons remarquer que le texte est devenu rectiligne et que l'espacement entre les lignes est constant. Pour valider ce résultat de façon plus rigou-



(a)



(b)

FIG. 11 – Images du livre : (a) avant rectification (I_{av}) ; (b) après rectification (I_{ap}).

reuse, nous présentons dans le tableau 1 les taux de reconnaissance donnés par un logiciel de reconnaissance de caractères, ou OCR, sur l'image avant et après rectification. En l'occurrence, nous avons utilisé le logiciel libre `gocr`. Ces résultats montrent que le pourcentage de caractères reconnus avec succès a été amélioré d'un facteur 4 environ (79 % au lieu de 19 %). Le pourcentage d'échecs a été réduit d'un facteur 3. Le taux d'abstention a été, quant à lui, divisé d'un facteur 5, ce qui nous permet de conclure que la rectification effectuée permet à l'OCR de décider plus souvent et de manière plus fiable.

	I_{av}	I_{ap}
Taux de succès	19 %	79 %
Taux d'échec	42 %	14 %
Taux d'abstention	39 %	7 %

TAB. 1 – Pourcentages de reconnaissance de l'OCR.

6 Conclusion

Le problème du SFS est généralement formulé en utilisant des hypothèses très restrictives, relativement au processus de formation de l'image. Les solutions obtenues sont connues pour être décevantes et cela débouche sur un contexte très défavorable au développement d'applications.

Dans cet article, nous montrons les points suivants. D'une part, sur un plan purement théorique, la remise en cause de certaines de ces hypothèses, notamment des hypothèses liées au modèle de caméra, à savoir le remplacement de la projection orthogonale par la projection perspective, est possible. L'équation qui en découle est mise en relation avec l'équation de l'eikonal de façon relativement simple. Notre formulation montre en quoi les travaux précédents [12, 11] avaient débouché sur une « pseudo-formulation » de ce problème. D'autre part, nous proposons une application potentielle, déjà envisagée par le passé mais de façon empirique [2], à savoir la conception d'un système de reprographie constitué d'une caméra et d'un logiciel calculant le relief des pages par SFS, puis opérant les corrections géométriques et photométriques nécessaires pour simuler la photocopie « à plat ».

Dans ce cadre-là, nous avons pu élaborer une méthode de reconstruction tridimensionnelle utilisant la nouvelle modélisation du SFS que nous avons proposée, qui prend en compte la perspective et un fort champ angulaire. Nous avons également proposé une nouvelle méthode d'intégration itérative adaptée à la projection perspective.

Afin de valider ces apports, nous avons réalisé des expériences qui mettent en évidence la robustesse de la méthode de reconstruction proposée par rapport à des incertitudes liées au paramétrage intrinsèque de la caméra.

À ce propos, nous souhaiterions intégrer l'estimation de ces paramètres à notre méthode de reconstruction, comme cela a déjà été envisagé dans [8].

Il semble par ailleurs nécessaire d'adapter les méthodes de résolution du SFS existantes à la prise en compte de notre nouvelle modélisation.

Références

- [1] P. N. BELHUMEUR, D. J. KRIEGMAN et A. L. YUILLE. « The Bas-Relief Ambiguity ». *International Journal of Computer Vision*, 35(1):33–44, novembre 1999.
- [2] S. I. CHO, H. SAITO et S. OZAWA. « A Divide-and-conquer Strategy in Shape from Shading Problems ». Dans *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, pages 413–419, Porto Rico, juin 1997.
- [3] A. CROUZIL, X. DESCOMBES et J.-D. DUROU. « A Multiresolution Approach for Shape from Shading Coupling Deterministic and Stochastic Optimization ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 25(11):1416–1421, novembre 2003.
- [4] P. DANIEL. « Peut-on extraire le relief d'une seule image ? ». Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, janvier 2000.
- [5] P. DANIEL et J.-D. DUROU. « Creation of Real Images which are Valid for the Assumptions Made in Shape from Shading ». Dans *Proceedings of the 10th International Conference on Image Analysis and Processing*, pages 418–423, Venise, Italie, septembre 1999.
- [6] J.-D. DUROU, M. FALCONE et M. SAGONA. « A Survey of Numerical Methods for Shape from Shading ». *International Journal of Computer Vision*, soumis, 2003.
- [7] O. FAUGERAS, Q.-T. LUONG et T. PAPADOPOULOU, éditeurs. *The Geometry of multiple images*. MIT Press, mars 2001.
- [8] J. K. HASEGAWA et C. L. TOZZI. « Shape from Shading with Perspective Projection and Camera Calibration ». *Computers and Graphics*, 20(3):351–364, mai 1996.
- [9] B. K. P. HORN et M. J. BROOKS. « The Variational Approach to Shape From Shading ». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 33(2):174–208, février 1986.
- [10] B. K. P. HORN et R. W. SJOBERG. « Calculating the Reflectance Map ». *Applied Optics*, 18(11):1770–1779, juin 1979.
- [11] K. M. LEE et C.-C. J. KUO. « Shape from Shading with Perspective Projection ». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing: Image Understanding*, 59(2):202–212, mars 1994.
- [12] M. A. PENNA. « A Shape from Shading Analysis for a Single Perspective Image of a Polyhedron ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 11(6):545–554, juin 1989.
- [13] T. WADA, H. UKIDA et T. MATSUYAMA. « Shape from Shading on Textured Cylindrical Surface Restoring Distorted Scanner Images of Unfolded Book Surfaces ». Dans *Proceedings of the IAPR Workshop on Machine Vision and Applications*, pages 591–594, décembre 1992.
- [14] T. WADA, H. UKIDA et T. MATSUYAMA. « Shape from Shading with Interreflections Under a Proximal Light Source: Distortion-Free Copying of an Unfolded Book ». *International Journal of Computer Vision*, 24(2):125–135, septembre 1997.
- [15] Z. WU et L. LI. « A Line-Integration Based Method for Depth Recovery from Surface Normals ». *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 43(1):53–66, juillet 1988.
- [16] R. ZHANG, P.-S. TSAI, J. E. CRYER et M. SHAH. « Shape from Shading: A Survey ». *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 21(8):690–706, août 1999.