

Identification continue du comportement mécanique sur une base polynomiale de Chebyshev

Julien Neyrand, Marie-Ange Andrianoely et Didier Rémond

Laboratoire de Dynamique des Machines et des Structures
INSA de LYON, Bâtiment Jean d'Alembert, 18 rue des Sciences
Domaine de la Doua, 69621 VILLEURBANNE CEDEX
Tel : 33 (0)4 72 43 89 41 – Fax : 33 (0)4 72 43 89 30

Correspondance : didier.remond@insa-lyon.fr

Résumé – *Le présent article est centré sur la mise en place d'une méthode d'identification originale utilisant les polynômes de Chebyshev. Cette approche est intéressante lorsque les signaux présentent des évolutions lentes sur l'horizon d'identification. Par ailleurs, aucune contrainte n'est imposée sur le nombre et la localisation des points de mesure sur cet horizon. Après avoir décrit la transformation de l'opérateur dérivée sous forme algébrique, les principales étapes de la méthode, caractérisées par deux approximations au sens des Moindres Carrés, sont exposées dans le formalisme d'une représentation d'état. Le comportement mécanique d'un système à 3 ddl est ensuite choisi comme exemple applicatif afin de mettre en évidence les choix qui sont importants comme celui de l'ordre de la base.*

Dans un second temps, une première étude paramétrique présente les conditions d'utilisation de l'algorithme et les avantages de l'approche proposée, mettant en exergue l'intérêt pour des signaux à évolution lente. On montre ainsi que cette méthode est adaptée à l'identification du comportement dynamique lorsque l'excitation est à évolution lente. Ensuite, on montre que l'approche reste efficace sur des signaux. Enfin, on étend le cas d'application à un système évoluant au cours du temps afin de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser cette identification particulière.

Mots-clés – *Identification, continue, Chebyshev, comportement mécanique, signaux à évolution lente, système évolutif*

I. INTRODUCTION

L'identification du comportement dynamique de systèmes mécaniques utilise traditionnellement des méthodes basées sur la détermination de la forme discrète de l'équation différentielle [7], [9]. Cette construction nécessite que les signaux d'excitation et de réponse satisfassent des hypothèses (par exemple, l'hypothèse Bloqueur d'Ordre Zéro) et que les points soient régulièrement espacés sur l'horizon d'identification. Par ailleurs, la rapidité d'échantillonnage va également conditionner la qualité de cette transformation de l'équation différentielle [10]. Enfin, cette écriture discrète conduit à l'identification de paramètres qui n'ont plus de signification physique. C'est pourquoi

depuis plusieurs années, différentes approches ont été proposées permettant d'identifier directement les paramètres de l'équation différentielle afin de s'affranchir de ces inconvénients.

Plusieurs classes de méthodes peuvent être identifiées par les principes mis en œuvre pour transformer l'équation différentielle. On peut citer par exemple les méthodes intégrales, mettant en œuvre l'intégration numérique de l'équation différentielle, la décomposition sur des fonctions modulatrices permettant de faciliter le calcul des intégrales des signaux et les méthodes basées sur l'utilisation de filtres linéaires. Une synthèse de ces méthodes est décrite dans [10] avec une bibliographie riche des travaux existants. L'ensemble de ces méthodes propose de travailler préférentiellement sur une version intégrée de l'équation différentielle alors qu'il est possible d'utiliser une approximation de l'opérateur dérivée sous une forme algébrique simple [8].

Par ailleurs, la plupart des formulations proposées partent soit d'un formalisme de type fonction de transfert [10], soit d'une représentation d'état discrète [5], [6] qui ne permet pas de choisir les variables d'état (par exemple, les mécaniciens privilégient une représentation d'état modale faisant intervenir les déplacements et les vitesses). La reconstruction de ces représentations particulières à partir de la représentation identifiée peut entraîner des difficultés, associées également au passage continu-discret.

Enfin, un dernier inconvénient des méthodes d'identification traditionnellement utilisées réside dans l'utilisation de signaux d'excitation particuliers (impulsion, bruit blanc, SBPA, ...). L'utilisation de tels signaux n'est pas toujours possible et peut devenir gênante dans le cas de l'identification d'un système contrôlé.

Dans cet article, nous proposons une méthode alternative permettant de couvrir l'ensemble de ces inconvénients en élaborant une identification basée sur la décomposition des signaux sur une base de polynômes de Chebyshev. Cette identification ne fait pas d'hypothèse particulière sur la localisation des points de mesure sur l'horizon d'identification et permet d'approximer ces signaux sur une base plus ou moins "riche". Le principal intérêt de ces polynômes réside dans le fait que *les opérateurs dérivée et produit peuvent s'exprimer comme une combinaison de ces polynômes*. Il est donc aisé de construire un opérateur de

dérivation algébrique sur cette base ou de décrire certains phénomènes mécaniques linéaires et non linéaires. Par ailleurs, d'autres bases de fonctions peuvent être construites sur ces polynômes, permettant ainsi de construire très aisément des opérateurs dans ces nouvelles bases de fonctions [8]. Partant ensuite d'une représentation d'état traditionnelle, il est possible d'exprimer la meilleure estimation des paramètres de cette représentation au sens des moindres carrés sur une décomposition dans la base des polynômes de Chebyshev.

Après un rapide rappel des propriétés des polynômes de Chebyshev, le premier paragraphe s'attache à décrire la formulation mise en œuvre. Ensuite, la méthode proposée est appliquée au comportement mécanique d'un système à 3 degrés de liberté, mettant en place les principaux indicateurs de la précision atteinte. Dans le paragraphe suivant, une étude paramétrique permet de montrer quelles sont les conditions qui conduisent à une identification satisfaisante et les conditions à proscrire. Enfin, le dernier paragraphe met en évidence les principaux intérêts de cette approche permettant d'identifier un système lorsque l'excitation présente un contenu fréquentiel pauvre, lorsque les signaux sont bruités ou lorsque le système identifié évolue au cours du temps.

II. OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL SUR UNE BASE POLYNOMIALE DE CHEBYSHEV

Les polynômes de Chebyshev sont définis à l'ordre n sur l'intervalle $[-1,+1]$ par :

$$T_n(\tau) = \cos(n \times \arccos(\tau)) \quad (1)$$

Ces polynômes constituent une base orthogonale $\{T^n\} = \langle T_0 \ T_1 \ T_2 \ \dots \ T_n \rangle^t$ sur laquelle il est possible de décomposer toute fonction sous la forme :

$$x(\tau) = \langle x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle \cdot \{T^n\} \quad (2)$$

Par ailleurs, il est également possible de définir la dérivée de chaque polynôme de Chebyshev comme une combinaison de plusieurs polynômes *d'ordre inférieur*, ce qui conduit à :

$$\frac{dT_n}{d\tau} = \begin{cases} T_0 & \text{pour } n=1 \\ 2n \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} T_{2m+1} & \text{pour } n \geq 2 \text{ et } n \text{ pair} \\ nT_0 + 2n \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} T_{2m} & \text{pour } n \geq 3 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \quad (3)$$

En réalisant un simple changement de variable pour revenir au temps t , cet opérateur peut s'exprimer sur l'intervalle de temps $[0, T]$ par :

$$\frac{dT_n}{dt} = \frac{2}{T} \begin{cases} T_0 & \text{pour } n=1 \\ 2n \sum_{m=0}^{\frac{n-1}{2}} T_{2m+1} & \text{pour } n \geq 2 \text{ et } n \text{ pair} \\ nT_0 + 2n \sum_{m=1}^{\frac{n-1}{2}} T_{2m} & \text{pour } n \geq 3 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases} \quad (4)$$

Il est alors possible d'approximer la dérivée temporelle par un opérateur matriciel en exprimant la dérivée de toute fonction dépendant du temps par :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= \langle x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle \cdot \left\{ \dot{T}^n \right\} \\ &= \langle x_0 \ x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n \rangle \cdot [D] \cdot \{T^n\} \end{aligned} \quad (5)$$

la matrice $[D]$, carrée d'ordre $n+1$, s'écrivant simplement (par exemple, lorsque n est pair) par :

$$[D] = \frac{2}{T} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 5 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2n & 0 & 2n & 0 & 2n & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

III. APPLICATION À L'IDENTIFICATION D'UN SYSTÈME LINÉAIRE INVARIANT

A. Méthodologie et formalisme retenu

Le comportement dynamique d'un système à 1 ddl est choisi pour illustrer la méthode proposée pour identifier les paramètres de ce système mécanique. Ce dernier est représentatif d'un système linéaire invariant qui peut être décrit par sa représentation d'état :

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\text{Matrice } [A]} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} U(t) \quad (7)$$

Cette équation différentielle peut alors être exprimée dans la base des polynômes de Chebyshev par la relation suivante :

$$[X] \cdot [D] \cdot \{T^n\} = [A] \cdot [X] \cdot \{T^n\} + [U] \cdot \{T^n\} \quad (8)$$

avec les décompositions suivantes sur la base de Chebyshev

$$\begin{aligned} [X]_{(2,n+1)} &= \begin{bmatrix} x_{10} & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ x_{20} & x_{21} & \dots & x_{2n} \end{bmatrix} \text{ pour les variables d'état,} \\ [U]_{(2,n+1)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{20} & u_{21} & \dots & u_{2n} \end{bmatrix} \text{ pour l'excitation.} \end{aligned}$$

L'équation (8) peut être décomposée en deux équations indépendantes, après simplification par les polynômes de Chebyshev, pour conduire aux expressions qui suivent :

$$\begin{cases} \langle x_1 \rangle \cdot [D] = \langle 0 \ 1 \rangle \cdot [X] \\ \langle x_2 \rangle \cdot [D] = \langle -a_2 \ -a_1 \rangle \cdot [X] + \langle u_2 \rangle \end{cases} \quad (9)$$

Les différents signaux mesurés sont connus sur un nombre de points d'échantillonnage N_e (pas nécessairement régulièrement espacés). Afin d'estimer leur décomposition sur la base de Chebyshev, une approximation au sens des moindres carrés peut être conduite. En notant $\langle x(t) \rangle$ et $\langle u(t) \rangle$ les valeurs des signaux aux points d'échantillonnage, on peut écrire la relation suivante :

$$\begin{cases} \langle x(t) \rangle = \langle x_1 \rangle \cdot [T^n] \\ \langle u(t) \rangle = \langle u_2 \rangle \cdot [T^n] \end{cases} \quad (10)$$

où $[T^n]$ représente la matrice des valeurs prises par les polynômes de Chebyshev aux points d'échantillonnage. La détermination des coefficients $\langle x_1 \rangle$ et $\langle u_2 \rangle$ est alors immédiate par une inversion de matrice au sens des moindres carrés (si $N_e > n+1$). Les équations (9) conduisent alors à l'expression suivante :

$$[X]^T \cdot \begin{Bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \{u_2\} - [D]^T \cdot \{x_2\} \quad (11)$$

où la matrice $[X]$ est déterminée entièrement à partir de $\langle x_1 \rangle$ et $\langle x_2 \rangle$ par la relation liant les deux variables d'état :

$$\langle x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle \cdot [D] \quad (12)$$

Les coefficients inconnus sont alors déterminés au sens des moindres carrés par la relation :

$$\begin{Bmatrix} a_2 \\ a_1 \end{Bmatrix} = \left[\begin{matrix} [X]^T \cdot [X] \\ [X]^T \cdot [D]^T \cdot [X] \end{matrix} \right]^{-1} \cdot \left[\begin{matrix} [X]^T \cdot \{u_2\} \\ [X]^T \cdot [D]^T \cdot \{x_2\} \end{matrix} \right] \quad (13)$$

B. Application à un système 3 ddl

Afin de valider cette approche, la simulation du comportement d'un système mécanique à 3 ddl va permettre de générer le signal d'excitation sur la première masse et les réponses en déplacement des trois masses. Le schéma de la figure suivante présente l'architecture de ce système et l'équation d'état (14) résulte d'une mise en équation traditionnelle des lois de la Mécanique.

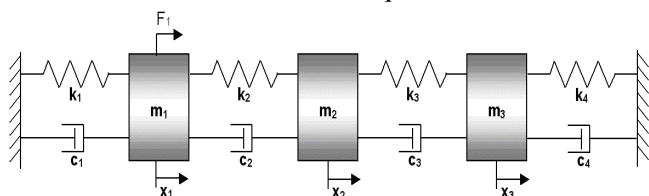


Fig. 1. : Schéma du système de test

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K1+K2}{M1} & \frac{K2}{M1} & 0 & -\frac{C1+C2}{M1} & \frac{C2}{M1} & 0 \\ \frac{K2}{M2} & \frac{K2+K3}{M2} & \frac{K3}{M2} & \frac{C2}{M2} & -\frac{C2+C3}{M2} & \frac{C3}{M2} \\ 0 & \frac{K3}{M3} & -\frac{K3+K4}{M3} & 0 & \frac{C3}{M3} & -\frac{C3+C4}{M3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sin(18\pi t)/M1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Les valeurs prises par les différents paramètres sont rassemblées dans le tableau 1 avec leurs valeurs identifiées pour les conditions d'identification suivantes :

- fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz,
- ordre de la base (ou nombre de polynômes) $n=80$,
- nombre de points de la fenêtre d'identification $N_e=4200$,
- signal d'excitation sous forme d'un sinus pur à 9 Hz, d'amplitude unité.

Un critère d'erreur, appelé Erreur Absolue Moyenne est défini par la valeur moyenne de l'écart absolu sur chaque paramètres identifiés, nécessaire pour prendre en compte les écarts sur les valeurs nulles.

Paramètre	Valeur		Paramètre	Valeur	
	réelle	identifiée		réelle	identifiée
$-(K1+K2)/M1$	-3000	-3000.05	$C2/M2$	2	2.0001
$K2/M1$	2000	2000.08	$-(C2+C3)/M2$	-4	-4
0	0	-0.08	$C3/M2$	2	2.0004
$-(C1+C2)/M1$	-6	-5.999	0	0	0.06
$C2/M1$	4	3.999	$K3/M3$	1000	999.98
0	0	0.001	$-(K3+K4)/M3$	-3000	-2999.9
$K2/M2$	1000	1000.018	0	0	0.0003
$-(K2+K3)/M2$	-1500	-1500.018	$C3/M3$	4	4.002
$K3/M2$	500	500.02	$-(C3+C4)/M3$	-6	-5.998
Erreur Absolue Moyenne				0.025	

Tab. 1. : Valeurs des paramètres et valeurs identifiées

Afin d'illustrer la pertinence de ce critère EAM choisi, les conditions sont modifiées (excitation à une fréquence de 2 Hz) permettant d'obtenir une valeur de ce critère différente, donnée dans le tableau 2.

Paramètre	Valeur		Paramètre	Valeur	
	réelle	identifiée		réelle	identifiée
$-(K1+K2)/M1$	-3000	-2999.1	$C2/M2$	2	2.064
$K2/M1$	2000	1994.9	$-(C2+C3)/M2$	-4	-4.048
0	0	11.4	$C3/M2$	2	1.99
$-(C1+C2)/M1$	-6	-6.1	0	0	-0.16
$C2/M1$	4	4.1	$K3/M3$	1000	1000.73
0	0	0.02	$-(K3+K4)/M3$	-3000	-3001.56
$K2/M2$	1000	999.53	0	0	0.009
$-(K2+K3)/M2$	-1500	-1497.45	$C3/M3$	4	3.99
$K3/M2$	500	494.3	$-(C3+C4)/M3$	-6	-6.004
Erreur Absolue Moyenne				1.62	

Tab. 2. : Valeurs identifiées représentatives d'une Erreur Absolue Moyenne

C. Influence de l'amortissement et de la raideur massiques

Afin d'estimer les plages pour lesquelles l'identification est performante sur les caractéristiques mécaniques du système retenu, les deux figures suivantes montrent l'erreur commise

sur deux grandeurs en fonction de la valeur numérique prise par ces deux grandeurs. La figure 2 montre clairement que la détermination de l'amortissement massique sera précise pour toutes les conditions testées sauf lorsque, simultanément, cet amortissement est faible et la raideur massique élevée.

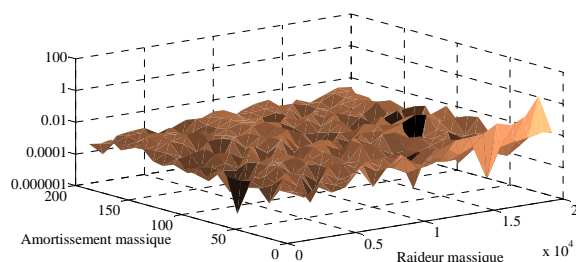


Fig. 2. : Évolution de l'erreur sur le paramètre amortissement

$$\text{massique } \frac{-(C_1 + C_2)}{M_1}$$

De la même manière, la détermination du paramètre raideur massique sera moins bonne lorsque simultanément l'amortissement massique est élevé et la raideur massique est faible (figure 3).

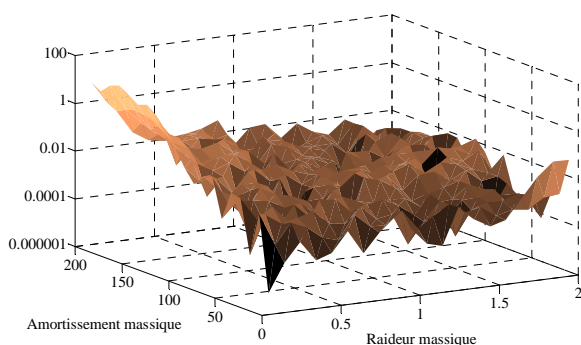


Fig. 3. : Évolution de l'erreur sur le paramètre raideur

$$\text{massique } \frac{-(K_1 + K_2)}{M_1}$$

Néanmoins, l'erreur commise reste très faible pour des paramètres représentatifs d'un système mécanique classique.

IV. DÉTERMINATION DE L'ORDRE DE LA BASE DE CHEBYSHEV

Comme on peut le remarquer, cette approche reste valable si les signaux d'excitation et de réponse ne présentent pas des valeurs connues aux mêmes instants. En particulier, elle est particulièrement intéressante lorsque les signaux ne sont pas connus avec le même nombre de points et/ou répartis de manière irrégulière sur l'horizon d'identification. Il suffit en effet que le nombre de points nécessaires pour déterminer la décomposition de chaque signal sur la base de Chebyshev soit supérieur à l'ordre de la base retenu. Il est important de signaler qu'il existe une position optimale de ces points d'interpolation sur l'horizon d'interpolation (points de Gauss-Lobatto [3]).

Par ailleurs, le choix de ce nombre de polynômes pour décrire les signaux est très fortement dépendant du contenu fréquentiel des signaux à approximer. Cette remarque est valable à la fois pour l'excitation mais également pour les réponses mesurées. Ainsi, il est nécessaire d'avoir un

nombre de polynômes élevés pour décrire un signal très oscillant. Notre méthode se prêtera donc d'autant plus à l'identification de systèmes pour lesquels les signaux sont à évolution lente.

Enfin, il faut également noter qu'il existe une relation entre le nombre de points retenus sur chaque signal, N_e , le nombre de polynômes définissant la base, n , et le nombre de paramètres à identifier, N_p . Pour pouvoir identifier un système quelconque, il est nécessaire de satisfaire la relation suivante :

$$N_e \geq n + 1 \geq N_p \quad (15)$$

Ces inégalités sont liées au fait que la méthode proposée est constituée de deux approximations aux sens des moindres carrés.

A. Influence de l'erreur de décomposition des signaux sur la précision d'identification des paramètres

Pour un signal d'excitation de forme donnée, un nombre de points d'identification donné et un système à identifier donné, l'erreur de la décomposition des signaux peut être caractérisée par l'Écart Moyen sur les quatre signaux. Cet Écart Moyen est défini par l'écart entre les valeurs réelle et approximée sur la base de Chebyshev (prises aux points de mesure), moyenné sur l'ensemble des points de mesure. Comme on peut le constater sur la figure 4, cet écart est d'autant plus important que l'ordre de la base est faible ou important, mais reste quasiment nul pour un ordre compris entre 75 et 350. C'est donc dans cette plage que la décomposition des signaux sera optimale.

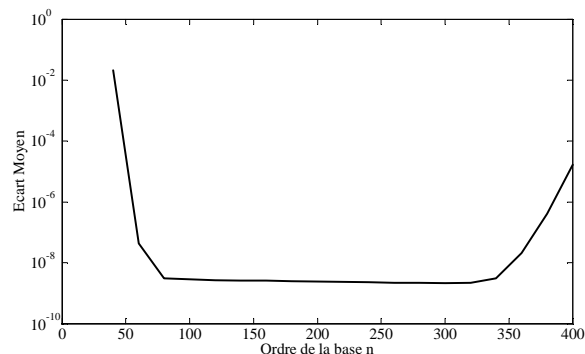


Fig. 4. : Écart Moyen en fonction de l'ordre de la base.

Par contre, le tracé de l'Erreur Absolue Moyenne pour ces différentes conditions, présenté sur la figure 5, montre qu'il est nécessaire d'avoir un ordre de la base minimum, situé vers une taille de 100 pour l'exemple choisi.

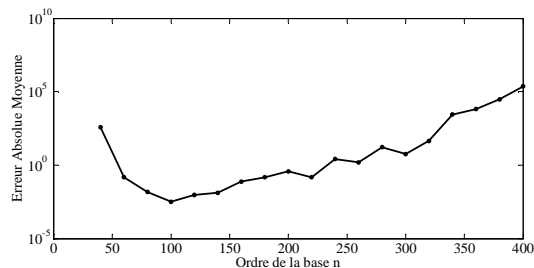


Fig. 5. : Erreur Absolue Moyenne en fonction de l'ordre de la base

Cette erreur augmente ensuite à mesure que le nombre de polynômes présents dans la base augmente. Cette imprécision dans la détermination des paramètres est directement liée au nombre d'équations à satisfaire pour déterminer un nombre de paramètres N_p fixe (résolution au sens des moindres carrés).

B. Influence de l'ordre de la base et du nombre de points sur la précision d'identification des paramètres

De manière à déterminer l'effet simultané de l'ordre de la base et du nombre de points sur l'horizon d'identification, la figure 6 présente l'évolution de l'Erreur Absolue Moyenne dans le plan (n, N_c) .

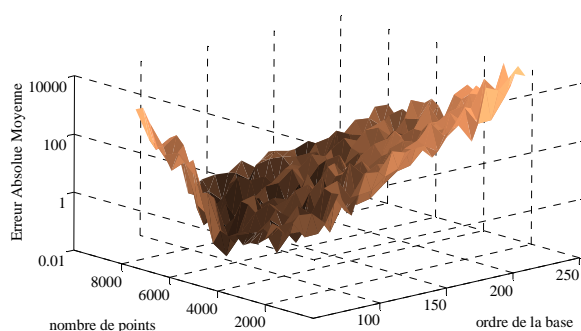


Fig. 6. : Erreur Absolue Moyenne en fonction de l'ordre de la base et du nombre de points d'échantillonnage (fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz).

Comme on peut le constater, à mesure que l'ordre de la base augmente, il est nécessaire d'augmenter le nombre de points nécessaires pour approximer correctement les signaux d'identification et obtenir une identification précise des paramètres.

C. Influence de l'ordre de la base et de la fréquence d'échantillonnage sur la précision d'identification des paramètres

De la même manière, la représentation de l'Erreur Absolue Moyenne en fonction de l'ordre de la base et de la fréquence d'échantillonnage pour un nombre de points de l'horizon d'identification donné (figure 7) permet de mettre en évidence le fait que plus la fréquence est faible, plus l'ordre de la base optimal est élevé.

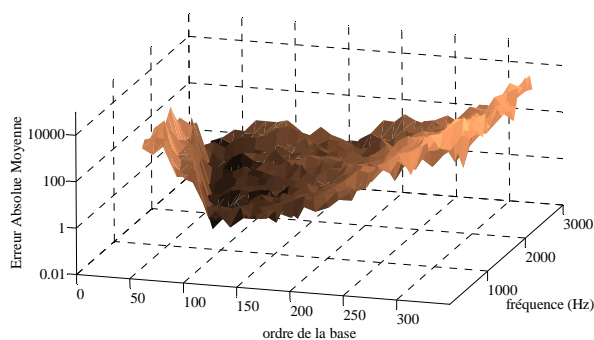


Fig. 7. : Erreur Absolue Moyenne en fonction de l'ordre de la base et de la fréquence d'échantillonnage (5000 points).

Cette analyse montre que l'ordre de la base doit être choisi en fonction du contenu fréquentiel des signaux et de la façon de les décrire. Ainsi, la description d'un signal sur échantillonné sera possible à l'aide d'un nombre réduit de polynômes de Chebyshev.

En conclusion, il est possible d'extraire de ces représentations une *règle empirique* de détermination de la taille de la base à retenir, uniquement fondée sur les simulations réalisées, exprimée en fonction de la fréquence la plus élevée contenue dans les signaux d'excitation et de réponse, f_{\max} , et de la longueur de la fenêtre d'identification, T . Cette relation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$n \approx 4 \cdot f_{\max} \cdot T \quad (16)$$

V. INFLUENCE DU SIGNAL D'EXCITATION

L'intérêt majeur de l'utilisation des polynômes de Chebyshev consiste à proposer une identification continue à l'aide de signaux d'excitation dont le contenu fréquentiel est restreint, essentiellement à des fréquences faibles. L'objectif est donc de permettre une identification sur des systèmes (mécaniques en particulier) qui ne seraient pas sollicités par des signaux traditionnellement utilisés, riches en fréquence, comme des chocs, et persistants comme le bruit blanc ou la SBPA. Cela s'avère intéressant lorsque le système à étudier est soumis à des *sollicitations représentatives de conditions réelles de fonctionnement, en particulier dans le cas de systèmes mécaniques contrôlés*. Ce paragraphe va mettre en évidence les différences liées à l'excitation du système à identifier, mettant en opposition la réponse impulsionnelle, mal décrite par la décomposition proposée et la réponse harmonique, mieux adaptée. La description du Bruit Blanc peut être extraite des conclusions extraites de la partie C.

A. Réponse impulsionnelle

Dans le cas d'une réponse impulsionnelle, la décomposition médiocre sur la base des polynômes de Chebyshev, même lorsque l'ordre est élevé, va complètement conditionner la qualité de l'identification. La figure suivante montre que l'Écart Moyen décroît lentement lorsque cet ordre de la base augmente.

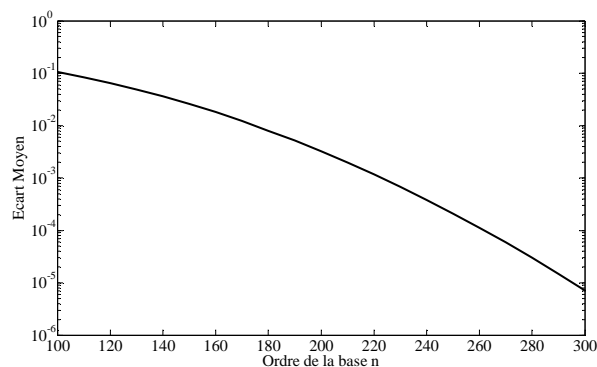


Fig. 8. : Écart moyen en fonction de l'ordre de la base sur une impulsion de 100 N à $t = 0$ s.

Cette décroissance n'est pas suffisante pour améliorer la détermination des paramètres du système mécanique à identifier comme le montre la figure 9.

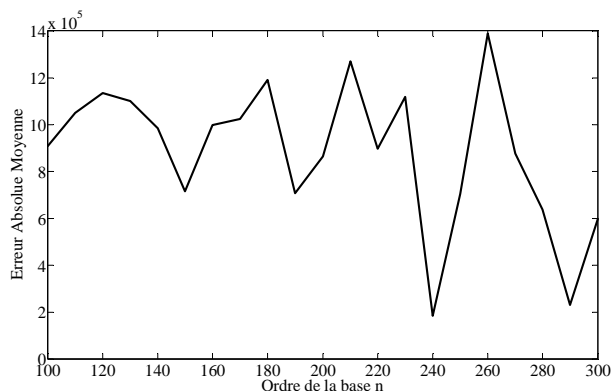


Fig. 9. : Erreur Absolue Moyenne en fonction de l'ordre de la base pour une excitation de type impulsion.

On remarque sur cette figure que dans le cas d'une réponse impulsionnelle, il est nécessaire d'avoir un ordre élevé pour identifier correctement le signal d'entrée, mais que cette amélioration ne compense pas les erreurs induites par l'augmentation du nombre d'équations à satisfaire pour déterminer les paramètres. L'excitation impulsionnelle est donc une sollicitation qui n'est pas du tout adaptée à la méthode proposée.

B. Excitation sinus

Afin de représenter un signal d'évolution lente, ayant un contenu fréquentiel restreint basse fréquence, une simulation est effectuée pour un signal d'excitation de type sinus pur. Dans ce cas, deux paramètres principaux peuvent influencer la qualité de l'identification. Tout d'abord, l'amplitude de cette excitation doit être suffisamment importante pour que les paramètres identifiés le soient correctement. La figure 10 montre clairement qu'en dessous d'une excitation de 20 N sur la première masse, il est difficile d'obtenir des paramètres corrects.

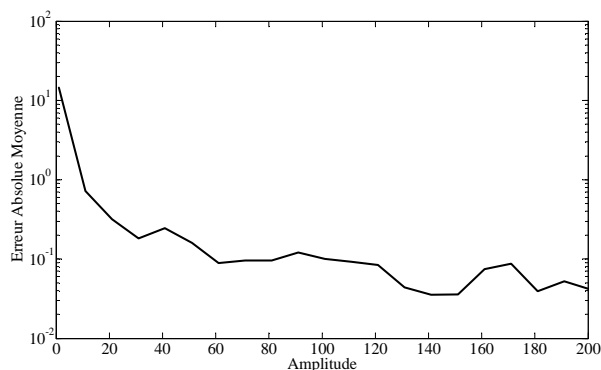


Fig. 10. : Erreur Absolue Moyenne en fonction de l'amplitude d'excitation (sinus de pulsation 22.5 Hz).

Cette amplitude correspond à des déplacements supérieurs à 10^{-2} m qui semblent être la limite numérique des réponses afin d'obtenir un résultat fiable.

Par ailleurs, en faisant varier la fréquence du sinus d'excitation pour une amplitude donnée, il apparaît, figure 11, que la plage de fréquence correspondant aux fréquences propres du système étudié soit la plage optimale d'identification.

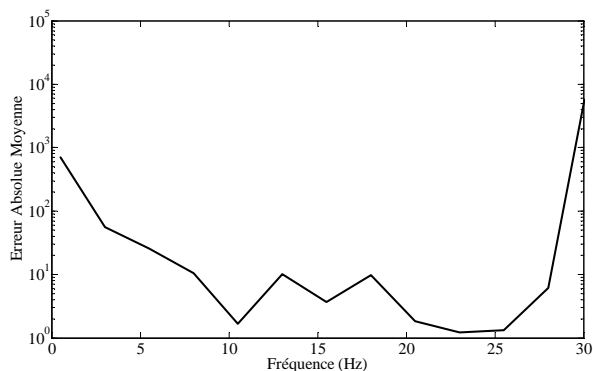


Fig. 11. : Erreur Absolue Moyenne en fonction de la fréquence d'excitation (sinus d'amplitude 10 N).

En effet, le système retenu pour cette étude présente trois fréquences propres localisées à 9,7 puis 22,2 et 25,8 Hz. Ces fréquences correspondent à la bande de fréquences pour laquelle l'identification est optimale.

C. Signaux bruités

La décomposition sur la base de Chebyshev présente des propriétés de filtrage passe-bas. Afin d'étudier l'aptitude de la méthode proposée à déterminer des paramètres dans le cas de signaux bruités, un bruit simulé est ajouté au déplacement de la première masse, permettant d'obtenir un Rapport Signal sur Bruit de 20 dB (figure 12).

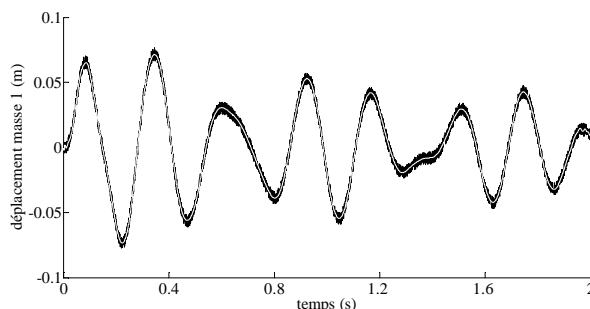


Fig. 12. : Signal de déplacement bruité et sa reconstruction après décomposition sur une base d'ordre 100.

Comme on peut le constater, les polynômes de Chebyshev présentent bien une propriété "naturelle" de filtrage passe-bas qui peut être bénéfique. Malgré cela, la détermination des paramètres conduit à des erreurs d'identification importantes, reportées dans le tableau 3.

Coefficient	Valeur		Coefficient	Valeur	
	réelle	identifiée		réelle	identifiée
$-(K1+K2) / M1$	-3000	-5313.58	$C2 / M2$	2	0.46
$K2 / M1$	2000	8412.6	$-(C2+C3) / M2$	-4	-2.371
0	0	-10752	$C3 / M2$	2	-0.43
$-(C1+C2) / M1$	-6	130.9	0	0	0.044
$C2 / M1$	4	-126.9	$K3 / M3$	1000	999.78
0	0	174.2	$-(K3+K4) / M3$	-3000	-2999.79
$K2 / M2$	1000	1014.73	0	0	-0.0038
$-(K2+K3) / M2$	-1500	-1544.53	$C3 / M3$	4	4.004
$K3 / M2$	500	573.96	$-(C3+C4) / M3$	-6	-6.006
Erreur Absolue Moyenne			1.114×10^3		

Tab. 3. : Valeurs identifiées dans le cas d'un signal de déplacement de la première masse bruité (RSB de 20 dB).

Les termes les moins précisément identifiés sont bien évidemment ceux qui font intervenir la dérivée de ce

déplacement pour leur détermination (les douze premiers termes du modèle). Le tracé de cette vitesse (figure 14), extraite de la décomposition du déplacement de la masse sur la base de Chebyshev, permet de bien mettre en évidence que l'erreur est principalement due aux effets de bord.

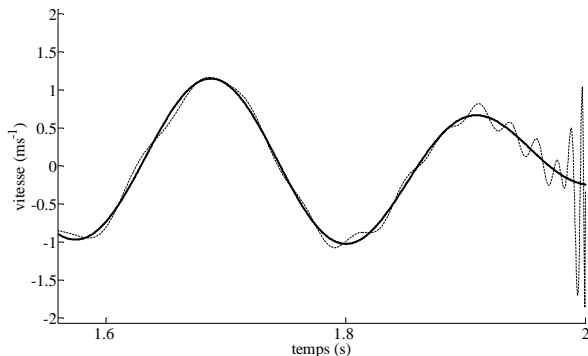


Fig. 13. : Vitesse réelle et son approximation sur la base de Chebyshev à une extrémité de la fenêtre d'identification.

Ainsi, il est possible de conserver une identification correcte en ne retenant que les points situés au centre de la fenêtre d'identification. Cet artifice nécessite néanmoins de récrire l'équation (9) sans simplifier par les polynômes de Chebyshev exprimés aux points de mesure retenus. A titre d'exemple, le tableau 4 rassemble les paramètres identifiés en ne prenant que les points situés dans l'intervalle de temps [0.2 s; 1.8 s].

Coefficient	Valeur		Coefficient	Valeur	
	réelle	identifiée		réelle	identifiée
$-(K1+K2) / M1$	-3000	-2991.42	$C2 / M2$	2	1.93
$K2 / M1$	2000	1961.4	$-(C2+C3) / M2$	-4	-3.7
0	0	68.15	$C3 / M2$	2	1.34
$-(C1+C2) / M1$	-6	-5.94	0	0	0.01
$C2 / M1$	4	3.91	$K3 / M3$	1000	999.97
0	0	0.2	$-(K3+K4) / M3$	-3000	-2999.95
$K2 / M2$	1000	1003.1	0	0	7.6×10^{-5}
$-(K2+K3) / M2$	-1500	-1504.4	$C3 / M3$	4	4
$K3 / M2$	500	509.13	$-(C3+C4) / M3$	-6	-6
Erreur Absolue Moyenne			7.4		

Tab. 4. : Valeurs identifiées sur une portion centrale de la fenêtre d'identification en présence de bruit (RSB de 20 dB). On peut remarquer que les valeurs identifiées sont alors acceptables sur la plupart des paramètres.

D. Système variable dans le temps

Pour caractériser également l'aptitude de l'identification proposée à suivre un système dont les paramètres évoluent au cours du temps, la masse M_1 du système change brutalement à $t = 1$ s (passage de 1 à 2 Kg). L'ensemble des autres conditions d'étude ne changent pas (excitation sinus à 5 Hz, fréquence d'échantillonnage à 1000 Hz). La décomposition des signaux est réalisée sur l'horizon complet d'identification sur une base comportant 180 polynômes. Par contre, la détermination des paramètres se fait sur une fenêtre glissante, de taille variable (de 100 à 400 points), avec un pas de 50 points (recouvrement des fenêtres successives). La figure 14 montre la détermination d'un paramètre raideur massique du modèle qui est affecté par ce changement de masse au cours du temps.

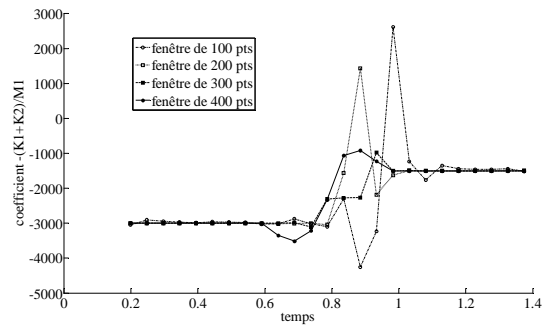


Fig. 14. : Identification d'un système variable au cours du temps (5000 points).

Comme on peut le constater, cette évolution est relativement bien décelée lorsque la taille de la fenêtre est élevée (300 ou 400 points). A nouveau, il est nécessaire de faire un compromis entre une détection précise de l'instant du changement de caractéristique et la précision de la valeur du paramètre déterminée sur un nombre suffisant de polynômes.

VI. CONCLUSIONS

L'article présenté propose une approche alternative à l'identification continue du comportement linéaire dynamique de systèmes mécaniques. Basé sur une décomposition dans une base de polynômes de Chebyshev, cette approche nécessite au plus deux estimations au sens de moindres carrés. La première est nécessaire pour déterminer la décomposition des signaux sur cette base de fonction, elle peut être évitée si les points de mesure sont positionnés de manière particulière (points de Gauss-Lobatto). La seconde consiste à estimer les paramètres du modèle à partir d'une écriture algébrique de l'équation différentielle gouvernant le comportement, traditionnellement écrite sous forme d'une représentation d'état. Un choix judicieux du nombre de polynômes permettant de décrire le problème doit être fait afin d'obtenir une identification précise des paramètres. L'étude a ensuite porté sur les différents paramètres qui peuvent influencer la qualité de l'identification. Ainsi, on montre que la nature du signal d'excitation est prépondérante. L'utilisation de signaux classiques utilisés en identification est à proscrire, il est préférable d'utiliser des signaux dont le contenu fréquentiel est localisé sur une bande basse fréquence, proche des fréquences propres du système étudié. L'amplitude du signal joue également puisque la méthode proposée semble être sensible aux valeurs numériques faibles. On montre également que les propriétés naturelles de filtrage des polynômes de Chebyshev peuvent être utilisées, à la condition d'éliminer les effets de bord liés à la décomposition sur cette base polynomiale. On montre également simplement que cette méthode est utilisable pour détecter des modifications rapides de paramètres en découplant l'horizon d'identification en fenêtres de taille raisonnable.

Les améliorations possibles de cette méthode reposent essentiellement sur l'utilisation de méthodes d'optimisation plus fines que les moindres carrés. Par ailleurs, il est possible d'optimiser l'estimation des paramètres en sélectionnant les polynômes sur lesquels cette estimation est

faite. Cette optimisation doit se construire sur la base d'un critère à définir. Enfin, il est évident que la généralisation de cette approche à d'autres polynômes permettra d'éliminer les inconvénients majeurs des polynômes de Chebyshev (par exemple, les effets de bords) et permettra d'adapter l'identification à des cas d'emploi différents.

Références :

- [1] Boje, E. (2005), 'Approximate models for continuous-time linear systems with sampling jitter', *Automatica* **41**(12), 2091-2098.
- [2] Dieng, C.O. (2005), 'Identification de systèmes mécaniques à comportement linéaire : étude de méthodes discrètes et continues et application au suivi de comportement', Master's thesis, Ecole Doctorale MEGA - INSA de LYON.
- [3] Gautschi, W. & Li, S. (1991) , 'Gauss Radau and Gauss Lobatto quadratures with doubles end points', *Journal of computation and applied mathematics* Vol. 34, N°3, 343-360.
- [4] Kilgore, T. & Prestin, J. (1996), 'Polynomial Wavelets on the Interval', *Constructive Approximation* **12**(1), 95-110.
- [5] Juang, J. (1994), *Applied system identification*, Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
- [6] Juang, J. (1997), 'State-space system realization with input- and output-data correlation', Technical report, NASA, Langley Research Center, Hampton, Virginia, USA.
- [7] Landau, I.D. & Voda, A.B. Publications, H.S., ed. (2001), *Identification des systèmes*, Hermes Science Publications, Paris.
- [8] Liu, M.; Tse, C.K. & Wu, J. (2003), 'A wavelet approach to fast approximation of steady-state waveforms of power electronics circuits', *International Journal of Circuit Theory and Applications* **31**(6), 591-610.
- [9] Ljung, L., (1999), *System Identification : Theory for the user*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, USA.
- [10] Mensler, M. (1999), 'Analyse et étude comparative de méthodes d'identification des systèmes à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle', PhD thesis, UFR Sciences et Techniques Université Poincaré.
- [11] Vincent, S. (1996), 'Étude de la complémentarité d'actionneurs pour la commande active des structures flexibles', PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace.