

Identification ensembliste de systèmes à temps continu par atteignabilité hybride

Nacim MESLEM¹, Nacim RAMDANI^{2,1}, Yves CANDAU¹

¹ CERTES EA3481, Université Paris XII Val de Marne,
61, avenue du Général de Gaulle, 94000 Créteil, France

² LIRMM UMR CNRS 5506, Université Montpellier 2,
161 rue Ada, 34392 Montpellier cedex 5, France

meslem@univ-paris12.fr, nacim.ramdani@lirmm.fr, candau@univ-paris12.fr

Résumé- Le problème d'identification des systèmes dynamiques à temps continu dans le contexte à erreur bornée est généralement résolu en utilisant des algorithmes d'inversion ensembliste avec des techniques d'encadrement de solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO), et en particulier celles reposant sur la théorie des systèmes dynamiques coopératifs. Néanmoins, l'application de cette approche se limite aux systèmes dont les composantes du champ de vecteurs d'état sont monotones par rapport aux paramètres sur toute la durée de l'expérience.

Dans cet article, nous étudions le cas où cette propriété de monotonie est satisfaite seulement par morceaux. Nous expliquons alors comment adapter l'approche d'identification, précédemment citée, à ce type de systèmes. Pour cela, nous montrons que l'EDO admet un encadrement local sur chaque segment et que la construction de l'encadrement global de l'EDO, peut être réalisée en utilisant une modélisation hybride pour le système continu incertain. Enfin, nous illustrons cette méthodologie par un exemple mettant en jeu un système réel et des données simulées.

Mots clés- Systèmes hybrides, systèmes coopératifs, systèmes dynamiques à temps continu, analyse par intervalles, erreur bornée, inversion ensembliste.

I. INTRODUCTION

L'objectif poursuivi dans le cadre de l'identification paramétrique dans un contexte à erreur bornée est de caractériser l'ensemble des valeurs des vecteurs de paramètres qui sont acceptables au sens où les erreurs associées, qu'elles soient déterministes ou aléatoires, sont comprises entre des bornes fixées *a priori*.

Dans cet article, nous étudions le cas des systèmes dynamiques décrits par des représentations d'états à temps continu du type :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{y}(\mathbf{p}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0] \\ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}_0] \end{cases} \quad (1)$$

où $t \in [t_0, t_\infty]$, $\mathbf{f} \in C^{k-1}(\mathbb{D})$, $k \geq 2$ et $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^{n+n_u+n_p}$ est un ensemble ouvert. n , n_u , m et n_p représentent respectivement les dimensions du vecteur d'état \mathbf{x} , d'entrées \mathbf{u} , de sorties \mathbf{y} et de paramètres \mathbf{p} à identifier sur un domaine $[\mathbf{p}_0]$. Les fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{g} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^m$ peuvent être non linéaires, et l'état initial $\mathbf{x}(t_0)$ est supposé incertain mais inclus dans un pavé $[\mathbf{x}_0]$ connu *a priori*.

Lorsque les fonctions de densité de probabilité caractérisant les perturbations agissant sur le système et les bruits de mesures sont disponibles, ce problème d'estimation peut être abordé dans un contexte statistique [21]. En pratique, sous certaines spécifications techniques fournies par les fabricants de capteurs, il est plus naturel de supposer que toutes les grandeurs incertaines sont bornées et de bornes connues *a priori* [8],[5]. On peut ainsi encadrer les erreurs commises sur les sorties mesurées du système.

Nous considérons le cas où les mesures sont prélevées à des instants discrets $t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ non nécessairement réguliers. Ainsi, et sous l'hypothèse que les bruits de mesures sont additifs à la sortie du système, l'équation de sortie du modèle (1) doit satisfaire à chaque instant de mesure la condition d'appartenance suivante :

$$\begin{aligned} \forall t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\} \\ \mathbf{y}(\mathbf{p}, t_i) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i), \mathbf{p}) \in \mathbf{y}_i + [\mathbf{e}_i] = [\mathbf{y}_i] \end{aligned} \quad (2)$$

où $[\mathbf{e}_i]$ représente le domaine admissible de l'erreur de mesure à l'instant t_i .

Dans ce contexte à erreur bornée, le problème d'identification admet un continuum, non nécessairement connexe, de solutions défini par :

$$\mathbb{S} = \left\{ \mathbf{p} \in [\mathbf{p}_0] \left(\begin{array}{l} \forall t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \\ \left(\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{p}, t_i)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i), \mathbf{p}) \right) \\ \wedge (\mathbf{g}(\mathbf{x}(t_i), \mathbf{u}(t_i), \mathbf{p}) \in [\mathbf{y}_i]) \end{array} \right) \right\} \quad (3)$$

Les techniques de calcul ensembliste sont bien adaptées pour résoudre ce type de problème car elles possèdent la capacité de caractériser d'une manière garantie le continuum de solution \mathbb{S} . Dans la littérature, plusieurs formes géométriques sont utilisées dans le cadre de l'estimation d'état et de paramètres, parmi lesquelles on trouve la représentation intervalle [5], [9], [19]. Pour résoudre le problème du calcul de l'image réciproque d'un ensemble, on peut utiliser l'algorithme SIVIA, algorithme global et garanti, basé sur l'arithmétique d'intervalles [6]. Il permet de caractériser l'ensemble \mathbb{S} en calculant ses approximations intérieure et extérieure. Cependant, l'utilisation de cet algorithme pour calculer (3) nécessite une fonction d'inclusion de la solution de l'équation d'état (1) aux instants de mesure. Pour calculer cette fonction d'inclusion, il faut calculer la solution de l'EDO, il existe deux grandes classes de méthodes :

La première s'appuie sur l'intégration numérique garantie des EDO [7], [11], [16]. L'utilisation conjointe de cette méthode d'intégration avec SIVIA a été testée avec succès sur des systèmes simples de faible dimension [13] [14]. Néanmoins, ces méthodes d'intégration numérique garantie souffrent de phénomène d'enveloppement ; elles fournissent souvent des résultats très pessimistes dès que le pavé initial pris pour état initial ou vecteur paramètres est de taille importante. Ceci limite donc leurs utilisations en pratique.

La deuxième classe est fondée sur la théorie des systèmes dynamiques coopératifs [18], et procure des encadrements assez étroits de la solution de l'équation d'état de (1) [20]. Dans [22], les auteurs ont montré que, sous une certaine hypothèse de monotonie par rapport aux paramètres, cette approche d'encadrement des solutions d'EDO couplée avec SIVIA peut donner des résultats très satisfaisants en termes de précision et de temps de calcul. Nous soulignons, que cette notion de coopérativité a déjà été exploitée pour construire des observateurs intervalles dédiés aux systèmes biologiques incertains [3], [4].

Nous proposons dans la suite, une nouvelle approche, basée sur la théorie des systèmes dynamiques hybrides, pour l'encadrement des systèmes dynamiques coopératifs qui ne sont pas monotones par rapport aux paramètres. Pour cela, nous organisons cet article comme suit. Nous rappelons brièvement, dans la section 2, l'algorithme d'inversion ensembliste SIVIA, et illustrons le principe des méthodes d'intégration numérique garantie, basées sur le développement de Taylor intervalle par rapport au temps, dans la section 3. Nous introduisons, dans la section 4, quelques définitions et propriétés de la théorie des systèmes dynamiques coopératifs monotones et exposons, dans la section 5, une approche générale pour traiter le cas des

systèmes non monotones par rapport aux paramètres. Avant de conclure cet article, nous présentons dans la section 6 une application d'identification d'un système thermique avec des données simulées.

II. ALGORITHME D'INVERSION ENSEMBLISTE SIVIA

L'arithmétique d'intervalles a connu ces dernières années plusieurs applications dans les filières de l'automatique, en particulier celles liées à la sécurité, à la validation et à l'identification des processus physiques [5].

Nous définissons un intervalle $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$ comme étant un ensemble fermé et convexe du corps des nombres réels \mathbb{R} , où \underline{x} et \bar{x} sont ses bornes inférieure et supérieure. De même, nous définissons un pavé ou vecteur d'intervalles $[x]$ de \mathbb{R}^n comme étant le produit cartésien de n intervalles réels. L'ensemble de tous les pavés de \mathbb{R}^n sera noté $\mathbb{I}\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, les opérations arithmétiques sur les nombres réels sont étendues aux intervalles [5], [9], [12] selon la règle suivante :

$$[x] \circ [y] = \left[\inf_{x \in [x], y \in [y]} x \circ y, \sup_{x \in [x], y \in [y]} x \circ y \right] \quad (4)$$

Notons que dans l'arithmétique des intervalles, la manipulation des ensembles se base sur la notion de fonction d'inclusion qui calcule un encadrement de l'image d'un pavé quelconque de l'ensemble de départ par une fonction réelle. On définit cette fonction comme suit.

Définition 1 : On appelle fonction d'inclusion, notée $[f]([x]) : \mathbb{I}\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R}^p$, de $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ toute fonction qui satisfait :

$$\begin{aligned} & f([x]) \subset [f]([x]) \\ \text{avec } & f([x]) = \{f(\mathbf{x}) / \mathbf{x} \in [x]\} \end{aligned} \quad (5)$$

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes pour construire des fonctions d'inclusions $[f]([x])$ [5]. La plus simple d'entre elles et qui permet de traiter une très grande classe de fonction consiste à remplacer toutes les variables de la fonction par des intervalles et tous les opérateurs et les fonction élémentaires définissant la fonction par les opérateurs et fonctions intervalles associés.

Il est parfois utile d'appliquer à l'expression mathématique de la fonction f un pré-traitement symbolique afin de réduire au mieux le nombre d'occurrence de chaque variable intervalle, et ce afin d'atténuer le phénomène de dépendance qui est une source de pessimisme.

La caractérisation de l'image réciproque d'un ensemble par une fonction peut être vue comme un problème d'inversion ensembliste. C'est un problème fréquemment rencontré en identification et problèmes inverses pour la mesure physique par exemple. L'algorithme SIVIA (*Set Inversion Via Interval Analysis* [6]) est un outil très efficace pour

caractériser cette image réciproque par arithmétique d'intervalles. Son principe repose sur un test d'inclusion. Par exemple, pour caractériser l'ensemble \mathbb{S} défini par (3), SIVIA divise, selon les résultats du test d'inclusion, l'espace initial de recherche de paramètres $[\mathbf{p}_0]$ en trois sous-pavages. Le premier, noté $\underline{\mathbb{S}}$, est constitué de l'union des sous-pavés $[\mathbf{p}]$ de $[\mathbf{p}_0]$ dont le test d'inclusion est vrai :

$$\forall t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \quad [\mathbf{g}](\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, [\mathbf{p}]) \subseteq [\mathbf{y}_i] \quad (6)$$

Le second est composé de l'union des sous-pavés dont le test d'inclusion est faux, i.e. l'union des sous-pavés qui sont inconsistants avec la structure du modèle, les données expérimentales et les bornes d'erreur :

$$\exists t_i \in \{t_1, t_2, \dots, t_N\}, \quad [\mathbf{g}](\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, [\mathbf{p}]) \cap [\mathbf{y}_i] = \emptyset \quad (7)$$

Les pavés indéterminés sont les pavés pour lesquels on ne peut pas conclure quant au résultat du test d'inclusion, i.e. les pavés qui ne satisfont ni la condition (6) ni la condition (7). Pour lever cette ambiguïté, l'algorithme bissecte ces pavés puis teste à nouveau les sous pavés résultants. On réitère ce processus jusqu'à un seuil η fixé par l'utilisateur. Ce critère d'arrêt conduit à l'arrêt de SIVIA après un nombre fini de bisections. Le troisième sous-pavage, que l'on note $\Delta\mathbb{S}$, contient l'ensemble des pavés indéterminés et de taille inférieure à η . L'union du sous-pavage $\Delta\mathbb{S}$ avec l'approximation intérieure $\underline{\mathbb{S}}$, donne une approximation extérieure de \mathbb{S} , notée $\bar{\mathbb{S}}$. Nous écrivons alors :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{S}} &= \underline{\mathbb{S}} \cup \Delta\mathbb{S} \\ \underline{\mathbb{S}} &\subseteq \mathbb{S} \subseteq \bar{\mathbb{S}} \end{aligned} \quad (8)$$

Notons que les pavés $[\mathbf{x}_i]$ utilisés dans les écritures (6) et (7) représentent des encadrements garantis des solutions de l'équation différentielle du système (1) aux instants de mesures. Dans les deux sections suivantes, nous exposons succinctement deux méthodologies de calcul de ces encadrements, i.e. les approches qui calculent une fonction d'inclusion de solutions des EDO.

III. INTÉGRATION NUMÉRIQUE GARANTIE DES EDO

Nous nous intéressons, dans cette section aux méthodes d'intégration numérique garantie basées sur le développement de Taylor par rapport au temps [7], [11], [16] et traitent avec garantie le problème de la valeur initiale des EDO.

Considérons l'équation différentielle autonome :

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0] \subseteq \mathbb{D} \quad (9)$$

où $t_0 \geq 0$, \mathbb{D} est un sous espace ouvert de \mathbb{R}^n et \mathbf{f} est supposée de classe $C^{k-1}(\mathbb{D})$. L'objectif de ces méthodes

d'intégration numérique garantie est de reconstruire à partir du couple de conditions initiales incertaines $(t_0, [\mathbf{x}_0])$, toutes les trajectoires d'état solutions de (9) sur une suite temporelle croissante $t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_N$. En effet, les pavés solution $[\mathbf{x}_i]$ calculés à l'instant t_i doivent contenir, et de manière certaine, toutes les solutions possibles engendrées par le couple $(t_0, [\mathbf{x}_0])$. Cet objectif est réalisé en deux étapes : (i) vérifier l'existence et l'unicité de la solution sur un intervalle de temps $[t_i, t_{i+1}]$ et calculer un encadrement de la trajectoire solution sur cet intervalle que l'on appellera solution a priori $[\tilde{\mathbf{x}}_i]$; (ii) calculer le pavé solution à l'instant t_{i+1} en utilisant le développement en série de Taylor de \mathbf{f} et dont le terme *reste* est évalué sur la solution a priori.

En s'appuyant sur le théorème de point fixe et l'opérateur de Picard-Lindelöf, Moore [9] a proposé une formule de premier ordre pour le calcul de la solution a priori. Cette formule s'écrit :

$$[\tilde{\mathbf{x}}_i] = [\mathbf{x}_i] + [0, h_i] \mathbf{f}([\mathbf{x}]) \quad (10)$$

où $h_i = t_{i+1} - t_i$ est le pas d'intégration.

En pratique, l'ensemble $[\tilde{\mathbf{x}}_i]$ ainsi calculé contient rarement la trajectoire solution de (9) entre t_i et t_{i+1} . Pour contourner ce problème il suffit soit de réaliser une inflation de la solution a priori ou de réduire le pas d'intégration jusqu'à ce que la condition (11) soit satisfaite.

$$[\mathbf{x}_i] + [0, h_i] \mathbf{f}([\tilde{\mathbf{x}}_i]) \subseteq [\tilde{\mathbf{x}}_i] \quad (11)$$

Généralement, cette approche du premier ordre nous impose des pas d'intégration très petits. En revanche, Corliss et Rihm [2] ont proposé une méthode d'ordre élevé pour le calcul de la solution a priori

$$\sum_{j=0}^{k-1} (t - t_i)^j \mathbf{f}^{[j]}(\mathbf{x}_i) + (t - t_i)^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_i]) \subseteq [\tilde{\mathbf{x}}_i] \quad (12)$$

où les $\mathbf{f}^{[i]}$ représentent les coefficients du développement en série de Taylor obtenus par l'algorithme récursif suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{[1]} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{f}^{[i]} &= \frac{1}{i} \frac{\partial \mathbf{f}^{[i-1]}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}, \quad i \geq 2 \end{aligned} \quad (13)$$

Le calcul des Jacobiens peut être obtenu soit par différentiation automatique [15] ou par calcul formel.

Les pas d'intégration calculés avec la relation (12) sont généralement plus larges que ceux obtenus avec la méthode de premier ordre.

D'autre part, pour calculer le pavé solution $[\mathbf{x}_{i+1}]$ à l'instant t_{i+1} on utilise le développement en série de Taylor intervalle suivant :

$$[\mathbf{x}_{i+1}] = [\mathbf{x}_i] + \sum_{j=1}^{k-1} h_i^j \mathbf{f}^{[j]}([\mathbf{x}_i]) + h_i^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_i]) \quad (14)$$

Ce schéma explicite d'intégration directe (14) est très pessimiste, il est inexploitable en pratique. Afin de réduire son pessimisme, dû essentiellement à l'effet d'enveloppement, plusieurs techniques ont été développées. Parmi lesquelles on trouve l'utilisation de la valeur moyenne pour l'évaluation de la fonction d'inclusion des coefficients de Taylor, et l'utilisation d'un pré-conditionnement matriciel qui s'appuie sur des principes d'encadrement géométriques [7], [16].

Rihm [17] a introduit le schéma implicite d'intégration numérique garantie suivant :

$$[\mathbf{x}_i] = [\mathbf{x}_{i+1}] + \sum_{j=1}^{k-1} (-h_i)^j \mathbf{f}^{[j]}([\mathbf{x}_{i+1}]) + (-h_i)^k \mathbf{f}^{[k]}([\tilde{\mathbf{x}}_i]) \quad (15)$$

On peut observer que le pavé solution recherché $[\mathbf{x}_{i+1}]$ apparaît implicitement dans (15). Dans ce cas, le problème d'intégration garantie est localement similaire à un problème inverse, pour le résoudre dans le contexte intervalle, on utilise un contracteur de type Newton [5]. Dans [16], Rihm a montré que ce schéma implicite est plus performant que le schéma explicite. En effet, il procure des encadrements des solutions plus étroits et des pas d'intégration plus larges que ceux obtenus par le schéma explicite.

Récemment, Nedialkov [11] a présenté un schéma général d'intégration. Il contient à la fois les deux schémas explicite et implicite. Son principe repose sur la formule d'Hermite-Obreshkoff, initialement dédiée à la résolution des systèmes d'équations différentielles raides. La méthode d'Hermite-Obreshkoff étendue aux intervalles (IHO), est constituée de deux phases. La première, dite phase de *prédiction* permet de calculer le pavé solution $[\mathbf{x}_{i+1}]$ en utilisant un schéma explicite. La seconde, dite phase de *correction* consiste à réduire davantage $[\mathbf{x}_{i+1}]$, calculé dans la première phase, avec un contracteur de Newton [5].

Malgré l'utilisation de ces techniques et schémas pour contrôler le pessimisme, les différents algorithmes d'intégration numérique garantie divergent si l'intégration est réalisée sur une longue période de temps ou lorsque le pavé d'état initial ou celui des paramètres est de taille assez large. Ceci limite considérablement leur utilisation en pratique. Dans la section suivante, nous présenterons une approche d'encadrement de solutions des équations différentielles incertaines qui ne souffre pas de pessimisme.

IV. THÉORIE DE COMPARAISON DES INÉGALITÉS DIFFÉRENTIELLES

Dans cette section, nous traitons le problème de la valeur initiale des EDO incertaines dans le cadre des théorèmes de comparaison des inégalités différentielles, en particulier la théorie des systèmes dynamiques coopératifs [18] que l'on définit ci-après. Cette théorie consiste à prouver l'existence et l'unicité de la solution sur un intervalle fermé du temps, et ainsi d'offrir la possibilité d'encadrer la trajectoire solution sur cet intervalle.

Définition 2 : un système dynamique incertain de la forme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}, t), \\ \text{où } \mathbf{x}(t_0) &\in [\mathbf{x}_0] \subset \mathbb{D} \text{ et } \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \end{aligned} \quad (16)$$

est dit coopératif si les éléments non diagonaux de son Jacobien sont tous positifs ou nuls

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \text{ et } \forall i \neq j \\ \frac{\partial f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}, t)}{\partial x_j} \geq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

L'un des théorèmes d'existence le plus intéressant pour résoudre le problème de la valeur initiale des EDO est le théorème de Müller [10]. Nous présentons ci-dessous une version de ce théorème adaptée au calcul des fonctions d'inclusion des solutions des EDO de type (16) coopératif [20].

Théorème 1: Soient

$$\underline{\dot{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \quad (18)$$

$$\text{et } \bar{\dot{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \quad (19)$$

deux systèmes dynamiques coopératifs certains conçus à partir de système dynamique incertain (16) tel que

$$\forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \forall t \geq t_0 \text{ et } \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D} \quad (20)$$

$$\underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \leq \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, t)$$

de plus si,

$$\underline{\mathbf{x}}(t_0) \leq \bar{\mathbf{x}}(t_0)$$

alors $\forall t \geq t_0, \forall \mathbf{x}(t_0) \in [\underline{\mathbf{x}}(t_0), \bar{\mathbf{x}}(t_0)]$, et $\forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t)$$

On note que l'unicité de la solution est garantie si la fonction \mathbf{f} est Lipschitzienne. Ainsi, la fonction d'inclusion des solutions de (16) est donnée par la relation

$$[\mathbf{x}](t) = [\underline{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t)] \quad (21)$$

où $\underline{\mathbf{x}}(t)$ (resp. $\bar{\mathbf{x}}(t)$) représente la borne inférieure (resp. supérieure) de l'approximation extérieure de la solution de (18) (resp. (19)) calculée par l'une des méthodes

d'intégration numérique garantie présentées dans la section précédente.

La difficulté rencontrée dans le contexte du *théorème 1* est la suivante : comment construire en fonction des bornes de paramètres les deux champs de vecteurs (18) et (19) ? En effet, si aucune précaution sur la stabilité n'est prise en considération on risque de construire des systèmes instables au sens de Lyapunov. Par exemple, l'apparition de bornes inférieure et supérieure d'un même paramètre dans une même composante de $\underline{\mathbf{f}}$ ou de $\overline{\mathbf{f}}$ provoque généralement leur instabilité. Cependant, nous présentons ci-dessous une règle de construction de $\underline{\mathbf{f}}$ et $\overline{\mathbf{f}}$, proposée dans [22], et qui permet de contourner ce type d'instabilité.

Règle 1 : Considérons le système coopératif incertain

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t), \quad (22)$$

$$\text{où } \mathbf{x}(t_0) \in [\mathbf{x}_0] \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n, \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \subset \mathbb{R}^{n_p} \text{ et } t \in [t_0, t_N]$$

les indices, n et n_p représentent respectivement les dimensions de vecteur d'état \mathbf{x} et de paramètres \mathbf{p} . On note que $f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t)$, $i = 1 \dots n$ sont les composantes du champ de vecteurs \mathbf{f} .

Le principe de cette règle consiste, dans le cas de la construction de $\underline{\mathbf{f}}$, à remplacer chaque paramètre p_k

$$k \in \{1, 2, \dots, n_p\} \text{ par sa borne supérieure } \overline{p}_k \text{ si } \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \leq 0 \text{ pour}$$

tout $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{D}$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ et $t \in [t_0, t_N]$, et par sa borne inférieure \underline{p}_k si $\frac{\partial f_i}{\partial p_k} > 0$ pour tout $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{D}$, $\mathbf{p} \in [\mathbf{p}]$ et

$$t \in [t_0, t_N].$$

Pour la construction de $\overline{\mathbf{f}}$, nous raisonnons de la même manière mais en inversant le sens de la *monotonie* par rapport aux paramètres.

On peut remarquer que cette règle ne s'applique que pour des systèmes dynamiques dont les composantes du champ de vecteurs sont monotones par rapport à chaque paramètre. Cela limite sa capacité de traiter la majorité des cas pratiques.

Ainsi, dans l'objectif de généraliser cette méthode d'encadrement pour tous les cas des systèmes dynamiques coopératifs, nous faisons recours à la théorie des systèmes dynamiques hybrides [1]. En effet, nous considérons les changements du sens de la monotonie de chaque composante du champ de vecteurs par rapport à chaque paramètre comme une condition de garde à laquelle le système hybride transite entre les systèmes continus constituant sa collection des champs de vecteurs. Notons que, cette collection est construite à l'aide de la *règle 1* qui assure l'encadrement des solutions de l'équation (22) entre deux transitions successives. Dans la section suivante nous présentons en détail le principe de cette approche.

V. ENCADREMENT DES SOLUTIONS D' EDO INCERTAINES PAR ATTEIGNABILITE HYBRIDE

Dans cette section, nous proposons une nouvelle approche pour l'encadrement de systèmes dynamiques coopératifs incertains dont la propriété de *monotonie* par rapport aux paramètres n'est satisfaite que par morceaux. Cette approche consiste à reformuler le problème de l'encadrement des systèmes dynamiques continus de type (22), en un problème de calcul d'exécutions de deux systèmes dynamiques hybrides supérieur et inférieur, qui englobent l'ensemble de flux d'état engendré par (22).

Un système dynamique hybride est un système dans lequel interagissent des processus à dynamique continue avec des phénomènes à événements discrets [1]. Dans le contexte présenté à la fin de la section précédente, nous présentons le système hybride supérieur (resp. inférieur) de (22) comme un septuple

$$\mathbf{H} = (\mathbb{Q}, \mathbb{E}, \mathbb{D}, \mathbb{U}, \mathbb{F}, \mathbb{G}, \mathbb{R})$$

où :

1. \mathbb{Q} est l'ensemble dénombrable des états discrets, et pour chaque état correspond un système continu certain qui majore (resp. minore) localement (22), construit à l'aide de la *règle 1*.
2. $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ est l'ensemble des transitions. Il contient toutes les commutations possibles entre les systèmes continus supérieurs (resp. inférieurs) locaux de (22).
3. \mathbb{D} est le domaine de définition de (22).
4. \mathbb{U} représente l'entrée de (22).
5. $\overline{\mathbb{F}} = \{\overline{\mathbf{f}}_q, q \in \mathbb{Q}\}$ (resp. $\underline{\mathbb{F}} = \{\underline{\mathbf{f}}_q, q \in \mathbb{Q}\}$) est la collection des champs de vecteurs qui majorent (resp. minorent) localement le flux d'état engendré par (22)

$$\forall q \in \mathbb{Q}, \overline{\mathbf{f}}_q : \mathbb{D} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

$$(\text{resp. } \forall q \in \mathbb{Q}, \underline{\mathbf{f}}_q : \mathbb{D} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.)$$

6. $\mathbb{G} = \{\mathbb{G}_e, e \in \mathbb{E}\}$ est la collection des gardes, chacune d'elles est constituée d'un ensemble \mathbb{G}_e de valeurs d'état satisfaisant une des conditions suivantes $k = 1, \dots, n_p$ et $i = 1, \dots, n$

$$g_{i,k}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\partial f_i}{\partial p_k} = 0 \wedge \text{signe}\left(\frac{\partial^- g_{i,k}}{\partial t}\right) = \text{signe}\left(\frac{\partial^+ g_{i,k}}{\partial t}\right) \quad (23)$$

et qui autorisent des transitions e

$$e = (q, q') \in \mathbb{E}, \mathbb{G}_e \subseteq \mathbb{D}.$$

où $\frac{\partial^- g_{i,k}}{\partial p_k}$ et $\frac{\partial^+ g_{i,k}}{\partial p_k}$ représentent respectivement les

dérivées partielles à gauche et à droite de $g_{i,k}$.

La condition (23) indique si la trajectoire supérieure (resp. inférieure) a franchi une des conditions de grade.

7. $\mathbb{R} = \{\mathbb{R}_e, e \in \mathbb{E}\}$ est la collection des fonctions *resets*. Elles permettent d'initialiser les champs de vecteurs $\bar{\mathbf{f}}_q$ (resp. $\underline{\mathbf{f}}_q$) après le franchissement d'une transition $e = (q, q')$.

Ainsi, cette définition nous permet de décomposer la durée de l'expérience $[t] = [t_0, t_N]$ en une suite d'intervalles, que nous noterons $[t_M]$, correspondant aux segments du temps dans lesquels toutes les composantes du champ de vecteurs \mathbf{f} de (22), $f_i(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}, t)$, $i = 1 \dots n$ sont monotones par rapport à chaque paramètre

$$[t_M] = \left\{ \begin{array}{l} [t_j] \subset [t] / \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \forall k = 1, \dots, n_p \text{ et } \forall i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \leq 0 \quad \forall t \in [t_j] \quad \vee \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_k} > 0 \quad \forall t \in [t_j] \end{array} \right\}$$

L'intérêt de cette décomposition est de pouvoir encadrer toutes les solutions possibles du système incertain (22) en appliquant localement la *règle1* sur les segments $[t_j]$ de la suite $[t_M]$

$$\forall t \in [t_j] \quad j = 1, \dots, q \quad \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \wedge \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$$

$$\underline{\mathbf{f}}_j(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{u}, t) \leq \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) \leq \bar{\mathbf{f}}_j(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}, \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{u}, t), \quad (24)$$

où $\underline{\mathbf{f}}_j \in \underline{\mathbb{F}}$ et $\bar{\mathbf{f}}_j \in \bar{\mathbb{F}}$.

Cependant, et comme la majorité des méthodes de résolution des EDO disponibles sont numériques, nous relaxons le problème de détection des temps t_e auxquels le système hybride supérieur (resp. inférieur) atteint l'une de ses conditions de garde. En effet, on s'intéresse seulement aux pas d'intégration qui contiennent ces instants, et ainsi nous construisons une deuxième suite d'intervalles $[t_N]$

$$[t_N] = \left\{ \begin{array}{l} [t_s] \subset I / \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}], \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \\ \exists k = 1, \dots, n_p, \exists i = 1, \dots, n \quad \wedge \exists t_e \in [t_s] / \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \leq 0 \quad \forall t \in [t_s, t_e] \quad \wedge \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_k} > 0 \quad \forall t \in [t_e, \bar{t}_s] \\ \vee \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_k} > 0 \quad \forall t \in [t_s, t_e] \quad \wedge \quad \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \leq 0 \quad \forall t \in [t_e, \bar{t}_s] \end{array} \right\}$$

De plus, afin de franchir les conditions de garde sans perdre la garantie de l'encadrement, nous appliquons au système (22) les méthodes d'intégration numérique garantie sur les éléments de $[t_N]$

$$\forall [t_s] \in [t_N], \forall \mathbf{p} \in [\mathbf{p}] \wedge \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}$$

$$\underline{\mathbf{f}}_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, \mathbf{u}, t) \in [\mathbf{f}](\underline{\mathbf{x}}, [\mathbf{p}], \mathbf{u}, t) \quad (25)$$

$$\wedge$$

$$\bar{\mathbf{f}}_s(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{p}}, \mathbf{u}, t) \in [\mathbf{f}](\bar{\mathbf{x}}, [\bar{\mathbf{p}}], \mathbf{u}, t)$$

Soulignons que, comme les intervalles $[t_s]$ sont de largeurs très courtes, l'effet d'enveloppement dans les différents schémas d'intégration numérique garantie sera assez faible.

Dans la section suivante, nous appliquons cette approche par atteignabilité hybride pour l'encadrement garanti de solutions des EDO pour résoudre un problème d'identification paramétrique dans le contexte erreur bornée.

VI. APPLICATION

A. Présentation du système à identifier

Dans cette application, nous traitons le problème d'identification des propriétés thermo-physiques (diffusivité a_s et conductivité λ_s) d'un matériau dans un contexte à erreur bornée. Le principe du banc d'essai (voir Figure 1), consiste à placer un échantillon du matériau de conductivité et de diffusivité inconnues entre deux plaques métalliques. La plaque de la face avant est soumise à une excitation thermique périodique. Celle de la face arrière est en contact avec l'air à température ambiante. Les contacts thermiques entre les différents éléments sont assurés par une couche de graisse à haute conductivité thermique. L'ensemble du dispositif est placé dans une enceinte sous vide secondaire. La température dans la plaque de la face avant et celle dans la plaque de la face arrière sont prélevées à des instants discrets à l'aide de thermocouples

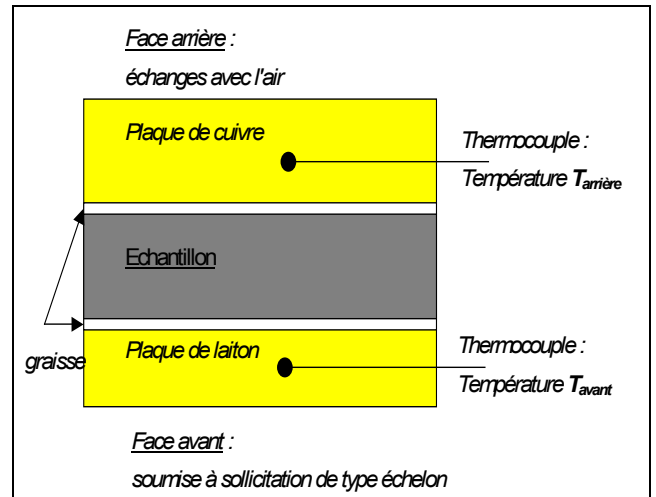


Figure 1 : Plan du banc d'essai

Ce système physique peut être modélisé par un système d'équations différentielles à dérivées partielles. La discrétisation spatiale de ce système d'équations permet d'aboutir à une représentation d'état. Les techniques de

discrétisation sont suffisamment maîtrisées pour que l'on puisse considérer que l'erreur introduite par les schémas numériques est bien plus faible que toutes les autres erreurs. La non-influence de la discrétisation sur les résultats peut être vérifiée *a posteriori* en variant le nombre de nœuds de discrétisation. Ainsi, le modèle retenu est

$$\begin{aligned}
 \frac{dT_1}{dt} &= \frac{a_L}{\Delta x_L^2} (T_2 - 2T_1 + T_u) \\
 \frac{dT_2}{dt} &= \frac{2a_L}{\Delta x_L^2} \left(T_1 - \left(1 + \frac{\Delta x_L \lambda_G}{\Delta x_G \lambda_L} \right) T_2 + \frac{\Delta x_L \lambda_G}{\Delta x_G \lambda_L} T_3 \right) \\
 \frac{dT_3}{dt} &= \frac{2a_S}{\Delta x_S^2} \left(T_4 - T_3 + \frac{\Delta x_S}{\Delta x_G} \frac{\lambda_G}{\lambda_S} (T_2 - T_3) \right) \\
 \frac{dT_i}{dt} &= \frac{a_S}{\Delta x_S^2} (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}), \quad i = 4, \dots, 9 \\
 \frac{dT_{10}}{dt} &= \frac{2a_S}{\Delta x_S^2} \left(T_9 - T_{10} + \frac{\Delta x_S}{\Delta x_G} \frac{\lambda_G}{\lambda_S} (T_{11} - T_{10}) \right) \\
 \frac{dT_{11}}{dt} &= \frac{2a_C}{\Delta x_C^2} \left(T_{12} - \left(1 + \frac{\Delta x_C \lambda_G}{\Delta x_G \lambda_C} \right) T_{11} + \frac{\Delta x_C \lambda_G}{\Delta x_G \lambda_C} T_{10} \right) \\
 \frac{dT_{12}}{dt} &= \frac{a_C}{\Delta x_C^2} (T_{13} - 2T_{12} + T_{11}) \\
 \frac{dT_{13}}{dt} &= \frac{2a_C}{\Delta x_C^2} \left(T_{12} - \left(1 + h \frac{\Delta x_L}{\lambda_C} \right) T_{13} + h \frac{\Delta x_L}{\lambda_C} T_\infty \right)
 \end{aligned} \tag{26}$$

où a , λ et Δx représentent respectivement la diffusivité thermique, la conductivité thermique et le pas de la discrétisation spatiale. Les indices L , C , S et G représentent respectivement les grandeurs relatives au lait, au cuivre, à l'échantillon et à la graisse. T_u et T_∞ désignent l'excitation du système et la température ambiante. On note par T_i , $i = 1, \dots, 13$ les températures aux différents nœuds de la discrétisation ; $\mathbf{x} = [T_1, T_2, \dots, T_{13}]^T$ le vecteur d'état et $\mathbf{p} = [a_S / \Delta x_S, 1 / \lambda_S]^T$ le vecteur de paramètres à identifier. Enfin, le vecteur d'entrée du système est $\mathbf{u} = [T_u, T_\infty]^T$. Alors le modèle (26) est de la forme

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) \tag{27}$$

Les températures initiales $\mathbf{x}(t=0)$ et T_∞ sont fixées à $10^0 C$.

Ce système thermique est sollicité par un signal périodique composé de 5 sinusoides de fréquences et d'amplitudes différentes

$$T_u = T_m + \sum_{n=1}^5 T_n \cdot \sin(2\pi 2^{n-1} f_0 t) \tag{28}$$

L'équation de sortie (mesure) est

$$y(\mathbf{p}, t) = x_{12}(t) = T_{12}(t) \tag{29}$$

Les pseudo-mesures, obtenues par simulation de (26), sont prélevées à des intervalles de temps réguliers où $\Delta t = 5s$. La durée totale de l'expérience est $500s$. Le domaine initial de recherche du vecteur des paramètres est choisi en tenant compte des valeurs physiquement admissibles pour les propriétés thermo-physiques. Les bornes de l'erreur de sortie sont fixées à $[e_i] = [-0.05, +0.05]^0 C$; ces bornes d'erreur représentent un majorant des bruits de mesure et de l'erreur de modélisation, supposés additifs aux mesures.

B. Identification des paramètres dans un contexte à erreur bornée

Pour cette application, ni les méthodes d'intégration numérique garantie, ni la théorie des systèmes coopératifs ne peuvent être utilisées pour calculer la fonction d'inclusion de (26) nécessaire pour réaliser les tests (6) et (7). En effet, les méthodes d'intégration numérique garantie souffrent d'un très fort pessimisme qui provoque leurs divergences au bout de quelques itérations. Par ailleurs, bien que le modèle (26) soit coopératif, la règle 1 présentée précédemment, n'est pas applicable car (26) ne satisfait pas la condition de *monotonie* par rapport à chaque paramètre sur toute la durée de l'expérience. En revanche, l'approche par atteignabilité hybride que nous avons introduite présente une alternative efficace pour résoudre ce problème.

Afin de construire les deux systèmes hybrides supérieur et inférieur englobant (26), on doit étudier sa monotonie par rapport aux paramètres pour définir ses conditions de garde. Le champ de vecteurs \mathbf{f} du (26) possède six composantes qui dépendent seulement de p_1 et deux composantes qui dépendent de p_1 et p_2 ,

$$\begin{aligned}
 f_3 &= 2p_1 (T_4 - T_3 + qp_2 (T_2 - T_3)) \\
 f_i &= p_1 (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad i = 4, \dots, 9 \\
 f_{10} &= 2p_1 (T_3 - T_{10} + qp_2 (T_{11} - T_{10})) \\
 \text{avec } p_1 &= \frac{a_S}{\Delta x_S^2}, \quad p_2 = \frac{1}{\lambda_S} \text{ et } q = \frac{\Delta x_S \lambda_S}{\Delta x_g}
 \end{aligned} \tag{30}$$

Les sens des variations de ces composantes par rapport aux paramètres p_1 et p_2 sont donnés par les signes des équations suivantes

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_3}{\partial p_1} &= g_{3,1}(\mathbf{T}, \mathbf{p}) = 2(T_4 - T_3 + qp_2 (T_2 - T_3)) \\
 \frac{\partial f_3}{\partial p_2} &= g_{3,2}(\mathbf{T}, \mathbf{p}) = -2qp_1 (T_2 - T_3) \\
 \frac{\partial f_i}{\partial p_1} &= g_{i,1}(\mathbf{T}, \mathbf{p}) = (T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}) \quad i = 4, \dots, 9 \\
 \frac{\partial f_{10}}{\partial p_1} &= g_{10,1}(\mathbf{T}, \mathbf{p}) = 2(T_3 - T_{10} + qp_2 (T_{11} - T_{10})) \\
 \frac{\partial f_{10}}{\partial p_2} &= g_{10,2}(\mathbf{T}, \mathbf{p}) = -2qp_1 (T_{11} - T_{10})
 \end{aligned} \tag{31}$$

Pour établir les collections de champs de vecteurs $\underline{\mathbb{F}}$ et $\overline{\mathbb{F}}$ encadrant (26), on doit d'abord poser les conditions de garde suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial p_1} = 0 \wedge \text{signe}\left(\frac{\partial^- g_{3,1}}{\partial p_1}\right) &= \text{signe}\left(\frac{\partial^+ g_{3,1}}{\partial p_1}\right) \\ \frac{\partial f_3}{\partial p_2} = 0 \wedge \text{signe}\left(\frac{\partial^- g_{3,2}}{\partial p_2}\right) &= \text{signe}\left(\frac{\partial^+ g_{3,2}}{\partial p_2}\right) \\ \frac{\partial f_i}{\partial p_1} = 0 \wedge \text{signe}\left(\frac{\partial^- g_{i,1}}{\partial p_1}\right) &= \text{signe}\left(\frac{\partial^+ g_{i,1}}{\partial p_1}\right) \quad i = 4, \dots, 9 \quad (32) \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial p_1} = 0 \wedge \text{signe}\left(\frac{\partial^- g_{10,1}}{\partial p_1}\right) &= \text{signe}\left(\frac{\partial^+ g_{10,1}}{\partial p_1}\right) \\ \frac{\partial f_{10}}{\partial p_2} = 0 \wedge \text{signe}\left(\frac{\partial^- g_{10,2}}{\partial p_2}\right) &= \text{signe}\left(\frac{\partial^+ g_{10,2}}{\partial p_2}\right) \end{aligned}$$

Donc, pour construire les deux systèmes hybrides inférieur et supérieur $\underline{\mathbf{f}}$ et $\overline{\mathbf{f}}$, les deux paramètres p_1 et p_2 doivent commuter entre leurs bornes supérieure et inférieure à chaque fois qu'une de ces conditions de garde est atteinte. Par exemple, pour majorer la composante f_3 il existe quatre

modèles possibles selon les signes de $\frac{\partial f_3}{\partial p_1}$ et de $\frac{\partial f_3}{\partial p_2}$,

$$\begin{aligned} f_3 \leq \bar{f}_3 &= 2\bar{p}_1(T_4 - T_3 + q\bar{p}_2(T_2 - T_3)) \\ \text{si } \frac{\partial f_3}{\partial p_1} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial f_3}{\partial p_2} &\geq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 \leq \bar{f}_3 &= 2\bar{p}_1(T_4 - T_3 + qp_2(T_2 - T_3)) \\ \text{si } \frac{\partial f_3}{\partial p_1} \geq 0 \text{ et } \frac{\partial f_3}{\partial p_2} &\leq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 \leq \bar{f}_3 &= 2\underline{p}_1(T_4 - T_3 + q\bar{p}_2(T_2 - T_3)) \\ \text{si } \frac{\partial f_3}{\partial p_1} \leq 0 \text{ et } \frac{\partial f_3}{\partial p_2} &\geq 0 \text{ et} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3 \leq \bar{f}_3 &= 2\underline{p}_1(T_4 - T_3 + qp_2(T_2 - T_3)) \\ \text{si } \frac{\partial f_3}{\partial p_1} \leq 0 \text{ et } \frac{\partial f_3}{\partial p_2} &\leq 0, \end{aligned}$$

Et pour minorer f_3 , on suit le même raisonnement mais en inversant la condition de monotonie.

Jusqu'à présent on a supposé que les instants de changement de signe sont connus. En réalité on ne dispose que des pas d'intégration durant lesquels ces changements de signe ont lieu, et non pas des instants exacts. Pour contourner ce problème, et comme nous l'avons souligné précédemment, on réalise sur ces pas des intégrations garanties avec le modèle incertain (26).

Les courbes présentées dans la figure 2 montrent l'avantage de cette approche hybride pour l'encadrement du flux d'état

engendré par le système incertain (26) par rapport aux méthodes d'intégration numérique garantie. En effet, les courbes en bleu représentent l'encadrement de toutes les sorties possibles de (29) engendrées par un pavé de paramètres de taille 0.004 obtenu par l'approche hybride. Par contre, les courbes rouge discontinues correspondent à l'encadrement de toutes les solutions possibles de (29), engendrées par le même pavé de paramètres, obtenu par la méthode d'intégration numérique garantie IHO. Ces courbes en rouge illustrent bien le pessimisme des méthodes d'intégration numérique garantie.

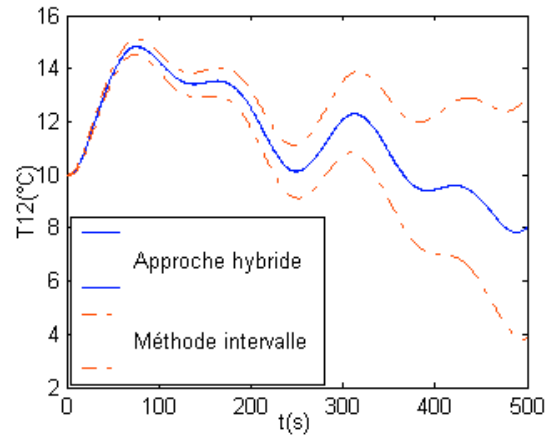


Figure 2 : L'évolution de la température $[T_{12}](t)$ au nœud de mesure. Courbes bleues : approche hybride, courbes rouges discontinues : méthode intervalle.

De plus, même pour des pavés de paramètres de taille très large la méthode d'encadrement hybride ne diverge pas. La figure 3 représente l'évolution des températures de sorties de (26) générées par un pavé de paramètres de taille 0.5, soit une incertitude de 50% sur les vrais valeurs de paramètres.

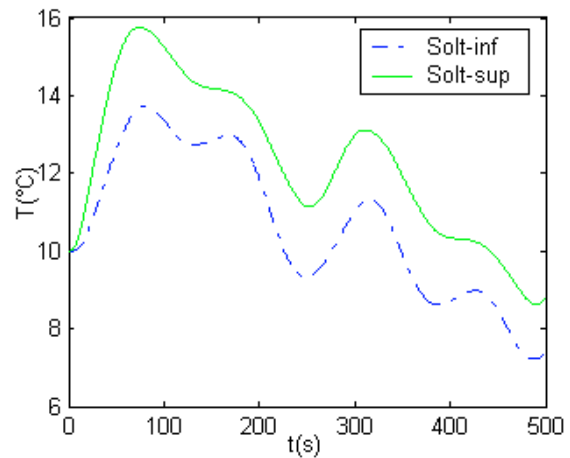


Figure 3 : La courbe en vert représente la solution supérieure, et la courbe bleue discontinue représente la solution inférieure.

RÉFÉRENCES

Enfin cette approche par atteignabilité hybride pour le calcul des fonctions d'inclusions de (26) couplée avec SIVIA nous a permis de caractériser le continuum solution de paramètres thermo-physiques compatibles avec le modèle, les données simulées et les bornes d'erreur.

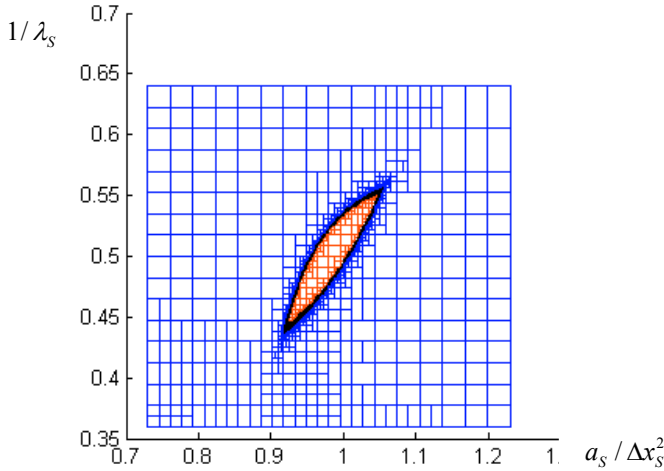


Figure 4 : Approximation intérieure (pavés en rouge) de l'ensemble solution \mathbb{S} . Couche d'incertitude $\Delta\mathbb{S}$ (pavé en noir). Les pavés rejetés (pavés en bleu). $\eta = 0.002$, $TC = 24h$

Dans la figure 4 nous présentons les approximations intérieure et extérieure de l'ensemble \mathbb{S} solution de (3). Ce résultat est obtenu en ajustant le seuil de la bisection de SIVIA η à 0.002 ; le temps de calcul est d'environ 24 heures sur un PIV 2.4 GHZ.

La projection de l'approximation extérieure $\bar{\mathbb{S}}$ sur les axes des paramètres donne un majorant garanti de l'incertitude associée à chaque paramètre identifié

$$\begin{cases} a_s \in [7.47, 8.64] \cdot 10^{-8} & \text{m}^2\text{s}^{-1} \\ \lambda_s \in [1.78, 2.31] & \text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \end{cases}$$

VII. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté une approche par atteignabilité hybride pour le calcul des fonctions d'inclusion des solutions d'équations différentielles incertaines. Elle permet de traiter de manière efficace le cas où l'EDO incertaine admet plusieurs encadrements optimaux locaux. De plus, l'utilisation de cette approche avec SIVIA a été testée avec succès sur un problème d'identification. Dans les futurs travaux, nous souhaitons étendre cette approche pour analyser les propriétés des systèmes dynamiques hybrides.

- [1] R. Alur, C. Courcoubetis, N. Halbwachs, T.A. Henzinger, P.-H. Ho, X. Nicollin, A. Olivero, J. Sifakis, and S. Yovine. The algorithmic analysis of hybrid systems. *Theoretical Computer Science*, 138 : 3-34, 1995.
- [2] G.F Corliss, and R. Rihm. Validating an a priori enclosure using high-order Taylor series. In *Scientific computing, Computer Arithmetic, and Validated Numerics*, Akademie Verlag, Berlin, pp.228-238, 1996.
- [3] J. L. Gouzé, A. Rapaport and Z. M. Hadj-Sadok. Interval observers for uncertain biological systems. In *Journal of Ecological Modelling*, 133 : 45-56, 2000.
- [4] Hadj-Sadok, M.Z. and J.L. Gouzé. Estimation of uncertain models of activated sludge processes with interval observers. In *Journal of Process Control*, 11 : 299-310, 2001.
- [5] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter. Applied Interval Analysis. *Springer*, London, 2001.
- [6] L. Jaulin, E. Walter. Set inversion via interval analysis for nonlinear bounded-error estimation. In *Automatica*, 29(4) : 1053-1064, 1993.
- [7] R.J. Lohner. Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. In *Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages (E.W. Kaucher, U.W. Kulisch, Ch. Ullrich. (Eds))*, Wiley-Teubner Series in Computer Science, Stuttgart :255-286, 1987.
- [8] M. Milanese, J.P. Norton, H. Piet-Lahanier, and E. Walter, Bounding approaches to system identification. *Plenum*, New York, 1996.
- [9] R. E. Moore. Interval Analysis. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, 1966.
- [10] M. Müller. Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, *Math.Z.* 26, 619-645, 1926.
- [11] N.S. Nedialkov. Computing Rigorous Bounds on the Solution of an Initial Value Problem for an Ordinary Differential Equation. *PhD*, Univ. of Toronto, 1999.
- [12] A. Neumaier. Interval methods for systems of equations. *University Press*, Cambridge, 1990.
- [13] T. Raïssi, N. Ramdani and Y. Candau. Parameter estimation for nonlinear continuous-time systems in a bounded error context. *Proceedings 42th IEEE CDC2003* : 2240-2245, 2003.
- [14] T. Raïssi, N. Ramdani and Y. Candau. Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equation. *Automatica* 40(10) : 1771-1777, 2004.
- [15] L.B. Rall, and G. F. Corliss. Introduction to automatic differentiation. In *Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools*. *SIAM: Philadelphia* : 1-18, 1996.
- [16] R. Rihm. Interval methods for initial value problems in ODEs. In *Topics in Validated computations: proceedings of the IMACS-GAMM Intern. Workshop on Validated Computations, Oldenburg, (J.Herzberger, (Ed.)) Elsevier Studies in Computational Mathematics*, Amsterdam, 1994.
- [17] R. Rihm. Implicit Methods for Enclosing Solutions of ODEs. *Journal of Universal Computer Science*, 4 (2) : 202-209, 1998.
- [18] H. L. Smith, Monotone Dynamical Systems: An Introduction to the Theory of Competitive and Cooperative Systems. *Vol. 41 of Mathematical Surveys and Monographs*. *AMS*. Providence, RI, 1995.
- [19] T. Sunaga. Theory of interval algebra and its application to numerical analysis. *RAAG Memoirs*, Ggujutsu Bunken Fukuy-kai 2, 547-564, 1958.
- [20] E. Walter, and M. Kieffer. Interval analysis for guaranteed nonlinear parameter estimation. *13th IFAC SYSID2003* : 259-270, 2003.
- [21] E. Walter, L. Pronzato. Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales. *Masson*, Paris, 1994.
- [22] M. Kieffer, E. Walter. Guaranteed nonlinear state estimation for continuous-time dynamical models from discrete-time measurements. In *proceedings 6 th IFAC Symposium on robust control*. Toulouse, 2006.