

Estimation de la matrice de covariance du modèle à temps continu dans une procédure d'identification indirecte

Patrick SIBILLE

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN)

Nancy-Université, CNRS UMR 7039

BP 239, F-54506 Vandœuvre Cedex, France,

Tél : (33) 3 83 68 44 61 - Fax : (33) 3 83 68 44 62

Mél : Patrick.Sibille@cran.uhp-nancy.fr

Résumé— Nous présentons une méthode originale d'estimation de la matrice de covariance des paramètres d'un modèle à temps continu dans le cadre d'une procédure d'identification indirecte. La formulation proposée assure une estimation directe des incertitudes sur le gain, la ou les constantes de temps, pulsation propre ou coefficient d'amortissement, suivant la nature du modèle, dans le cas de fonctions de transfert du premier et second ordres. Cette approche permet, également, pour une fonction de transfert d'un ordre quelconque, la quantification des incertitudes sur les coefficients des polynômes en s à partir de celles sur les coefficients des polynômes en z . Les résultats obtenus, sur deux exemples, montrent que la procédure exposée est pertinente. Cette procédure est simple à mettre en œuvre quelle que soit la méthode de conversion discret/continu choisie.

Mots-clés— conversion modèle discret/modèle continu, estimation d'incertitudes, covariance des paramètres du modèle discret, covariance des paramètres du modèle continu, intervalle d'incertitude des paramètres, région d'incertitude paramétrique.

I. INTRODUCTION

Dans sa démarche, l'automaticien exploite usuellement un modèle pour des motifs variés, par exemple, à des fins : de simulation, de diagnostic, de commande, . . . Pour ce faire, il procède à la phase usuellement dénommée *identification* qui s'appuie sur des données expérimentales.

Lors de cette étape, l'automaticien est confronté au choix, entre autres, du type de représentation. Un des dilemmes qui s'offre alors à lui se résume à : modèle à temps continu ou à temps discret ? Là, les points de vue peuvent diverger en fonction de la sensibilité, la culture, . . . ([1], [2], [3] et [4]). La recherche d'un modèle à temps discret découle d'une démarche légitime eu égard à la nature échantillonnée des mesures disponibles. Néanmoins, la représentation continue présente l'avantage d'être « naturelle » et plus proche des propriétés physiques et structurelles du système réel. Ainsi, même dans le cas d'une représentation discrète, il semble raisonnable de transposer les coefficients du modèle dans le domaine continu. Pour identifier de tels modèles, deux voies sont possibles. La première, appelée approche « indirecte », consiste, tout d'abord, à estimer un modèle discret à partir des techniques conventionnelles, au sens défini par [5] et [6]. Puis, celui-ci est converti en un modèle continu. Cette démarche est, pour l'heure, de loin la plus usitée. La seconde voie, moins académique, repose sur l'estimation directe des paramètres d'une représentation continue du modèle à partir de signaux échantillonnés ([7], [4]).

L'automaticien ne se contente pas, d'ordinaire, de l'obtention

du vecteur optimal de paramètres. En effet, comment interpréter et accorder une crédibilité totale à ce vecteur ponctuel, obtenu à partir d'une réalisation, pour une structure linéaire simplifiée (généralement « académique ») de modèle, fourni par le traitement de données, en nombre limité, entachées de bruits ? Il est, par conséquent, primordial de construire des intervalles ou régions d'incertitude paramétrique déduits, par exemple, de l'exploitation de la matrice de covariance des paramètres estimés, même si la confiance en cette dernière est limitée ! L'idéal serait, bien évidemment, d'obtenir des intervalles de confiance pour chacun des paramètres, ce qui bien souvent est inaccessible de par la nature très restrictive des hypothèses requises (par exemple : pas d'erreur de modélisation, modèle linéaire en les paramètres, les bruits sont assimilables à des variables aléatoires indépendantes gaussiennes, de moyennes nulles, identiquement distribuées et de variance donnée, . . .).

Dans cette communication, nous nous focalisons sur l'approche indirecte traditionnelle. Il est clair que cette méthodologie comporte ses avantages et inconvénients qui ne seront pas développés ici ; néanmoins, il est évident qu'un modèle à temps échantillonné est toujours plus énigmatique, voire hermétique que son équivalent à temps continu. C'est ainsi que la majorité des automaticiens, pour interpréter le modèle identifié, éprouve le besoin de revenir à des grandeurs du domaine continu, communes aux Sciences de l'Ingénieur : pulsation propre, coefficient d'amortissement, gain et constante de temps. Le décodage des incertitudes paramétriques est encore bien plus sibyllin dans le domaine discret !

Ce travail est consacré au développement d'une méthode originale de conversion dans le domaine continu, des régions d'incertitude paramétrique données dans le cadre d'une procédure d'identification indirecte. Les approches relatives à cette problématique traitent classiquement de fonctions de transfert ou représentations d'état, à coefficients incertains, à temps discret. Les auteurs ([8], [9], [10]) se fondent sur les approximations de Padé pour convertir un modèle linéaire, incertain, discret en un équivalent continu. Cette méthodologie fournit des intervalles sur les coefficients du modèle. Ces incertitudes telles quelles ne peuvent pas livrer tous leurs sens physiques. *A contrario* dans la démarche proposée, nous quantifions directement des incertitudes sur le gain, la ou les constantes de temps, pulsation propre ou coefficient d'amortissement, suivant la nature du modèle. Ces incertitudes sont indéniablement plus simples à interpréter. En outre, si les techniques d'approximants de Padé [10] ou la loi de propagation des erreurs [11] sont employées pour estimer ces

mêmes incertitudes, elles conduisent à des estimations qui sont presque toujours surévaluées par rapport à celles obtenues par la méthode présentée.

Ce papier comporte 4 parties. Dans une première partie, la classe de modèle et la nature des hypothèses effectuées sont spécifiées et le problème traité est formulé. La démarche, visant à quantifier la matrice de covariance du modèle à temps continu, est développée dans la section suivante. L'évaluation expérimentale de la méthode exposée et l'analyse des résultats sont réalisées, au paragraphe 4, sur deux exemples. Enfin, quelques conclusions sont formulées.

II. POSITION DU PROBLÈME

Nous nous intéressons à des systèmes monovariés pouvant être régis par une équation différentielle de la forme (1) :

$$\begin{aligned} \frac{d^n z(t)}{dt^n} + \alpha_1 \frac{d^{n-1} z(t)}{dt^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-1} \frac{dz(t)}{dt} + \alpha_n z(t) \\ = \beta_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + \beta_m u(t) \quad \text{avec, } m \leq n \end{aligned} \quad (1)$$

où $u(t)$ est l'entrée et $z(t)$ la sortie du système. A partir d'un lot de mesures, on se propose d'estimer les coefficients α_i et β_i de cette équation. Pour atteindre cet objectif, deux alternatives au moins sont possibles : les méthodes d'identification directes ou indirectes. Dans ce travail, on s'intéresse à la seconde classe de méthodes d'identification.

En introduisant l'opérateur ρ défini par :

$$\rho^i \triangleq \frac{d^i}{dt^i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

et, les polynômes $A(\rho)$ et $B(\rho)$ donnés par :

$$\begin{aligned} A(\rho) &= \sum_{i=0}^n \alpha_{n-i} \rho^i \quad \text{avec, } \alpha_0 = 1 \\ B(\rho) &= \sum_{i=0}^m \beta_{m-i} \rho^i \end{aligned}$$

il advient alors une écriture compacte de l'équation (1) :

$$A(\rho)z(t) = B(\rho)u(t) \quad (3)$$

Cette dernière équation à temps continu reflète, fréquemment, la nature continue des phénomènes physiques et ses paramètres peuvent avoir des interprétations naturelle et physique. Néanmoins, l'observation du système s'effectue évidemment de façon échantillonnée, de sorte que les variables observées sont sous une forme discrète : $u(k)$ et $z(k)$ désignent les mesures échantillonnées, à la période T_e , des entrées et sorties continues $u(t)$ et $z(t)$. On suppose que la sortie $z(k)$ est inaccessible à la mesure, et que seule, la grandeur $y(k)$ est observable. Cette sortie est contaminée par un bruit additif et est définie par : $y(k) = z(k) + v(k)$ où $v(k)$ est identiquement distribué, indépendant de $u(k)$, à moyenne nulle et de variance σ_v^2 . Dans l'approche académique, l'entrée $u(k)$ est supposée non bruitée.

L'équation différentielle à temps continu (1) peut être transformée en une équation aux différences au moyen d'une méthode classique de discrétisation [12], [13] :

$$\begin{aligned} z(k) + a_1 z(k-1) + \dots + a_n z(k-n) \\ = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m) \end{aligned} \quad (4)$$

Cette équation aux différences s'écrit communément :

$$A(q)y(k) = B(q)u(k) + w(k) \quad (5)$$

avec, q l'opérateur avance, et :

$$A(q) = \sum_{i=0}^n a_{n-i} q^{-(n-i)} \quad \text{avec, } a_0 = 1 \quad (6)$$

$$B(q) = \sum_{i=0}^m b_{m-i} q^{-(m-i)} \quad (7)$$

$$w(k) = A(q)v(k) \quad (8)$$

La méthodologie dite « indirecte », de loin la plus fréquente dans notre communauté, exploite la nature échantillonnée des signaux pour estimer les paramètres θ_d d'un modèle à temps discret, à partir des signaux $u(k)$ et $y(k)$.

Supposons que le critère $J^N(\theta)$ à minimiser soit quadratique, il peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} J^N(\theta_d) &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N (y_k - \hat{y}_k(\theta_d))^2 \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{k=1}^N e_k^2(\theta_d) \end{aligned} \quad (9)$$

Selon la façon d'écrire $\hat{y}_k(\theta_d)$, l'erreur minimisée correspondra à une erreur d'équation ou de sortie. Dans la littérature ([5], [6], [14]), de nombreux algorithmes d'optimisation existent pour trouver les paramètres optimaux de ce critère. A l'issue de l'étape d'estimation du vecteur des paramètres θ_d du modèle discret, il est souvent avantageux de revenir au vecteur des paramètres θ du modèle à temps continu. De plus, pour analyser les résultats, il est également souhaitable de disposer d'une incertitude paramétrique « significative », aussi l'incertitude Δ_{θ_d} , relative à θ_d , est convertie en une incertitude Δ_{θ} associée à θ . Cette méthodologie est illustrée par la figure (1).

III. ESTIMATION DE LA MATRICE DE COVARIANCE DU MODÈLE À TEMPS CONTINU

Pour que l'estimation ponctuelle produite soit pleinement exploitable, la phase d'optimisation doit être complétée par la quantification d'une incertitude ou de la précision attachée à ce vecteur estimé. Ainsi, il est nécessaire d'évaluer des domaines d'incertitude paramétrique en tirant profit, par exemple, du hessien du critère. Des régions de confiance peuvent même être définies sous des hypothèses restrictives classiques (Cf. [6]).

Pour aboutir aux résultats présentés dans ce qui suit, les hypothèses suivantes sont effectuées :

- on dispose d'un lot de N mesures échantillonnées de $u(t)$ et de $y(t)$;
- l'algorithme d'estimation utilisé fournit une estimation non biaisée du vecteur de paramètres θ_d du modèle à temps discret et une quantification de la matrice de covariance, notée $\text{Cov}(\hat{\theta}_d)$;
- cette estimation $\hat{\theta}_d$ sera assimilée aux paramètres vrais ;
- seule la fonction de transfert de la partie déterministe du modèle est prise en compte ;
- s'il existe un retard pur, il est supposé connu et multiple de la période d'échantillonnage.

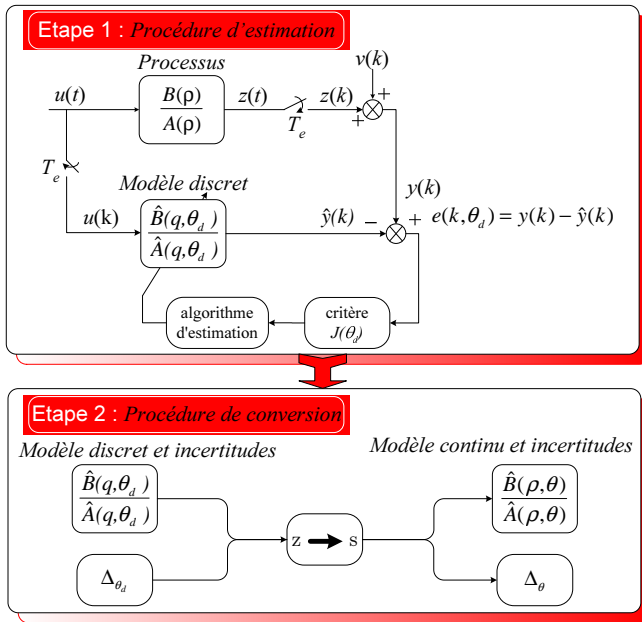


Fig. 1. Estimation des paramètres d'un modèle à temps continu par une **méthode indirecte** minimisant une erreur de sortie

A. Passage discret/continu

Dans le cas des méthodes indirectes, il est très délicat d'apprécier la qualité de l'estimation dans le domaine à temps discret. Pour s'en convaincre, prenons l'exemple très conventionnel du calcul de la constante de temps d'un premier ordre sous l'hypothèse d'un bloqueur d'ordre 0. Supposons que le coefficient auto-régressif estimé soit 0.98 ± 0.01 , ce qui donne une incertitude de l'ordre de 1%. Incertitude tout à fait satisfaisante ! En fait, dans le domaine à temps continu, elle est totalement inadmissible puisqu'elle peut conduire à une erreur sur le gain et la constante de temps de 100% ! Il est donc indispensable de revenir au domaine continu.

Ordinairement, le vecteur de paramètres θ du modèle à temps continu est une fonction non linéaire du vecteur de paramètres θ_d du modèle à temps discret. Cette fonction découle du choix de la méthode de conversion discret/continu [13] :

$$\theta = f(\theta_d) \quad (10)$$

Par définition, la matrice de covariance de $\hat{\theta}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\theta}) &= \mathbb{E} \left((\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))(\hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta}))^T \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\Delta_{\hat{\theta}} \Delta_{\hat{\theta}}^T \right) \end{aligned} \quad (11)$$

avec, $\Delta_{\hat{\theta}} = \hat{\theta} - \mathbb{E}(\hat{\theta})$.

Pour une petite variation de $\hat{\theta}$, l'équation (10) se transforme en première approximation :

$$\begin{aligned} \hat{\theta} + \Delta_{\hat{\theta}} &= f(\hat{\theta}_d + \Delta_{\hat{\theta}_d}) \\ &\simeq f(\hat{\theta}_d) + \left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d} \Delta_{\hat{\theta}_d} \end{aligned} \quad (12)$$

où, $\left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d}$ représente la matrice jacobienne de $f(\theta_d)$.

En introduisant l'équation (12) dans la matrice de covariance (11), il vient :

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \simeq \left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d} \mathbb{E} \left(\Delta_{\hat{\theta}_d} \Delta_{\hat{\theta}_d}^T \right) \left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d}^T \quad (13)$$

Finalement, une estimation de la matrice de covariance pour le vecteur de paramètres $\hat{\theta}$ du modèle à temps continu en fonction de la matrice de covariance pour le vecteur de paramètres $\hat{\theta}_d$ du modèle à temps discret est obtenue :

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \simeq \left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d} \text{Cov}(\hat{\theta}_d) \left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d}^T \quad (14)$$

Pour exploiter l'expression (14), il reste à estimer la matrice jacobienne de $f(\theta_d)$. Elle peut-être calculée analytiquement dans le cas de fonctions de transfert simples ou être évaluée numériquement dans les autres cas. Son expression dépend de la nature de la méthode utilisée pour convertir le modèle discret en un équivalent continu.

Dans la majorité des applications industrielles, les processus sont commandés par des PID, ce qui laisse à penser qu'un modèle identifié d'ordre réduit est suffisant pour synthétiser valablement un correcteur. Les modèles du premier et second ordres méritent donc une attention particulière. C'est pourquoi, nous proposons une méthode, pour ce type de fonctions de transfert, pour évaluer les incertitudes directement en termes de gain, constante de temps, pulsation propre et coefficient d'amortissement. Ces paramètres fondamentaux ont un « grand » sens physique, leur interprétation dépasse la communauté de l'automatique. Une généralisation à des modèles d'ordres supérieurs est également présentée.

B. Cas d'une fonction de transfert du premier ordre

Intéressons nous donc, à présent, à l'estimation de la matrice jacobienne $f(\theta_d)$ dans le cas de l'identification d'une fonction de transfert du premier ordre. La fonction de transfert est de la forme :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + sT} \quad (15)$$

B.1 Discrétisation par un bloqueur d'ordre 0

Sous l'hypothèse d'un **bloqueur d'ordre 0**, la fonction de transfert échantillonnée s'écrit :

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (16)$$

avec, $a_1 = -e^{-T_e/T}$ et $b_1 = K(1 + a_1)$.

Les vecteurs de paramètres estimés² sont respectivement :

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} K & T \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_d = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

Sur cet exemple, l'expression de la fonction définie par l'équation (10) peut être établie très facilement. En l'occurrence, la matrice jacobienne de $f(\hat{\theta}_d)$ à la forme suivante :

$$\left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d} = \begin{bmatrix} -\frac{b_1}{(1+a_1)^2} & \frac{1}{1+a_1} \\ \frac{T_e}{(\ln(-a_1))^2 a_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

²Pour ne pas trop alourdir les notations, les composantes de ces vecteurs ne porteront pas la marque ^ d'estimation.

B.2 Discrétisation par l'opérateur de Tustin

Si une autre méthode de transposition discret/continu est employée, il suffit de réécrire l'équation (10). Ainsi, sous l'hypothèse d'une **discrétisation par Tustin**, la fonction de transfert échantillonnée a pour expression :

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1}} \quad (19)$$

Les vecteurs de paramètres estimés deviennent alors respectivement :

$$\hat{\theta} = [K \quad T]^T \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_d = [a_1 \quad b_0 \quad b_1]^T \quad (20)$$

Les relations entre les paramètres continus et discrets sont :

$$K = \frac{b_0 + b_1}{1 + a_1} \quad T = \frac{(1 - a_1)T_e}{2(1 + a_1)} \quad (21)$$

A partir de ces relations classiques, il est donc très simple de donner une estimation de la matrice de covariance des paramètres $\hat{\theta}$ en fonction de la matrice de covariance pour le vecteur de paramètres $\hat{\theta}_d$.

C. Cas d'une fonction de transfert du second ordre

Pour ce type de fonction de transfert, deux cas doivent être envisagés : le cas des pôles réels et celui des pôles complexes conjugués.

C.1 Cas des pôles réels

Supposons que le modèle recherché soit un second ordre de la forme :

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} \quad (22)$$

Sous l'hypothèse d'un **bloqueur d'ordre 0**, la fonction de transfert échantillonnée s'écrit :

$$G(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (23)$$

Les vecteurs de paramètres estimés ont pour expression :

$$\hat{\theta} = [K \quad T_1 \quad T_2]^T \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_d = [a_1 \quad a_2 \quad b_1 \quad b_2]^T \quad (24)$$

Après quelques calculs, on peut montrer que l'expression de la matrice jacobienne de $f(\hat{\theta}_d)$ est donnée par l'équation (25).

Si la conversion s'effectue par l'**opérateur de Tustin**, la fonction $\theta = f(\hat{\theta}_d)$ prend la forme :

$$\begin{bmatrix} K \\ T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_0 + b_1 + b_2}{1 + a_1 + a_2} \\ \frac{(\sqrt{a_1^2 - 4a_2 - (a_2 - 1)})T_e}{2(1 + a_1 + a_2)} \\ \frac{(1 - a_1 + a_2)T_e}{2(\sqrt{a_1^2 - 4a_2 - (a_2 - 1)})} \end{bmatrix} \quad (26)$$

C.2 Cas des pôles complexes conjugués

Le modèle recherché est alors de la forme :

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} \quad \text{avec,} \quad \xi < 1 \quad (27)$$

Si la conversion s'effectue par l'**opérateur de Tustin**, les vecteurs de paramètres estimés ont pour expression :

$$\hat{\theta} = [K \quad \xi \quad \omega_0]^T \quad \text{et} \quad \hat{\theta}_d = [a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2]^T \quad (28)$$

et, la matrice jacobienne de $f(\hat{\theta}_d)$ prend la forme :

$$\frac{\partial f(\hat{\theta}_d)}{\partial \theta_d} = \begin{bmatrix} \frac{-b_0 - b_1 - b_2}{\alpha^2} & \frac{-b_0 - b_1 - b_2}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\alpha} \\ -\frac{(-1 + a_2)a_1}{(\beta\alpha)^{3/2}} & \frac{-2a_2 - 2 + a_1^2}{(\beta\alpha)^{3/2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2a_2 - 2}{\beta^{3/2}T_e\sqrt{\alpha}} & \frac{2a_1}{\beta^{3/2}T_e\sqrt{\alpha}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

avec, $\alpha = 1 + a_1 + a_2$ et $\beta = 1 - a_1 + a_2$.

D. Généralisation à une fonction de transfert d'ordre n

Pour une fonction de transfert d'ordre n quelconque, supérieur à 2, il est impossible de calculer, de façon générique, les incertitudes sur chacun des modes de la fonction de transfert. Cependant, par la méthode présentée, il est toujours envisageable d'estimer les incertitudes sur les coefficients du polynôme en s, à partir du polynôme en z. Toutefois, pour conserver la généricité de l'approche, une évaluation numérique de la matrice jacobienne de $f(\theta_d)$ est souhaitable. En remplaçant la dérivée analytique par une approximation aux différences finies, la matrice jacobienne prend la forme fournie par l'équation (30). D'autres évaluations de la dérivée peuvent bien évidemment être utilisées, comme par exemple, une estimation aux différences finies centrées.

En outre, cette quantification de la matrice jacobienne peut également être mise en œuvre pour des ordres inférieurs ou égaux à 2. Comme cela, le calcul formel de cette matrice est évité. Néanmoins, cette démarche induit un surcoût de calculs puisqu'elle nécessite un nombre $n_c n_d$ évaluations de la fonction $f(\theta_d)$ et implique le choix de n_d pas $\delta_{\hat{\theta}_{d,j}}$.

IV. EXEMPLES D'ILLUSTRATION

On se propose d'examiner l'applicabilité de la procédure proposée sur deux exemples simples, se limitant à deux ou trois paramètres, de sorte que les graphiques puissent être tracés dans un espace paramétrique représentable.

Afin d'évaluer significativement la méthode, une simulation de type Monté Carlo est réalisée pour juger des performances vis à vis du nombre d'observations et du rapport signal à bruit. Ces essais ont, aussi, pour but de vérifier que l'approximation par un développement limité au premier ordre de la matrice jacobienne de $f(\hat{\theta}_d)$ est suffisant. Ils ont également pour objectif de comparer les estimations des incertitudes de $\hat{\theta}$ calculées à partir de l'expression formelle de $\frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d}$, à celles obtenues en exploitant une estimation numérique de cette dernière.

$$\left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d} = \begin{bmatrix} \frac{-b_1 - b_2}{(1+a_1+a_2)^2} & \frac{-b_1 - b_2}{(1+a_1+a_2)^2} & \frac{1}{1+a_1+a_2} & \frac{1}{1+a_1+a_2} \\ -\frac{T_e}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}\alpha^+} & \frac{2T_e}{\alpha^+ \sqrt{a_1^2 - 4a_2}(a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2})} & 0 & 0 \\ \frac{T_e}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}\alpha^-} & -\frac{2T_e}{\alpha^- \sqrt{a_1^2 - 4a_2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2})} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

avec $\alpha^+ = \ln \left[-a_1/2 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}/2 \right]^2$ et $\alpha^- = \ln \left[-a_1/2 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2}/2 \right]^2$

$$\left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d} \simeq \begin{bmatrix} \frac{f_1(\hat{\theta}_d + \delta_{\hat{\theta}_d,1}) - f_1(\hat{\theta}_d)}{\delta_{\hat{\theta}_d,1}} & \dots & \frac{f_1(\hat{\theta}_d + \delta_{\hat{\theta}_d,n_d}) - f_1(\hat{\theta}_d)}{\delta_{\hat{\theta}_d,n_d}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{n_c}(\hat{\theta}_d + \delta_{\hat{\theta}_d,1}) - f_{n_c}(\hat{\theta}_d)}{\delta_{\hat{\theta}_d,1}} & \dots & \frac{f_{n_c}(\hat{\theta}_d + \delta_{\hat{\theta}_d,n_d}) - f_{n_c}(\hat{\theta}_d)}{\delta_{\hat{\theta}_d,n_d}} \end{bmatrix} \quad (30)$$

où, n_c et n_d désignent respectivement les dimensions de θ et θ_d

A. Cas d'un premier ordre

Sur cet exemple, est mesurée la dégradation des performances de la méthode d'estimation de la matrice covariance des paramètres du modèle à temps continu en fonction du niveau de bruit. La fonction de transfert choisie est un premier ordre de la forme (15). Sous l'hypothèse d'un bloqueur d'ordre 0, la fonction de transfert échantillonnée est donnée par (16).

Les vecteurs de paramètres « vrais » sont respectivement pour les modèles à temps continu et discret :

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} K_0 & T_0 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \theta_d^0 = \begin{bmatrix} a_1^0 & b_1^0 \end{bmatrix}^T \quad (31)$$

Supposons que N données soient engendrées par un modèle OE :

$$y(k) = \frac{B_0(q)}{A_0(q)} u(k) + e(k) \quad (32)$$

où, $A_0(q)$ et $B_0(q)$ sont de la forme (6) et (7) et avec $e(k)$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_e^2 .

Définition du protocole expérimental :

Pour ces simulations multiples, le nombre d'observations est fixé à 250, le rapport signal à bruit varie de la façon suivante : 20 dB, 10 dB, 5 dB et 0 dB. Le nombre de réalisations est $N_{exp} = 1000$ et la période d'échantillonnage T_e est choisie égale à 0.1 s.

Chaque estimation est effectuée sur le modèle discret en minimisant une erreur de sortie, chacune d'elles est ensuite convertie en un modèle continu (Cf. fig. 2(a), 2(b), 3(a) et 3(b)). Dans le tableau (I), sont portées, dans la deuxième colonne, la valeur moyenne du vecteur des paramètres estimés des modèles à temps continu, notée $\overline{(\theta_d)_{d2c}}$ et son écart-type désigné par $\sigma_{(\theta_d)_{d2c}}$, l'indice $d2c$ indique la conversion : modèle « discret » vers modèle « continu ». Dans la troisième colonne, la racine carrée de la valeur moyenne des éléments diagonaux de $\overline{\text{Cov}(\hat{\theta})}$ – désignée par $\sqrt{\overline{\text{Var}(\hat{\theta})}}$ avec $\overline{\text{Var}(\hat{\theta})} = \text{diag}(\overline{\text{Cov}(\hat{\theta})})$ – et son écart-type sont spécifiés. La dernière colonne est calculée à partir d'une approximation

RSB	$\overline{(\theta_d)_{d2c}} \pm \sigma_{(\theta_d)_{d2c}}$	$\sqrt{\overline{\text{Var}(\hat{\theta})}} \pm \sigma_{\sqrt{\overline{\text{Var}(\hat{\theta})}}}$
20	2.0008 ± 0.0181	0.0177 ± 0.0015
	0.9998 ± 0.0128	0.0125 ± 0.0004
10	1.9990 ± 0.0549	0.0520 ± 0.0025
	0.9989 ± 0.0412	0.0385 ± 0.0018
5	2.0068 ± 0.1032	0.0941 ± 0.0056
	1.0100 ± 0.0744	0.0694 ± 0.0019
0	2.0093 ± 0.1834	0.1679 ± 0.0124
	1.0147 ± 0.1346	0.1259 ± 0.0066

TABLE I

Résultats d'estimation sur un premier ordre ($K_0 = 2$ et $T_0 = 1$) : étude de la qualité d'estimation de $\overline{\text{Cov}(\hat{\theta})}$ en fonction du RSB exprimé en décibels

numérique de $\left. \frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d} \right|_{\theta_d = \hat{\theta}_d}$ donnée par l'équation (30). Toutes ces quantités sont calculées sur la base de N_{exp} réalisations.

B. Cas d'un second ordre

Sur cet exemple, sont évaluées les performances de la méthode d'estimation de la matrice covariance des paramètres du modèle à temps continu en fonction du nombre d'observations pour un niveau de bruit constant. La fonction de transfert recherché est un second ordre de la forme (27). Sous l'hypothèse d'un bloqueur d'ordre 0, la fonction de transfert échantillonnée est donnée par (23).

Les vecteurs de paramètres « vrais » sont respectivement pour les modèles à temps continu et discret :

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} K_0 & \xi_0 & \omega_0^0 \end{bmatrix}^T \quad \text{et} \quad \theta_d^0 = \begin{bmatrix} a_1^0 & a_2^0 & b_1^0 & b_2^0 \end{bmatrix}^T \quad (33)$$

Supposons que N données soient engendrées par un modèle ARX :

$$A_0(q)y(k) = B_0(q)u(k) + e(k) \quad (34)$$

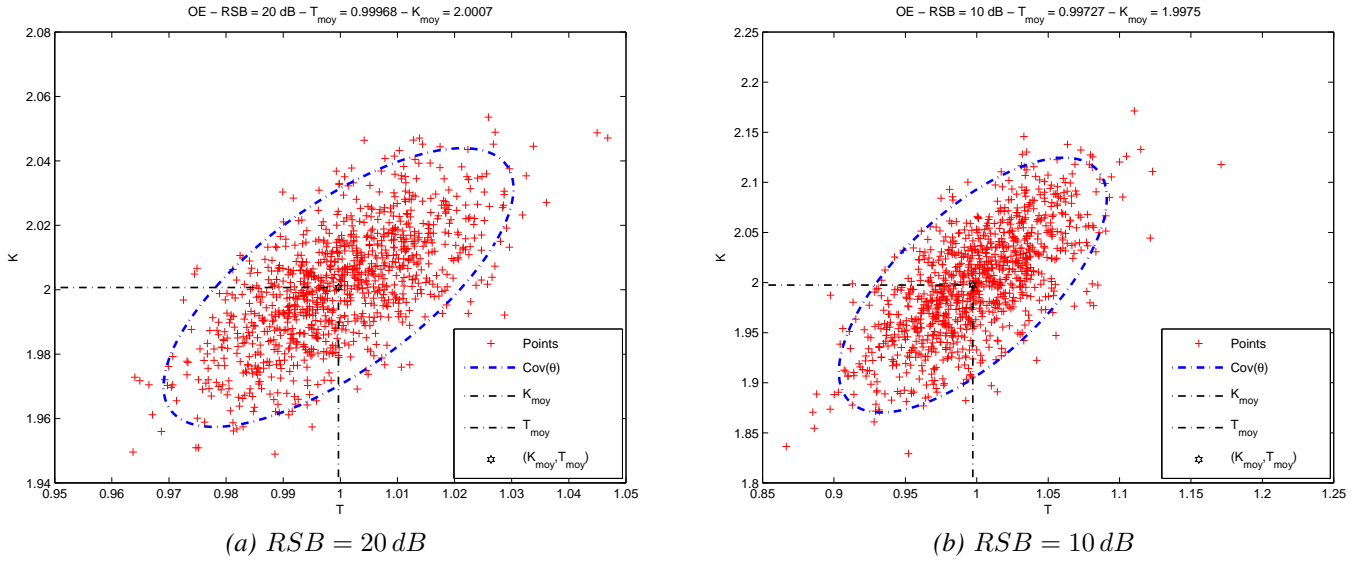


Fig. 2. Résultats pour un premier ordre ($K_0 = 2$ et $T_0 = 1$) - Dispersion des estimations pour 1000 réalisations (en rouge) et ellipses d'incertitude (à 95%) construits à partir de l'estimation de $Cov(\hat{\theta})$ (en bleu)

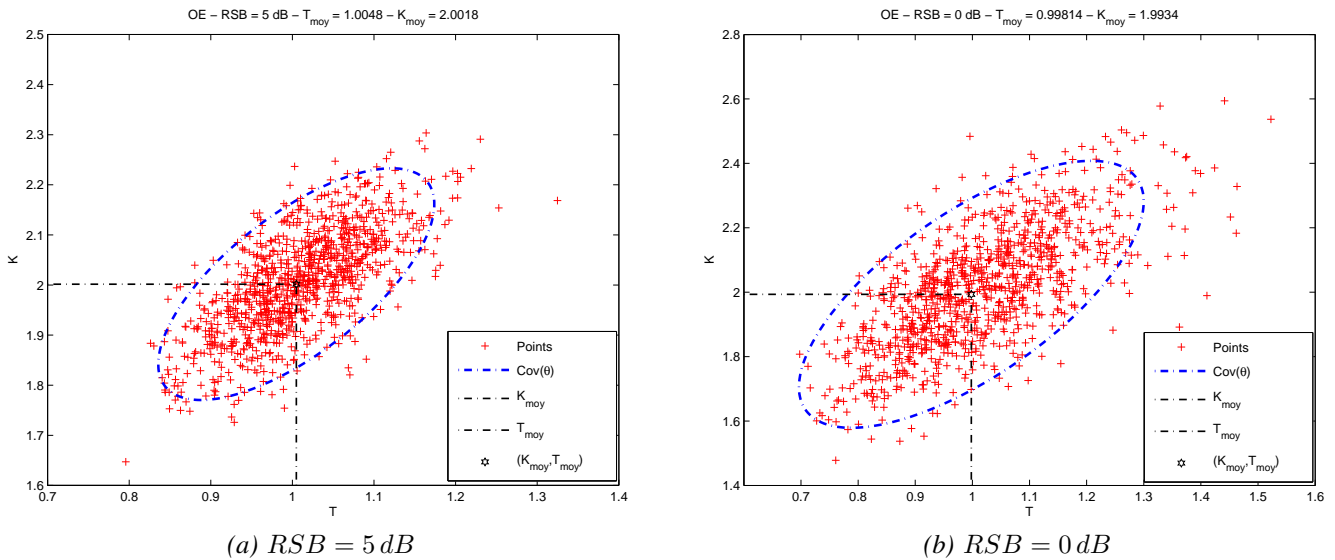


Fig. 3. Résultats pour un premier ordre ($K_0 = 2$ et $T_0 = 1$) - Dispersion des estimations pour 1000 réalisations (en rouge) et ellipses d'incertitude (à 95%) construits à partir de l'estimation de $Cov(\hat{\theta})$ (en bleu)

où, $A_0(q)$ et $B_0(q)$ sont de la forme (6) et (7) et avec $e(k)$ un bruit blanc de moyenne nulle et de variance σ_e^2 .

Définition du protocole expérimental :

Pour ces simulations multiples, le rapport signal à bruit a été fixé à 5 dB, le nombre de réalisations est $N_{exp} = 1000$ et la période d'échantillonnage T_e est choisie égale à 0.25 s. Le gain statique est $K_0 = 1$, la pulsation propre ω_0^0 vaut 2 et le coefficient d'amortissement est fixé à $\xi_0 = 0.5$. Dans cet essai, nous testons l'influence du nombre d'observations, N varie ainsi : 100, 200, 500 et 1000.

Chaque estimation est effectuée sur le modèle discret en minimisant une erreur d'équation, chacune des estimations est ensuite convertie en un modèle continu. Dans le tableau (II), sont portées les mêmes informations que dans le tableau (I). A la différence près que, la dernière colonne est calculée

à partir de l'expression formelle de $\frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_d}$.

C. Analyse des résultats obtenus sur les deux exemples

En premier lieu, l'observation de la deuxième colonne des tableaux (I) et (II) montre que les algorithmes d'estimation utilisés – méthode du modèle et moindres carrés – fournissent des paramètres non biaisés, comme spécifié dans les hypothèses d'utilisation de l'approche exposée.

En second lieu, les résultats exhibés par les figures 2(a), 2(b), 3(a) et 3(b) démontrent l'efficacité de la méthode proposée puisque la taille des ellipses d'incertitude, construites à partir de l'estimation de la matrice de covariance $Cov(\hat{\theta})$, est en parfaite adéquation avec les nuages de points. De surcroît, les écarts-types, portés dans la troisième colonne du tableau (I), sur le gain K et la constante de temps T sont très pertinents. On peut aussi remarquer, dans les tableaux (I) et (II), que

les estimations des écarts-types des deuxième et troisième colonnes sont complètement concordantes, ce qui dénote que l'estimation de la matrice de covariance $Cov(\hat{\theta})$, sur ces deux exemples, est tout à fait efficiente.

Sur ces simulations, l'approximation linéaire qui a conduit à l'estimation $\frac{\partial f(\theta_d)}{\partial \theta_a}$ est pleinement satisfaisante. Mentionnons, aussi, que l'évaluation numérique de la matrice jacobienne fournit des résultats concluants.

Remarques : Domaines d'incertitude paramétrique

1. Les domaines d'incertitude, de loin, les plus usitées exploitent le hessien du critère. Ils peuvent conduire à la définition de régions de confiance sous des hypothèses extrêmement drastiques [15]. Ils définissent des domaines ellipsoïdaux et sont éminemment faciles à quantifier par :

$$(\theta - \hat{\theta})^T (Cov(\hat{\theta}))^{-1} (\theta - \hat{\theta}) \leq r^2 \quad (35)$$

la valeur de r^2 est donnée par une loi de Fisher-Snedecor $F(n_d, N - n_d)$ – où n_d et $(N - n_d)$ désignent les degrés de liberté de la loi – et un niveau de confiance $(1 - \gamma)\%$. $\hat{\theta}$ dénomme l'estimation obtenue par la méthode des moindres carrés et $Cov(\hat{\theta})$ sa matrice de covariance. Ces ellipsoïdes de confiance, centrées autour de $\hat{\theta}$, peuvent être aisément tracés.

2. Dans le cas de la minimisation d'une erreur de sortie, le modèle est non linéaire en les paramètres, de sorte que les résultats produits ne seront donc valables que localement. Compte tenu de la violation de certaines de ces hypothèses, on préférera plutôt parler de régions ou domaines d'incertitude paramétrique que de régions de confiance. Ainsi, ces domaines devront bien sûr être examinés avec circonspection. Cependant, les régions paramétriques obtenues en tirant parti de l'équation (35) fournissent, la plupart du temps, des résultats intéressants et exploitables (Cf. figures 2(a), 2(b), 3(a) et 3(b)).

V. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons présenté une méthode originale d'estimation de la matrice de covariance des paramètres d'un modèle à temps continu dans le cadre d'une procédure d'identification indirecte : identification d'un modèle à temps discret puis conversion de celui-ci à temps continu. La formulation exposée assure une estimation directe d'incertitudes sur le gain, la ou les constantes de temps, pulsation propre ou coefficient d'amortissement, suivant la nature du modèle. Ces incertitudes « physiques » sont indéniablement plus compréhensibles et interprétables que celles du modèle discret. Cette approche directe permet, en outre, de prendre en compte, naturellement, les couplages entre les paramètres, ce qui débouche sur des estimations d'incertitudes consistantes, contrairement à des méthodes fondées sur la loi de propagation des erreurs ou des techniques de perturbations singulières qui aboutissent souvent à des régions d'incertitudes surestimées.

L'ensemble des résultats obtenus, sur ces deux exemples, montrent que les expressions analytiques de l'estimation de la matrice de covariance des paramètres sont pertinentes, bien qu'elles aient été établies au moyen d'approximations.

N	$\overline{(\theta_d)_{d2c}} \pm \sigma_{(\theta_d)_{d2c}}$	$\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})} \pm \sigma_{\sqrt{\text{Var}(\hat{\theta})}}$
100	0.9855 ± 0.1296	0.1290 ± 0.0061
	0.5044 ± 0.0810	0.0785 ± 0.0024
	2.0333 ± 0.1112	0.1080 ± 0.0036
200	0.9991 ± 0.0920	0.0919 ± 0.0022
	0.5064 ± 0.0532	0.0537 ± 0.0008
	2.0077 ± 0.0736	0.0732 ± 0.0012
500	0.9999 ± 0.0557	0.0561 ± 0.0005
	0.5022 ± 0.0333	0.0337 ± 0.0002
	2.0034 ± 0.0475	0.0457 ± 0.0003
1000	0.9995 ± 0.0393	0.0392 ± 0.0002
	0.5006 ± 0.0245	0.0237 ± 0.0001
	2.0025 ± 0.0317	0.0322 ± 0.0001

TABLE II

Résultats d'estimation sur un deuxième ordre ($K_0 = 1$, $\xi_0 = 0.5$ et $\omega_0^0 = 2$) : étude de la qualité d'estimation de $Cov(\hat{\theta})$ en fonction du nombre d'observations

L'approximation de la matrice jacobienne de $f(\theta_d)$ est donc tout à fait satisfaisante. Mentionnons, aussi, que l'évaluation numérique de cette matrice jacobienne fournit également des résultats convaincants. Enfin, notons que la procédure est simple à mettre en œuvre quelle que soit la méthode de conversion choisie.

RÉFÉRENCES

- [1] H. Unbehauen et G.P. Rao. *Identification of continuous systems*. Systems and control series. North-Holland, Amsterdam, 1987.
- [2] H. Unbehauen et G.P. Rao. Continuous-time approaches to system identification - a survey. *Automatica*, 26(1) :23–35, 1990.
- [3] N.K. Sinha et G.P. Rao. *Identification of continuous-time systems. Methodology and computer implementation*. Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [4] G. P. Rao et H. Unbehauen. Identification of continuous-time systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, 153(2) :185, 2006.
- [5] L. Ljung. *System Identification. Theory for the user*. Prentice Hall, 1987.
- [6] E. Walter et L. Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, 1994.
- [7] M. Mensler. *Analyse et étude comparative de méthodes d'identification des systèmes à représentation continue. Développement d'une boîte à outils logicielle*. PhD thesis, Thèse de Doctorat de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, 29 janvier 1999.
- [8] Jehel Ezzine et C.D. Johnson. Analysis of continuous/discrete model parameter sensitivity via perturbation technique. pages 545–550, 1986.
- [9] L. S. Shieh, Gu Jingfong, et J. W. Sunkel. Model conversions of uncertain linear systems using the bilinear and inverse-bilinear approximation method. page 514, 1993.
- [10] L. S. Shieh, X. Zou, et N. P. Coleman. Digital interval model conversion and simulation of continuous-time uncertain systems. *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, 142(4) :315, 1995.
- [11] Marc Priel. *Incertitudes de mesure et tolérances*. Techniques de l'Ingénieur, Paris, 1999.
- [12] Richard C. Dorf. *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1995.
- [13] Gene F. Franklin, Michael L. Workman, et Dave Powell. *Digital Control of Dynamic Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1997.
- [14] J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, et C. Sagastizábal. *Optimisation Numérique - Aspects théoriques et pratiques*. Springer-Verlag, 1997.
- [15] N. R. Draper et H. Smith. *Applied Regression Analysis*. John Wiley, New York, 2nd edition, 1981.