

# Initialisation des algorithmes d'optimisation - Comparaison de deux approches à erreur d'équation

Elie TOHME<sup>1,2</sup>, Régis OUVRARD<sup>1</sup>, Jean-Claude TRIGEASSOU<sup>1</sup>, Antoine ABCHE<sup>2</sup>, Thierry POINOT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle  
Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 40, avenue du Recteur Pineau 86022 Poitiers Cedex, France

<sup>2</sup>Faculty of Engineering, University of Balamand, P.O. Box 100 Tripoli, Lebanon

elie.tohme@etu.univ-poitiers.fr, regis.ouvrard@univ-poitiers.fr,  
jean-claude.trigeassou@esip.univ-poitiers.fr, antoine.abche@balamand.edu.lb,  
thierry.poinot@esip.univ-poitiers.fr

**Résumé**—*L'initialisation des algorithmes d'optimisation du type erreur de sortie est un problème crucial. Une bonne initialisation permet d'éviter les optimums locaux, et ainsi de mener à la convergence globale. L'utilisation préalable d'un algorithme à erreur d'équation est une solution souvent envisagée pour obtenir l'initialisation. Dans ces travaux, une comparaison de deux algorithmes à erreur d'équation pour l'initialisation de l'algorithme de Gauss-Newton est présentée. Ces deux approches sont celle utilisant les Moments Partiels Réinitialisés (MPR) et celle basée sur les Filtrés de Variables d'État (FVE). Une évaluation quantitative (Monte-Carlo) est réalisée en simulation sur des systèmes du deuxième et quatrième ordres. Les résultats montrent que l'initialisation de l'algorithme à erreur de sortie fournie par la méthode MPR est meilleure que celle obtenue par les FVE.*

**Mots-clés**—*Initialisation d'algorithme d'optimisation, Moments Partiels Réinitialisés, Filtrés de Variables d'État.*

## I. INTRODUCTION

Il existe deux grandes familles d'algorithmes d'identification de systèmes, les algorithmes à erreur d'équation et les algorithmes à erreur de sortie.

Les algorithmes d'identification à erreur de sortie présentent l'intérêt essentiel de fournir, sous certaines conditions, une estimation non biaisée asymptotiquement [1][2]. Malheureusement, cette propriété est obtenue au prix d'une minimisation par programmation non linéaire du critère quadratique, ce qui se traduit généralement par la non unicité de l'optimum [3][4]. Ce problème fondamental peut être partiellement résolu en réalisant des optimisations à partir de différents points initiaux pour "cartographier" le critère quadratique et ainsi choisir l'optimum parmi les résultats obtenus. Néanmoins, cette démarche est très coûteuse en temps de calcul.

Une autre approche, très répandue, revient à initialiser l'algorithme à erreur de sortie par une optimisation linéaire (algorithme des moindres carrés) à l'aide d'une technique à erreur d'équation [5], [6], [7]. Cette première estimation est asymptotiquement biaisée, mais généralement voisine de l'optimum global recherché.

Dans cette communication, nous considérons cette dernière

approche. L'objectif est de mettre en évidence les propriétés d'une initialisation obtenue par l'algorithme à erreur d'équation utilisant les Moments Partiels Réinitialisés (MPR) [8][9][10][11][12]. La méthode MPR est donc présentée et comparée à la méthode bien connue des Filtrés de Variables d'État (FVE) [13][14][15]. Une étude de Monte Carlo, en simulation, appliquée à un système du second ordre très oscillant, puis à un système du quatrième ordre, est réalisée. L'utilisation de tels systèmes permet d'obtenir des critères quadratiques présentant des optimums secondaires, ce qui permet d'évaluer les techniques d'initialisation sur leur aptitude à assurer la convergence de l'algorithme à erreur de sortie.

Une présentation de l'algorithme à Erreur de Sortie (ES) et des algorithmes à erreur d'équation MPR et FVE est donnée dans la section II. Les résultats de l'étude de Monte Carlo sont présentés dans la section III. Après une discussion dans la section IV, la section V conclut ce papier.

## II. LES MÉTHODES

Dans cette section, les algorithmes ES, MPR et FVE sont décrits.

### A. Le système et le modèle

Considérons un système stable à temps continu défini par la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (1)$$

où

$$\begin{aligned} A(s) &= 1 + a_1s + \dots + a_ns^n \\ B(s) &= b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m, \quad m < n \end{aligned} \quad (2)$$

Soient  $y(t)$  et  $u(t)$  respectivement la sortie et l'entrée du système perturbé par un bruit blanc  $b(t)$  additif en sortie.

La structure du système est supposée connue et le modèle à identifier est décrit par

$$\hat{H}(s, \hat{\theta}) = \frac{\hat{B}(s)}{\hat{A}(s)} \quad (3)$$

où

$$\hat{\theta}^T = [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m] \quad (4)$$

Soit  $y_M(t, \hat{\theta})$  la réponse du modèle à l'excitation  $u(t)$ .

**Remarque 1:** Les résultats présentés dans cette communication concernent un système à temps continu. Des résultats semblables ont été obtenus sur des systèmes à temps discret avec les MPR discrets.

### B. L'algorithme à Erreur de Sortie

Considérons le critère quadratique défini par

$$\begin{aligned} J(\hat{\theta}) &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (y(t) - y_M(t, \hat{\theta}))^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon_M(t)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

La minimisation du critère (5) est réalisée par une procédure itérative d'optimisation non linéaire. Nous avons choisi d'utiliser l'algorithme de Gauss-Newton défini comme suit

$$\hat{\theta}_{i+1} = \hat{\theta}_i - \left\{ \left[ J''_{\hat{\theta}} \right]^{-1} J'_{\hat{\theta}} \right\}_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_i} \quad (6)$$

où le gradient  $J'_{\hat{\theta}}$  et le hessien  $J''_{\hat{\theta}}$  sont obtenus à partir des fonctions de sensibilité  $\sigma(t, \hat{\theta}) = \frac{\partial y_M(t, \hat{\theta})}{\partial \theta}$  de la façon suivante

$$\begin{aligned} J'_{\hat{\theta}} &= \frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -\frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \sigma(t, \hat{\theta}) \varepsilon_M(t) \\ J''_{\hat{\theta}} &= \frac{\partial^2 J}{\partial \hat{\theta} \partial \hat{\theta}^T} \approx \frac{2}{N} \sum_{t=1}^N \sigma(t, \hat{\theta}) \sigma^T(t, \hat{\theta}) \end{aligned} \quad (7)$$

**Remarque 2:** Rappelons que l'objectif est de comparer l'initialisation des algorithmes à erreur de sortie apportée par deux méthodes à erreur d'équation. L'algorithme de Gauss-Newton a été préféré aux algorithmes relaxés pour ne pas que le terme de relaxation n'intervienne dans la convergence de l'algorithme. Dans les applications présentées dans cet article, le domaine de validité de l'algorithme de Gauss-Newton a toujours été respecté, *i.e.* aucun cas de divergence n'a été constaté.

### C. Les Moments Partiels Réinitialisés (MPR)

#### C.1 Définition des moments temporels et partiels

Soit  $f(t)$  une fonction définie sur  $[0, \infty[$ , de transformée de Laplace  $F(s)$ . Le moment d'ordre  $n$  est défini par

$$M_n^f = \int_0^{\infty} t^n f(t) dt \quad (8)$$

Le développement de  $F(s)$  en série de Taylor au voisinage de  $s = 0$  est le suivant

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{M_n^f}{n!} s^n \quad (9)$$

Définissons le moment temporel partiel comme la troncature sur  $[0, T[$  de  $M_n^f$

$$M_n^f(T) = \int_0^T t^n f(t) dt \quad (10)$$

Les moments partiels sont parfois appelés moments tronqués.

#### C.2 Principe de la méthode MPR

La présentation de la méthode est faite en considérant un système du premier ordre pour éviter de lourds et fastidieux développements mathématiques. L'extension à un système d'ordre  $n$  est décrite dans [8].

Considérons l'équation différentielle stable d'ordre un

$$y'(t) = -a_0 y(t) + b_0 u(t) \quad (11)$$

En calculant l'intégrale de  $ty'(t)$  sur  $[0, T[$ , le modèle de sortie suivant est obtenu

$$\begin{aligned} \hat{y}(T) &= -\hat{a}_0 \frac{\int_0^T ty(t) dt}{T} + \hat{b}_0 \frac{\int_0^T tu(t) dt}{T} + \frac{\int_0^T y(t) dt}{T} \\ &= -\hat{a}_0 \frac{M_1^y(T)}{T} + \hat{b}_0 \frac{M_1^u(T)}{T} + \frac{M_0^y(T)}{T} \end{aligned} \quad (12)$$

La sortie  $\hat{y}(T)$  peut être reformulée comme suit

$$\hat{y}(T) = \hat{a}_0 \alpha_0^y(T) + \hat{b}_0 \beta_0^u(T) + \gamma^y(T) \quad (13)$$

où  $\alpha_0^y(T)$ ,  $\gamma^y(T)$  et  $\beta_0^u(T)$  sont des fonctions des moments partiels et peuvent être exprimées sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \alpha_0^y(T) &= -\int_0^T f_0(t) y(t) dt, & f_0(t) &= \frac{t}{T} \\ \gamma^y(T) &= -\int_0^T f_1(t) y(t) dt, & f_1(t) &= -\frac{1}{T} \\ \beta_0^u(T) &= \int_0^T f_0(t) u(t) dt \end{aligned} \quad (14)$$

#### C.3 Propriétés du modèle de sortie

Supposons le cas stochastique. La sortie mesurée  $y^*(t)$  aux instants  $t = kt_s$ , où  $t_s$  est la période d'échantillonnage, est perturbée par un bruit blanc  $b(t)$  de moyenne nulle et de variance  $\sigma_b^2$ , *i.e.*

$$y^*(t) = y(t) + b(t) \quad (15)$$

Les fonctions  $\alpha_0^y(T)$  et  $\gamma^y(T)$  (14) sont déterminées avec la sortie bruitée  $y^*(t)$ .

Considérons l'erreur d'estimation  $\varepsilon(T) = y(T) - \hat{y}(T)$  qui représente la différence entre la sortie non bruitée  $y(t)$  et la sortie estimée du modèle (13). On montre facilement que

$$\varepsilon(T) = \hat{a}_0 \alpha_0^b(T) + \gamma^b(T) \quad (16)$$

Soit  $T = Kt_s$ . De part l'hypothèse faite sur le bruit, on en déduit que l'erreur d'estimation a une moyenne nulle et la variance suivante

$$\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_b^2 \left[ K \frac{(a_0 t_s)^2}{3} - a_0 t_s \left( 1 + \frac{a_0 t_s}{2} \right) + \frac{1}{K} \left( 1 + a_0 t_s + \frac{(a_0 t_s)^2}{6} \right) \right] \quad (17)$$

L'expression (17) est obtenue en considérant la méthode des rectangles pour évaluer les intégrales.

Il peut être facilement montré [8] que l'erreur d'estimation est minimale pour un intervalle  $T = T_{opt} = K_{opt} t_s$ .

$K_{opt}$  est proche de la valeur entière de

$$\sqrt{3} \frac{T}{t_s} \quad (18)$$

où  $\tau$  est la constante de temps du système du premier ordre et  $t_s$  respecte la condition  $t_s \ll \tau$ .

Si l'estimation est réalisée avec une variance minimale, le modèle de sortie avec moments partiels présente une propriété fondamentale de filtrage du bruit de sortie.

Le modèle de sortie défini par (13) présente donc deux propriétés :

- (i) linéarité par rapport aux paramètres,
- (ii) filtrage du bruit de sortie.

Cependant, ce filtrage n'a lieu que pour  $T = T_{opt}$ . Pour  $T \gg T_{opt}$ , le bruit n'est pas filtré et une accumulation de l'erreur provoque une divergence de la variance de l'estimateur  $\hat{y}(T)$ .

Par conséquent, il est nécessaire de réaliser l'estimation avec une variance minimale à chaque instant, ce qui peut être obtenu en réinitialisant les moments partiels à chaque instant  $t$ . D'où l'introduction des Moments Partiels Réinitialisés définis par

$$\hat{M}_n^f(t) = \int_0^{\hat{t}} \tau^n f(t - \hat{t} + \tau) d\tau \quad (19)$$

où  $\hat{t} = K_{opt}t_s$  est appelé intervalle de réinitialisation.

#### C.4 Modèle MPR d'ordre $n$

[8] démontre qu'une extension du modèle de sortie (13) au système (1) d'ordre  $n$  peut être obtenue.

Le modèle de sortie utilisant les MPR est alors défini par

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \hat{a}_i \alpha_i^y(t) + \sum_{j=0}^m \hat{b}_j \beta_j^u(t) + \gamma^y(t) \quad (20)$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_0^y(t) &= -m(t) * y(t) \\ \beta_0^u(t) &= m(t) * u(t) \\ \alpha_i^y(t) &= -\frac{d^i m(t)}{dt^i} * y(t) \text{ pour } 1 \leq i < n \\ \beta_j^u(t) &= -\frac{d^j m(t)}{dt^j} * u(t) \text{ pour } 1 \leq j \leq m \\ \gamma^y(t) &= \left( \delta(t) - \frac{d^n m(t)}{dt^n} \right) * y(t) \\ \delta(t) &\text{ est la fonction Dirac} \\ m(t) &= \frac{(\hat{t}-t)^n t^{n-1}}{(n-1)! \hat{t}^n} \text{ avec } t \in [0, \hat{t}] \\ &\text{et } * \text{ est le produit de convolution.} \end{aligned} \quad (21)$$

Il faut noter que  $\alpha_i^y(t)$ ,  $\beta_j^u(t)$  et  $\gamma^y(t)$  sont des fonctions des MPR, et que  $m(t)$  est un filtre à Réponse Impulsionnelle Finie (RIF).

Une particularité du modèle MPR (20) est qu'il appartient aussi bien à la classe des méthodes utilisant l'intégration qu'à la classe des méthodes basées sur le filtrage [12]. Effectivement, l'utilisation des moments permet par intégration de faire disparaître les dérivées successives de l'entrée et de la sortie. Mais l'utilisation de ces moments particuliers que sont les MPR revient à filtrer l'entrée et la sortie par un filtre RIF,

comme il a été montré ci-dessus.

Généralement, dans les méthodes utilisant le filtrage, le choix du filtre est une étape cruciale. Dans le modèle MPR, ce choix correspond au choix de l'intervalle de réinitialisation  $\hat{t}$ , *i.e.* intervalle sur lequel est réalisée l'intégration des MPR. La précision du modèle MPR est relativement peu sensible à ce choix. En pratique, l'intervalle de réinitialisation est choisi autour de deux fois la principale constante de temps. Pour un système résonant, l'intervalle de réinitialisation est choisi autour de deux fois le temps de montée de la réponse indicielle.

L'effet transitoire du filtre  $m(t)$  disparaît après  $\hat{t}$  puisque c'est un filtre RIF. Par conséquent, les données pour  $t < \hat{t}$  ne doivent pas être utilisées dans la procédure d'identification. Cependant, pour la même raison, cette approche n'est pas sensible aux conditions initiales ; ce qui constitue un avantage majeur de l'approche MPR.

Enfin, le modèle MPR est linéaire par rapport aux paramètres. L'estimation paramétrique est donc réalisée par des techniques de type moindres carrés. Malheureusement, l'estimation est biaisée comme c'est souvent le cas avec une approche moindres carrés.

Rappelons l'objectif qui est d'utiliser cette estimation pour initialiser un algorithme à erreur de sortie à proximité de l'optimum global. Dans la section suivante, nous comparons le modèle MPR au modèle obtenu avec les FVE.

#### C.5 Implémentation

Le modèle MPR (20) peut être mis sous forme d'une régression linéaire

$$\hat{y}(t) = \varphi^T(t) \theta_{MPR} + \gamma^y(t) \quad (22)$$

où

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [\alpha_0^y(t), \dots, \alpha_{n-1}^y(t), \beta_0^u(t), \dots, \beta_m^u(t)]^T \\ \theta_{MPR} &= [\hat{a}_0, \dots, \hat{a}_{n-1}, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m]^T \end{aligned} \quad (23)$$

Pour  $N$  mesures de l'entrée et de la sortie, l'estimation moindres carrés de  $\theta_{MPR}$  est donnée par

$$\hat{\theta}_{MPR} = \left[ \sum_{i=k}^N \varphi(it_s) \varphi^T(it_s) \right]^{-1} \sum_{i=k}^N \varphi(it_s) (y(it_s) - \gamma^y(it_s)) \quad (24)$$

où  $\hat{k}$  correspond à  $\hat{t} = \hat{k}t_s$ .

Dans le modèle MPR (20), les fonctions  $\alpha_i^y(t)$ ,  $\beta_j^u(t)$  et  $\gamma^y(t)$  sont définies comme des produits de convolution entre la réponse impulsionnelle du filtre  $m(t)$  ou ses dérivées, et les signaux d'entrée ou de sortie. En pratique, les expressions suivantes sont utilisées [16][17]

$$\begin{aligned} \alpha_i^y(t) &= -\int_0^{\hat{t}} f_i(\mu) y(t - \hat{t} + \mu) d\mu \\ \beta_j^u(t) &= \int_0^{\hat{t}} f_j(\mu) u(t - \hat{t} + \mu) d\mu \\ \gamma^y(t) &= -\int_0^{\hat{t}} f_n(\mu) y(t - \hat{t} + \mu) d\mu \end{aligned} \quad (25)$$

avec

$$\begin{aligned} f_0(\mu) &= \frac{\mu^n (\hat{t} - \mu)^{n-1}}{(n-1)! \hat{t}^n} \\ f_i(\mu) &= -\frac{df_{i-1}(\mu)}{d\mu} \end{aligned} \quad (26)$$

La formulation récursive suivante permet de calculer  $f_i(\mu)$ .

$$\begin{aligned} f_i(\mu) &= \frac{(-1)^i}{(n-1)! \hat{t}^n} \sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{i!}{j!(i-j)!} \\ &\frac{(n-1)! n!}{(n-j-1)!(n-i+j)!} \mu^{n-i+j} (\hat{t} - \mu)^{n-j-1} \end{aligned} \quad (27)$$

pour  $n - j - 1 \geq 0$ .

Les intégrales dans (25) sont calculées en utilisant la méthode de Simpson, e.g. pour  $\alpha_i^y(t)$

$$\begin{aligned} \alpha_i^y(t) &= -\frac{t_s}{3} \sum_{k=2}^{\hat{k}} [f_i((k-2)t_s) \\ &y(t - (\hat{k} - l + 2)t_s) + \\ &4f_i((k-1)t_s)y(t - (\hat{k} - l + 1)t_s) \\ &+ f_i(kt_s)y(t - (\hat{k} - l)t_s)] \end{aligned} \quad (28)$$

où  $k$  et  $\hat{k}$  sont pairs.

De la même façon, les fonctions  $\beta_j^u(t)$  sont calculées par la méthode de Simpson. Pour le cas particulier d'une entrée constante par morceaux, e.g. le cas d'une entrée générée par un convertisseur numérique-analogique, la méthode des rectangles est utilisée pour l'intégration avec les expressions suivantes

$$\beta_j^u(t) = \sum_{k=0}^{\hat{k}-1} F_i^{sq}(kt_s) u(t - (\hat{k} - k)t_s) \quad (29)$$

avec

$$\begin{aligned} F_i^{sq}(kt_s) &= \frac{(-1)^i}{(n-1)!(\hat{k}t_s)^n} \sum_{j=0}^i (-1)^j \\ &\frac{j!(i-j)!}{(n-j-1)!(n-i+j)!} \\ &\sum_{r=0}^{n-j-1} (-1)^r \frac{(n-j-1)!}{r!(n-j-1-r)!} (\hat{k}t_s)^{n-j-1-r} \\ &\left\{ \frac{((k+1)t_s)^{n-i+j+r+1} - (kt_s)^{n-i+j+r+1}}{n-i+j+r+1} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

#### D. Les Filtres de Variables d'Etat (FVE)

##### D.1 Généralités

Considérons le système (1) qui peut être exprimé sous forme d'équation différentielle comme suit

$$\begin{aligned} y(t) + a_1 y'(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t) &= \\ b_0 u(t) + b_1 u'(t) + \dots + b_m u^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (31)$$

On peut écrire

$$y(t) = \varphi(t)^T \theta \quad (32)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi(t)^T &= [-y'(t), \dots, -y^{(n)}(t), u(t), \dots, u^{(m)}(t)] \\ \theta &= [a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m] \end{aligned} \quad (33)$$

L'équation (32) représente le modèle linéaire à identifier. Cependant, ce modèle n'est pas réaliste puisque les grandeurs

$y^{(n)}(t)$  et  $u^{(m)}(t)$  sont inaccessibles. Alors, il est nécessaire de réaliser une transformation préalable sous la forme d'un filtrage pour obtenir les dérivées successives de l'entrée et de la sortie.

Considérons un filtre  $F(s)$ , d'ordre supérieur ou égal à  $n$ . Soit  $f(t)$  la réponse impulsionnelle de ce filtre. Réalisons le produit de convolution entre (31) et  $f(t)$  pour obtenir

$$\begin{aligned} y * f + a_1 y' * f + \dots + a_n y^{(n)} * f &= \\ b_0 u * f + b_1 u' * f + \dots + b_m u^{(m)} * f \end{aligned} \quad (34)$$

Sachant que  $\frac{d^n y}{dt^n} * f(t) = \frac{d^n}{dt^n} (y * f) = y_F^{(n)}(t)$ , alors l'équation (34) devient

$$\begin{aligned} y_F(t) + a_1 y_F'(t) + \dots + a_n y_F^{(n)}(t) &= \\ b_0 u_F(t) + b_1 u_F'(t) + \dots + b_m u_F^{(m)}(t) \end{aligned} \quad (35)$$

et la sortie du modèle FVE est donnée par

$$y_F(t) = \varphi_F(t)^T \theta_{FVE} \quad (36)$$

avec

$$\begin{aligned} \varphi_F(t) &= [-y_F'(t), \dots, -y_F^{(n)}(t), u_F(t), \dots, u_F^{(m)}(t)]^T \\ \theta_{FVE} &= [\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_n, \hat{b}_0, \dots, \hat{b}_m]^T \end{aligned} \quad (37)$$

L'équation (36) est analogue à l'équation (32), à la différence que les signaux originaux  $u(t)$  et  $y(t)$  sont remplacés par les signaux filtrés  $u_F(t)$  et  $y_F(t)$ . Cependant, cette équation est devenue réaliste car les dérivées  $y_F^{(n)}(t)$  et  $u_F^{(m)}(t)$  sont accessibles étant donné qu'elles sont construites à partir de  $y(t)$ ,  $u(t)$  et  $f(t)$ .

##### D.2 Filtre de variables d'état

Considérons

$$F(s) = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \dots + \alpha_{n-1} s^{n-1} + s^n} \quad (38)$$

$F(s)$  est appelé filtre de variables d'état. En appliquant en entrée de ce filtre les signaux originaux  $u(t)$  et  $y(t)$ , on obtient les signaux filtrés et leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n$  comme le montre la figure 1 pour la sortie.

##### D.3 Implémentation

Le modèle FVE (36) est linéaire par rapport aux paramètres. En pratique,  $F(s)$  est choisi *a priori* et le plus simplement possible. Ainsi, pour un système d'ordre  $n$ , le filtre considéré est

$$F(s) = \frac{1}{(\alpha + s)^n} \quad (39)$$

Pour  $N$  mesures, l'estimation moindres carrés de  $\theta_{FVE}$  est donnée par

$$\hat{\theta}_{FVE} = \left[ \sum_{i=1}^N \varphi_F(it_s) \varphi_F^T(it_s) \right]^{-1} \sum_{i=1}^N \varphi_F(it_s) y_F(it_s) \quad (40)$$

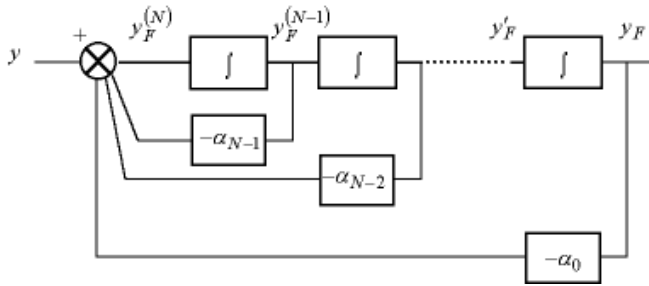


Fig. 1. Filtre de variables d'état

Le modèle FVE présente une erreur d'équation [11]. L'estimation  $\hat{\theta}_{FVE}$  est donc biaisée, et ce biais dépend du choix de  $\alpha$ . En pratique,  $\alpha$  est choisi tel que  $F(s)$  soit voisin de  $\frac{1}{A(s)}$ , par exemple sur un critère fréquentiel à l'aide d'une étude harmonique ou sur un critère temporel à partir d'une réponse indicelle.

### III. SIMULATION ET RÉSULTATS

Dans cette section, une comparaison des deux méthodes MPR et FVE pour l'initialisation de l'algorithme de Gauss-Newton est faite par la technique de Monte-Carlo.

Un système est défini par sa fonction de transfert  $H(s)$ , et la sortie  $y(t)$  est la réponse à une excitation  $u(t)$ . Un bruit blanc  $b(t)$  est ajouté à la sortie  $y(t)$  avec un rapport énergie du signal de sortie sur énergie du bruit ( $S/N$ ). Le système est identifié à l'aide des deux méthodes FVE et MPR, puis les deux estimations obtenues sont utilisées comme initialisation de l'algorithme de Gauss-Newton à erreur de sortie dans le but de comparer les deux méthodes en terme de convergence et de rapidité.

**Remarque 3:** Les deux méthodes FVE et MPR fournissent une estimation biaisée. Classiquement, on applique une approche variable instrumentale avec modèle parallèle pour éliminer le biais. Dans cette étude, nous avons choisi délibérément de ne pas recourir à cette approche, d'une part parce qu'elle nécessite une mise en oeuvre itérative semblable à l'algorithme à erreur de sortie, et d'autre part parce que l'objectif est d'évaluer la qualité de l'initialisation obtenue par ces deux méthodes FVE et MPR.

Deux systèmes sont présentés. Le premier est un système du second ordre très oscillant. L'intérêt de ce système excité par un signal périodique est de présenter un critère quadratique avec des optimums secondaires. Le deuxième système a un ordre 4 qui rend difficile l'estimation de chaque mode. Le rapport  $S/N$  est de 10. Pour chaque cas, l'étude de Monte-Carlo est menée sur 100 réalisations du bruit.

#### A. Système du second ordre

Le système réel considéré est défini par la fonction de transfert

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (41)$$

avec une pulsation naturelle  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$  et un coefficient d'amortissement  $\xi = 0.001$ . L'entrée est un signal carré. La période d'échantillonnage est de 0.1 s.

**Remarque 4:** Le fait de choisir un système très oscillant excité par un signal périodique rend le critère quadratique complexe avec des pseudo-optimums secondaires. Ce ne sont pas de véritables optimums secondaires mais plutôt des vallées profondes et quasi-parallèles. D'où l'importance d'une bonne initialisation.

La structure du système est supposée connue. L'objectif est d'identifier les deux paramètres  $\omega_n$  et  $\xi$  en présence d'un bruit blanc sur la sortie. Une première étape permet d'estimer les paramètres  $a_i$  et  $b_i$  à l'aide des deux méthodes FVE et MPR, puis de calculer les paramètres  $\omega_n$  et  $\xi$ . Une deuxième étape consiste à initialiser l'algorithme de Gauss-Newton avec ces deux estimations. Les résultats de l'algorithme de Gauss-Newton obtenus pour ces deux initialisations et après un nombre d'itération différent sont présentés dans les tables I et II.

	$\omega_n$		$\xi$	
	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type
MPR	0.9992	6.8917e-4	0.0031	7.3117e-4
OE (1 itération)	1.0007	5.0766e-4	0.0006	5.4343e-4
OE (2 itérations)	1.0000	1.551e-4	0.0010	1.368e-4
OE (5 itérations)	1.0000	5.157e-5	0.0010	5.054e-5
OE (10 itérations)	1.0000	5.157e-5	0.0010	5.054e-5

TABLE I  
RÉSULTATS POUR LA MÉTHODE MPR

	$\omega_n$		$\xi$	
	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type
FVE	1.0106	8.052e-4	0.0007	1.590e-3
OE (1 itération)	1.0095	1.473e-3	0.0054	2.276e-3
OE (2 itérations)	1.0029	4.479e-3	0.0089	2.047e-3
OE (5 itérations)	0.9999	7.533e-4	0.0012	8.393e-4
OE (10 itérations)	1.0000	5.157e-5	0.0010	5.054e-5

TABLE II  
RÉSULTATS POUR LA MÉTHODE FVE

Les résultats montrent que l'algorithme de Gauss-Newton converge plus rapidement vers les vrais paramètres lorsqu'il est initialisé par la méthode MPR. Alors que la convergence est obtenue après 2 itérations avec la méthode MPR, il faut 5 à 10 itérations pour l'initialisation à partir de la méthode FVE. On peut aussi remarquer que l'écart-type sur les estimations est plus faible avec la méthode MPR qu'avec les FVE.

La figure 2 montre les paramètres  $\omega_n$  et  $\xi$  obtenus à partir de la méthode FVE (cercle vert) et à partir de la méthode MPR

(étoile bleue) pour les 100 réalisations. La comparaison des deux approches indique que l'estimation avec les MPR est plus proche des vrais paramètres que l'estimation avec les FVE. De plus, l'écart-type, surtout sur  $\xi$ , est plus important avec les FVE.

Les figures 3, 4, 5 et 6 montrent les paramètres estimés par l'algorithme de Gauss-Newton initialisé à partir des FVE (cercle vert) et à partir des MPR (étoile bleue) après respectivement 1, 2, 5 et 10 itérations.

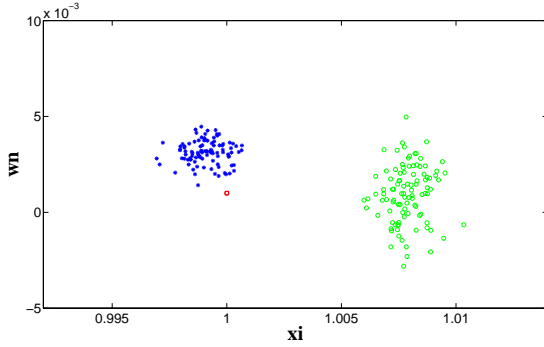


Fig. 2. Paramètres estimés par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

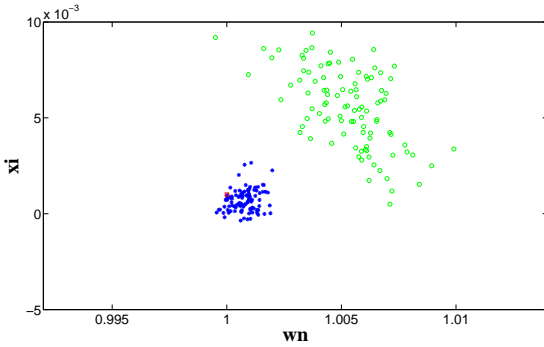


Fig. 3. Paramètres estimés après 1 itération de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

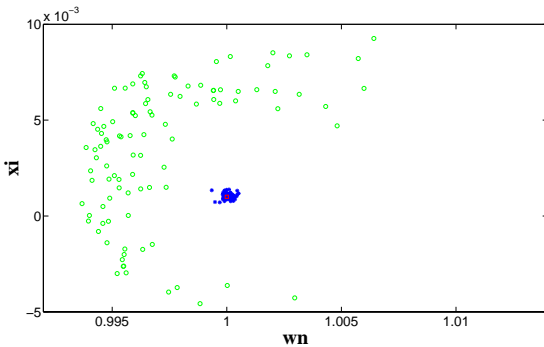


Fig. 4. Paramètres estimés après 2 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

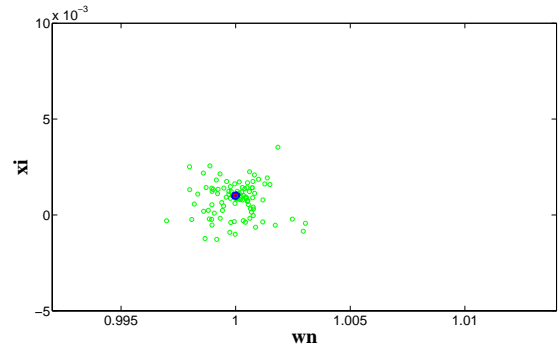


Fig. 5. Paramètres estimés après 5 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

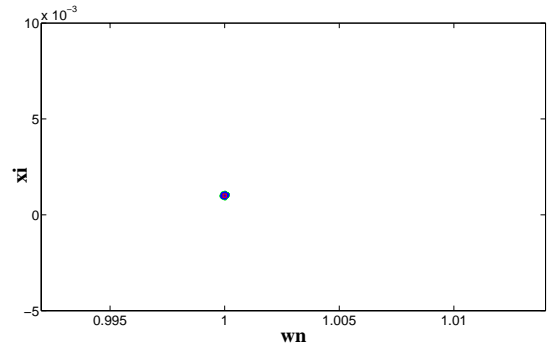


Fig. 6. Paramètres estimés après 10 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

Les résultats montrent que l'algorithme de Gauss-Newton converge vers les vrais paramètres pour les deux initialisations. Cependant, la convergence est plus rapide avec l'initialisation par MPR. Il y a, dans ce cas, une convergence en deux itérations. L'initialisation par la méthode MPR est donc plus efficace pour une application temps réel, par exemple.

#### B. Système d'ordre 4

Dans cette section, le système considéré est d'ordre 4 avec deux paires de pôles complexes

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -0.6 \pm 1.9i \\ p_{3,4} &= -0.6 \pm 0.8i \end{aligned} \quad (42)$$

La fonction de transfert est définie par

$$H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad (43)$$

où  $b_0 = 4$ ,  $a_3 = 2.4$ ,  $a_2 = 6.44$ ,  $a_1 = 6$  et  $a_0 = 4$ . L'entrée est un signal binaire pseudo-aléatoire et la période d'échantillonnage est de 0.1 s.

Comme dans la section précédente, la structure du système est supposée connue. L'objectif est d'identifier les cinq paramètres  $b_0$ ,  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  et  $a_0$  en présence d'un bruit blanc sur la sortie. Les estimations par les deux méthodes FVE et MPR sont réalisées. Puis ces deux estimations permettent d'initialiser l'algorithme de Gauss-Newton. Les résultats sont présentés dans la table III pour les MPR et dans la table IV pour les

FVE.

Les mêmes observations peuvent être faites, à savoir que l'algorithme de Gauss-Newton converge plus rapidement s'il est initialisé par les MPR, et il présente, dans ce cas, un écart-type plus faible. De plus, il faut noter que pour les 100 réalisations, l'initialisation par MPR a convergé vers les vrais paramètres, alors que l'initialisation par FVE n'a convergé que dans 85 pour-cent des cas. Pour les 15 pour-cent d'échec, l'initialisation par FVE est trop éloignée des vrais paramètres pour permettre une convergence dans un temps (nombre d'itérations) raisonnable.

	$b_0$		$a_3$		$a_2$	
	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type
MPR	3.6332	0.1488	1.8879	0.0797	6.1696	0.1804
OE (1)	3.9686	0.2186	2.3463	0.1335	6.4274	0.2698
OE (2)	4.0311	0.2761	2.4267	0.1845	6.4720	0.3346
OE (5)	4.0552	0.3000	2.4413	0.1973	6.5016	0.3649
OE (10)	4.0553	0.3002	2.4414	0.1974	6.5017	0.3651

	$a_1$		$a_0$	
	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type
MPR	5.2886	0.2131	3.6815	0.1422
OE (1)	5.9505	0.3288	3.9727	0.2112
OE (2)	6.0583	0.4234	4.0307	0.2664
OE (5)	6.0922	0.4572	4.0545	0.2907
OE (10)	6.0923	0.4575	4.0546	0.2909

TABLE III  
RÉSULTATS POUR LA MÉTHODE MPR

	$b_0$		$a_3$		$a_2$	
	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type
FVE	3.9218	1.3769	2.3890	0.8729	6.3166	1.8959
OE (1)	3.7219	0.8821	2.3432	0.5870	6.0638	1.1536
OE (2)	3.9078	0.6326	2.4272	0.4656	6.3227	0.8222
OE (5)	4.0282	0.3283	2.4371	0.1952	6.4678	0.4063
OE (10)	4.0533	0.2849	2.4433	0.1904	6.5004	0.3441

	$a_1$		$a_0$	
	Moyen	Ecart-type	Moyen	Ecart-type
FVE	5.8849	2.0509	3.9203	1.3522
OE (1)	5.6436	1.2932	3.7337	0.8557
OE (2)	5.9153	0.9393	3.9127	0.6078
OE (5)	6.0597	0.4841	4.0274	0.3149
OE (10)	6.0917	0.4354	4.0518	0.2744

TABLE IV  
RÉSULTATS POUR LA MÉTHODE FVE

Les figures 7, 8, 9 et 10 montrent les valeurs initiales de  $a_0$  et  $b_0$  obtenues avec les méthodes FVE (cercle vert) et MPR (étoile bleue), et les valeurs correspondantes après 1, 2 et 5 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton, respectivement. Les figures 11, 12, 13 et 14 montrent, dans les mêmes conditions, les valeurs de  $a_0$  et  $a_3$ . Il est clair que l'initialisation par les FVE est plus éloignée des vrais paramètres que l'initialisation par les MPR. De plus, cette dernière présente un écart-type plus faible. Ce qui explique que la convergence de l'algorithme de Gauss-Newton est plus rapide lorsqu'il est initialisé avec les MPR. Des conclusions semblables peuvent être faites sur les autres paramètres.

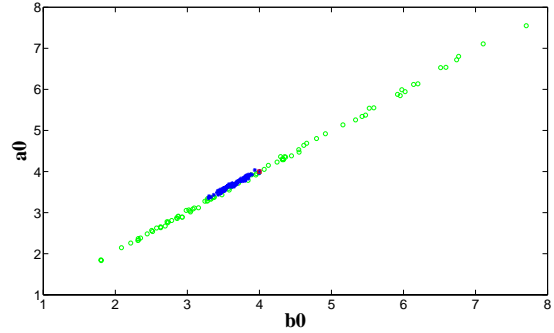


Fig. 7. Paramètres  $a_0$  et  $b_0$  estimés par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

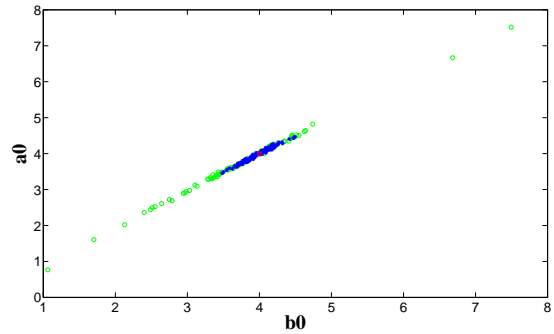


Fig. 8. Paramètres  $a_0$  et  $b_0$  estimés après 1 itération de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

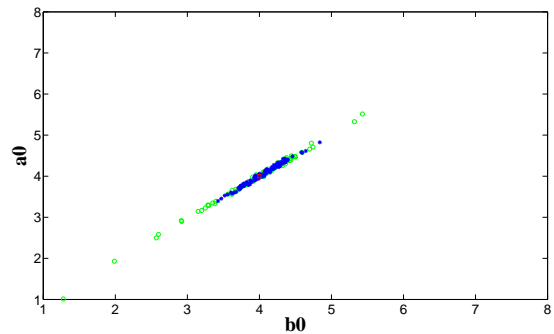


Fig. 9. Paramètres  $a_0$  et  $b_0$  estimés après 2 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

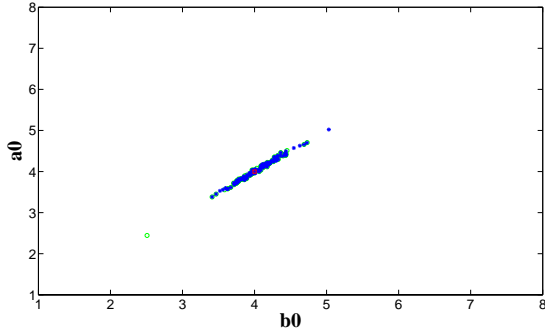


Fig. 10. Paramètres  $a_0$  et  $b_0$  estimés après 5 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

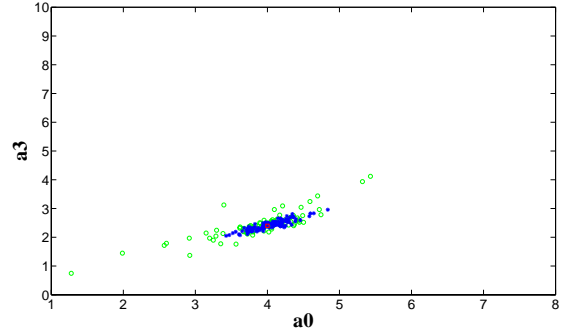


Fig. 13. Paramètres  $a_0$  et  $a_3$  estimés après 2 itération de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

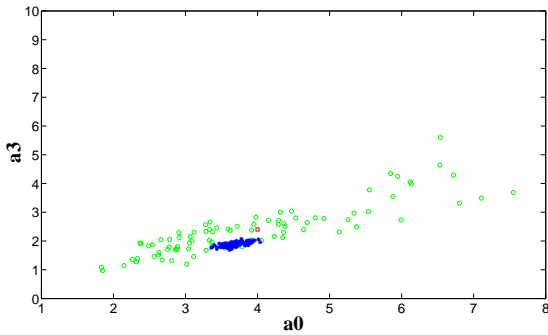


Fig. 11. Paramètres  $a_0$  et  $a_3$  estimés par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

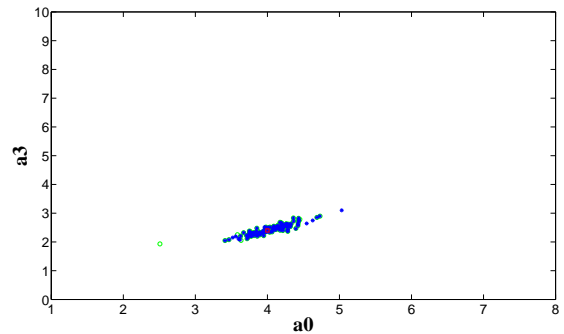


Fig. 14. Paramètres  $a_0$  et  $a_3$  estimés après 5 itération de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

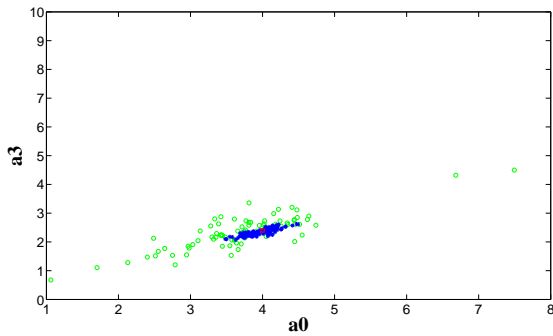


Fig. 12. Paramètres  $a_0$  et  $a_3$  estimés après 1 itération de l'algorithme de Gauss-Newton initialisé par FVE (cercle vert) et par MPR (étoile bleue). Vrais paramètres (carré rouge)

#### IV. DISCUSSION

Les résultats, présentés dans la section précédente, montrent que l'algorithme de Gauss-Newton est plus efficace et plus rapide lorsqu'il est initialisé par les paramètres estimés avec la méthode MPR. Cette propriété peut s'expliquer par une ressemblance importante entre le régresseur  $\varphi_{MPR}$  défini par (23), vecteur contenant des fonctions des MPR, et les fonctions de sensibilité de l'algorithme de Gauss-Newton  $\sigma(t, \hat{\theta})$  utilisées dans (7). Une comparaison de ces signaux est faite dans le cas du système d'ordre 4 sans bruit de sortie.

Les figures 15 et 16 montrent l'évolution du signal  $\alpha_0(t)$  et de la fonction de sensibilité par rapport à  $a_0$ . Il est clair que ces deux signaux sont ressemblant.

La même observation peut être faite concernant le signal  $\alpha_1(t)$  (figure 17) et la fonction de sensibilité par rapport à  $a_1$  (figure 18), comme pour les autres signaux.

#### V. CONCLUSION

Dans cette communication, l'initialisation de l'algorithme à erreur de sortie de Gauss-Newton par les méthodes MPR et FVE est étudiée et évaluée. Une comparaison de ces deux approches est réalisée à l'aide d'une étude de Monte-Carlo sur des systèmes d'ordre 2 et 4. Les résultats montrent que

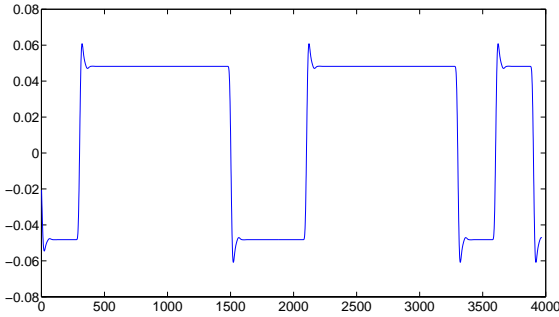


Fig. 15. Signal  $\alpha_0(t)$

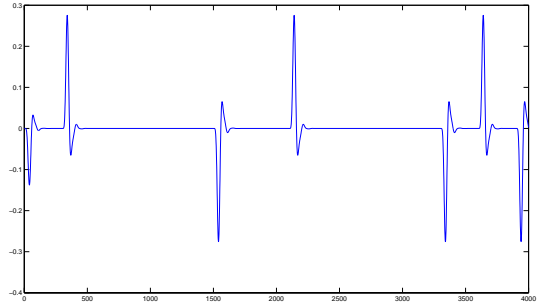


Fig. 18. Fonction de sensibilité par rapport à  $a_1$

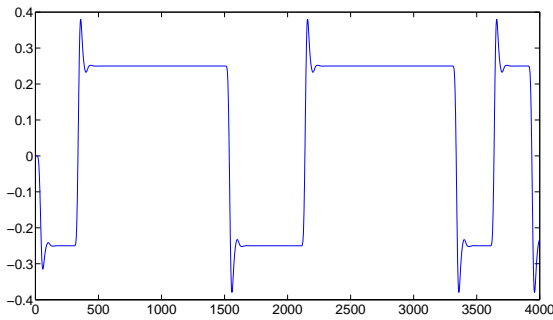


Fig. 16. Fonction de sensibilité par rapport à  $a_0$

l'algorithme de Gauss-Newton est mieux initialisé par l'estimation tirée de la méthode MPR. La convergence vers les paramètres réels est plus précise, et surtout, plus rapide. On observe même sur le système d'ordre 4 que l'initialisation tirée de la méthode FVE peut mener l'algorithme de Gauss-Newton vers des optimums secondaires.

De plus, l'ensemble des paramètres obtenus par la méthode MPR dans l'étude de Monte-Carlo est plus compact et plus proche des paramètres réels.

L'algorithme à erreur d'équation basé sur les MPR offre une bonne initialisation des algorithmes à erreur de sortie en général. La similarité entre le régresseur de la méthode MPR et les fonctions de sensibilité paramétrique, utilisées dans les algorithmes à erreur de sortie, est probablement la raison principale de ce bon comportement.

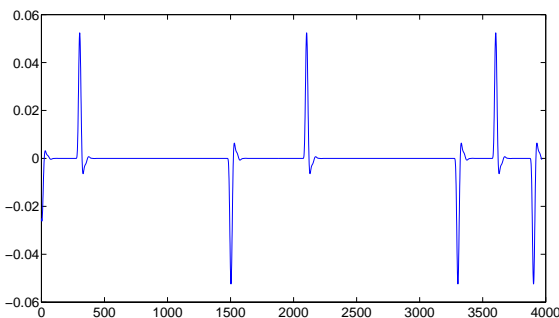


Fig. 17. Signal  $\alpha_1(t)$

## RÉFÉRENCES

- [1] J. Richalet, A. Rault, et R. Pouliquen. *Identification des processus par la méthode du modèle*. Gordon and Breach, 1971.
- [2] I.D. Landau. *Adaptive control : the model reference approach*, volume 8. Marcel Dekker, Control and systems theory, 1979.
- [3] L. Pronzato et E. Walter. Eliminating suboptimal local minimizers in nonlinear parameter estimation. *Technometrics*, 43(4) :434–442, 2001.
- [4] L. Pronzato et E. Walter. Comment éviter les optimiseurs locaux parasites en estimation paramétrique non linéaire. *APII-JESA*, 36(3) :351–362, 2002.
- [5] A.E. Pearson. Least squares parameter identification of nonlinear differential i/o models. *Proceedings of the 27th IEEE Conference on Decision and Control*, 1988.
- [6] P.M.J. Van den Hof. Criterion based equivalence for equation error models. 34(2) :191–193, 1989.
- [7] L. Ljung. *System identification - Theory for the User*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1987.
- [8] J.C. Trigeassou. *Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires*. Thèse d'état, Université de Poitiers, France, 1987.
- [9] H. Garnier, M. Mensler, et A. Richard. Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *INT. J. CONTROL*, 76(13) :1337–1357, 2003.
- [10] H. Garnier, M. Gilson, et E. Huselstein. Developments for the matlab contsid toolbox. *13th IFAC Symposium on System Identification*, Rotterdam, The Netherlands. pp. 1007-1012, 2003.
- [11] J.C. Trigeassou et T. Poinot. *Identification des systèmes à représentation continue - Application à l'estimation de paramètres physiques*. In : Identification des systèmes sous la direction de I.D. Landau et A. Besançon-Voda. *Traité Information, Commande, Communication - Section Systèmes Automatisés*, Editions Hermès, Paris, 2001.
- [12] M. Djamai, E. Tohme, R. Ouvrard, et S. Bachir. Continuous-time model identification using reinitialized partial moments - application to power amplifier modeling. *IFAC Symposium on System Identification*, Newcastle, Australia, 2006.
- [13] P. Young. Parameter estimation for continuous-time models-a survey. *Automatica*, 17 :23–39, 1981.
- [14] H. Unbehauen et G. P. Rao. Continuous-time approaches to system identification-a survey. *Automatica*, 26 :23–35, 1990.
- [15] R. Iserman, K.H. Lachmann, et D. Matko. *Adaptive control systems*. Editions Prentice Hall, 1992.
- [16] P. Coirault. *Moments temporels partiels et détection de défaut des systèmes à temps continu. Application à la maintenance prédictive d'une machine à courant continu*. Thèse, Université de Poitiers, France, 1992.
- [17] P. Dréano. *Identification des systèmes à représentation continue par moments partiels*. Thèse, Université de Poitiers, France, 1993.