

Opérateur d'intégration fractionnaire simplifié pour la modélisation des interfaces de diffusion

Amel BENCHELLAL, Thierry POINOT, Jean-Claude TRIGEASSOU

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle
Bâtiment de Mécanique 40, avenue du recteur Pineau, 86022 Poitiers, France

Amel.Benchellal@etu.univ-poitiers.fr, Thierry.Poinot@univ-poitiers.fr,
Jean-Claude.Trigeassou@univ-poitiers.fr
http://laid.univ-poitiers.fr

Résumé— Cette communication présente une nouvelle approche pour la modélisation des problèmes de transfert de chaleur et plus particulièrement les interfaces de diffusion. Ces interfaces peuvent être approchées par des modèles fractionnaires basés sur l'utilisation de l'opérateur d'intégration fractionnaire. A partir de considérations fréquentielles, une approximation plus générale du système fractionnaire est proposée dans cette communication. Elle permet de définir un modèle linéaire fractionnaire pour la simulation et la mise en œuvre d'une procédure d'identification par erreur de sortie. Une simulation numérique est présentée pour illustrer les améliorations apportées par l'intégrateur proposé dans le cas linéaire.

Mots-clés— Systèmes fractionnaires, Opérateur fractionnaire, Modélisation, Identification par Erreur de sortie, Transfert de chaleur.

I. INTRODUCTION

La modélisation des interfaces de diffusion est utilisée dans un grand nombre d'applications. Ces processus sont caractérisés par un comportement fractionnaire. Concrètement, un tel phénomène se manifeste dans le cas de la machine asynchrone, au niveau des courants de Foucault dans les barres du rotor [2], [8], [10], [17]. Il apparaît aussi dans le cas de l'équation de la chaleur entre le flux et la température à l'interface du processus [1], [9]. Plusieurs solutions ont déjà été développées au LAII pour modéliser ce type de système. Une première solution, basée sur la définition de l'opérateur d'intégration fractionnaire, fournit un modèle simple et parcimonieux [12]. L'inconvénient de ce modèle réside dans son incapacité d'approcher la dynamique des interfaces de diffusion en hautes fréquences lorsque l'ordre estimé est différent de la valeur théorique $n = 0.5$.

Dans le but d'améliorer le comportement fractionnaire de ce modèle, et particulièrement en transitoires rapides, une seconde approche a été utilisée [3], [4], [5] basée sur l'utilisation de deux opérateurs d'intégration fractionnaire.

L'idée est de pouvoir assurer une meilleure capacité d'approximation en respectant la condition physique aux fréquences hautes (lorsque $\omega \rightarrow \infty$, n doit valoir 0.5). Ce modèle permet de s'adapter à la géométrie du problème tout en respectant la physique.

Il a montré son efficacité à approcher les phénomènes diffusifs, néanmoins, sa complexité plus élevée que le modèle précédent nous a amené à proposer un nouveau modèle basé sur l'utilisation d'un opérateur d'intégration fractionnaire simplifié, dont l'ordre varie avec la fréquence. Enfin, on montre dans

ce papier qu'il est possible de simplifier ce nouvel opérateur sans pour cela sacrifier ses performances.

Cet article est composé de trois parties. Dans la première, on présente le simulateur qui va nous fournir les données utilisées pour comparer les différents modèles. La deuxième partie rappelle les modèles déjà proposés par les auteurs. Enfin, la troisième partie présente la modélisation basée sur un intégrateur dont l'ordre fractionnaire varie avec la fréquence.

II. LE SIMULATEUR

Considérons le problème classique du transfert de chaleur dans un "mur". Afin de simuler l'équation de diffusion, on réalise une simulation numérique par différences finies. Les différents modèles sont identifiés à partir de réponses temporelles obtenues en simulation. Afin d'obtenir des simulations réalistes, on considère les paramètres suivants, correspondants au cuivre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = 8.522 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 : \text{densité} \\ c = 0.385 \cdot 10^3 \text{ J/kg } ^\circ\text{C} : \text{chaleur masique} \\ \lambda = 111 \text{ W/m } ^\circ\text{C} : \text{conductivité thermique} \end{array} \right.$$

A. Simulation numérique par différences finies de $H_n(s)$

La résolution de l'équation différentielle de la chaleur peut être réalisée en utilisant une discrétisation spatiale du mur. Considérons un mur de longueur L et de section S (figure 1). Divisons le mur en I tranches de même épaisseur Δx . Alors $L = I \Delta x$ et la $i^{\text{ème}}$ tranche d'abscisse x est définie par $x = i \Delta x$.

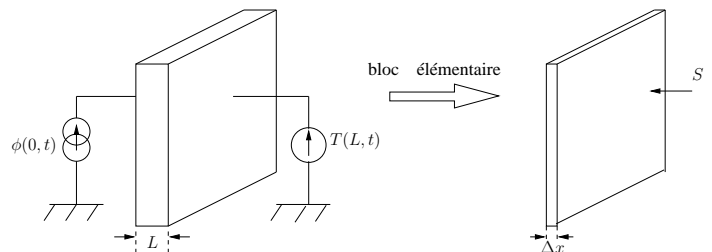


Fig. 1. Le problème du mur

Chaque bloc élémentaire est composé de :

- une résistance thermique

$$R_i = \frac{1}{\lambda} \frac{\Delta x}{S} \quad (1)$$

– une capacité thermique

$$C_i = \rho c S \Delta x \quad (2)$$

Les dimensions utilisées pour la simulation du mur sont $L = 5$ cm et $S = 100$ cm². On obtient, donc un modèle d'état avec ($\dim \underline{x} = I$).

$$\underline{u}^T = \left[2 \frac{\Phi(0,t)}{C_i} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad \frac{T(L,t)}{R_i C_i} \right]$$

Le modèle obtenu est utilisé pour la simulation du transfert de chaleur dans le cas du mur. La réponse temporelle du système est tracée (figure 2). L'entrée est une séquence binaire pseudo-aléatoire (SBPA). On utilise $I = 300$ blocs pour effectuer la simulation. Par la suite, la sortie simulée sera considérée comme la sortie réelle d'un système $H(s)$.

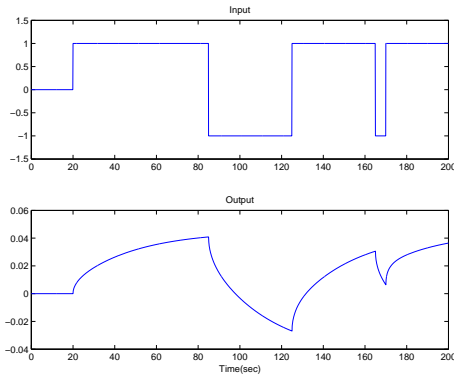


Fig. 2. Entrée-sortie du modèle numérique du mur

La réponse harmonique du système est fournie figure 3. On constate que dans son domaine de validité (jusqu'à 10^3 rad/s), le simulateur a un comportement fractionnaire avec une phase qui tend vers -45° en hautes fréquences.

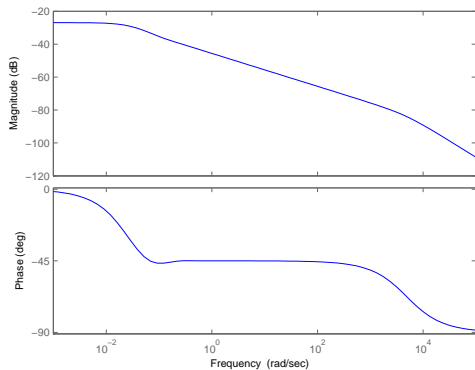


Fig. 3. Réponse fréquentielle du modèle numérique du mur

III. MODÉLISATIONS FRACTIONNAIRES

A. Intégrateur fractionnaire [12][11][18]

Considérons le diagramme de Bode d'un intégrateur non entier tronqué aux fréquences hautes et basses (voir figure 4).

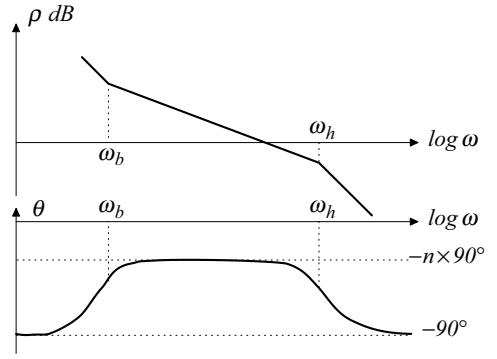


Fig. 4. Courbes de Bode de l'intégrateur fractionnaire

Il est composé de trois parties :

- La zone intermédiaire correspond à l'effet non entier, caractérisé par n .
- Dans les deux autres zones, l'effet intégrateur est conventionnel, avec $n = 1$.

Ainsi est défini l'opérateur $I_n(s)$ comme un intégrateur conventionnel $1/s$, excepté dans la bande limitée $[\omega_b, \omega_h]$ où il agit comme $1/s^n$. L'opérateur $I_n(s)$ est défini en utilisant un filtre fractionnaire à avance de phase [15] et un intégrateur entier grâce à :

$$I_n(s) = \frac{G_n}{s} \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega'_i}}{1 + \frac{s}{\omega_i}} \quad (3)$$

Cet opérateur est complètement défini par les relations suivantes :

$$\omega_i = \alpha \omega'_i, \quad \omega'_{i+1} = \eta \omega_i, \quad n = 1 - \frac{\log \alpha}{\log \alpha \eta} \quad (4)$$

où α et η sont les paramètres récursifs reliés à l'ordre non entier n .

Selon l'expression (3), la représentation d'état correspondante s'écrit :

$$\dot{\underline{x}}_I = A_I^* \underline{x}_I + \underline{B}_I^* u \quad (5)$$

où

$$A_I^* = M_I^{-1} A_I \text{ et } \underline{B}_I^* = M_I^{-1} \underline{B}_I$$

avec $B_I^T = [G_n \ 0 \ \dots \ 0]$,

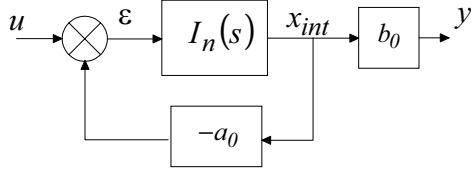
$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad A_I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_1 & -\omega_1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \omega_N & -\omega_N \end{bmatrix}$$

B. Modèle $H_n(s)$

Cette approche consiste à utiliser un modèle fractionnaire du type :

$$H_n(s) = \frac{b_0}{a_0 + s^n} \quad (6)$$

Ce modèle est basé sur l'utilisation d'un intégrateur non entier borné en fréquence (voir figure 5).


 Fig. 5. Schéma bloc du modèle $H_n(s)$

B.1 Modèle d'état de $H_n(s)$

Le modèle (6) correspond à une équation différentielle fractionnaire, avec $0 < n < 1$:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (7)$$

On lui associe la représentation d'état suivante [12] :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = C^T x \end{cases} \quad (8)$$

où

$$A = A_I^* - a_0 B_I C_I^T, \quad B = B_I^*, \quad C^T = b_0 C_I^T$$

B.2 Identification du modèle fractionnaire $H_n(s)$

Le modèle du système fractionnaire obtenu ($H_n(s)$) est exprimé sous forme continue, il est donc préférable d'utiliser une technique d'identification du type erreur de sortie [13][16] avec minimisation du critère quadratique par Programmation Non Linéaire, bien adaptée au traitement de la non-linéarité dans les paramètres. Le modèle d'état du système d'ordre non entier est :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C^T(\theta)x \end{cases} \quad (9)$$

avec $\theta_i^T = [a_0 \quad b_0 \quad \alpha]$

Remarque : l'ordre de dérivation fractionnaire n est caractérisé par $\alpha, \eta, \omega_b, \omega_h$ et le nombre N de cellules. En pratique, on impose ω_b, ω_h et le nombre de cellules ; alors, il suffit d'estimer le coefficient α pour estimer n .

On dispose de K couples de données $\{u_k, y_k^*\}$ avec $t = kTe$ (Te : période d'échantillonnage) et où b_k est le bruit de sortie.

$$y_k^* = y_k + b_k \quad (10)$$

Le modèle d'état étant simulé grâce à une technique d'intégration numérique, on obtient $\hat{y}_k = f_k(u, \hat{\theta})$ où $\hat{\theta}$ est une estimation de θ . La valeur optimale de $\hat{\theta}$ ($\hat{\theta}_{opt}$) est obtenue par minimisation du critère quadratique :

$$J = \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2 = \sum_{k=1}^K (y_k^* - \hat{y}_k(u, \hat{\theta}))^2 \quad (11)$$

Comme $\hat{y}(t)$ est non linéaire par rapport aux paramètres $\hat{\theta}$, une technique de programmation non linéaire est utilisée pour estimer itérativement $\hat{\theta}$ [14] :

$$\theta_{i+1} = \theta_i - \left\{ [J''_{\theta\theta} + \lambda I]^{-1} J'_{\theta} \right\}_{\hat{\theta}=\theta_i} \quad (12)$$

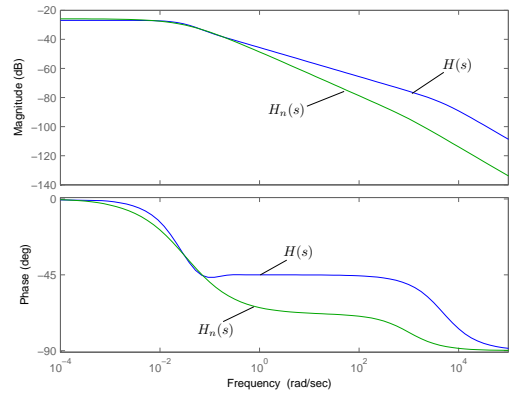
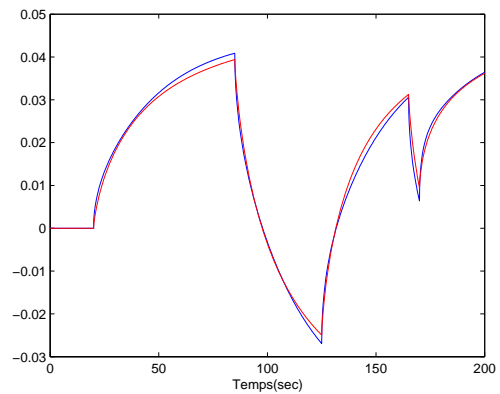
avec :

$$\begin{aligned} - J'_{\theta} &= -2 \sum_{k=1}^K \varepsilon_k \sigma_{k, \theta_i} : \text{gradient,} \\ - J''_{\theta\theta} &\approx 2 \sum_{k=1}^K \sigma_{k, \theta_i} \sigma_{k, \theta_i}^T : \text{hessien,} \\ - \lambda &: \text{paramètre de contrôle,} \\ - \sigma_{k, \theta_i} &= \frac{\partial \hat{y}_k}{\partial \theta_i} : \text{fonction de sensibilité de la sortie.} \end{aligned}$$

Le calcul du gradient et du hessien, dépend de l'intégration numérique des fonctions de sensibilité σ_{k, θ_i} [16]. On se référera à [12][18] pour le calcul des fonctions de sensibilité.

B.3 Résultats d'identification

On trace sur la figure 6, la réponse fréquentielle du modèle (6) et celle du simulateur $H(s)$; le modèle à un seul intégrateur montre une certaine difficulté à suivre le comportement dynamique du simulateur ; on peut le voir aussi dans les courbes représentant les réponses temporelles (voir figure 7)


 Fig. 6. Réponses fréquentielles de $H_n(s), H(s)$

 Fig. 7. Réponses temporelles de $H_n(s), H(s)$

B.4 Conclusion

Le modèle $H_n(s)$ ne donne pas entière satisfaction aux transitoires rapides ($\omega \rightarrow \infty$). En effet, ce modèle a un comportement asymptotique du type $1/s^n$, alors que la modélisation théorique montre un comportement asymptotique du type $1/s^{0.5}$.

Pour remédier à ce problème, une deuxième approche comportant deux intégrateurs a été proposée.

C. Modèle à deux intégrateurs non entiers

Cette approche consiste à utiliser deux intégrateurs fractionnaires, son transfert est donné par :

$$H_{n_1, n_2}(s) = \frac{b_0 + b_1 s^{n_1}}{a_0 + a_1 s^{n_1} + s^{n_1 + n_2}} \quad (13)$$

L'ordre n_2 de $H_{n_1, n_2}(s)$ est imposé à la valeur 0.5. Ainsi, aux fréquences élevées, ce modèle respecte la physique puisque l'ordre vaut alors $n_1 + n_2 - n_1 = 0.5$. L'ordre n_1 est ajusté pour s'adapter à la géométrie du système.

On peut représenter ce modèle par le schéma bloc suivant :

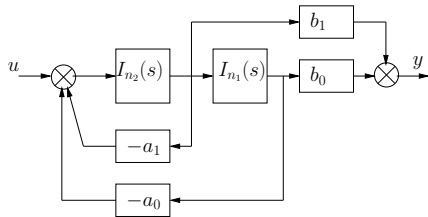


Fig. 8. Schéma bloc du modèle $H_{n_1, n_2}(s)$

C.1 Modèle d'état de $H_{n_1, n_2}(s)$

La "macro"représentation d'état du modèle $H_{n_1, n_2}(s)$ est donnée par l'équation :

$$\begin{cases} \frac{d^{n_1} x_1(t)}{dt^{n_1}} = x_2(t) \\ \frac{d^{n_2} x_2(t)}{dt^{n_2}} = u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) \\ y(t) = b_0 x_1(t) + b_1 x_2(t) \end{cases} \quad (14)$$

On aboutit à la représentation d'état :

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} A_{I_1}^* & B_{I_1}^* C_{I_2}^T \\ -B_{I_2}^* a_0 C_{I_1}^T & A_{I_2}^* - B_{I_2}^* a_1 C_{I_2}^T \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ B_{I_2}^* \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_0 C_{I_1}^T \quad b_1 C_{I_2}^T] \underline{x}$$

sachant que $(A_{I_1}^*, B_{I_1}^*)$ et $(A_{I_2}^*, B_{I_2}^*)$ sont les matrices définissant les deux intégrateurs $I_{n_1}(s)$ et $I_{n_2}(s)$ respectivement, avec

$$C_{I_1}^T = C_{I_2}^T = [0 \quad \dots \quad \dots \quad 1]$$

C.2 Identification du modèle $H_{n_1, n_2}(s)$

L'identification est effectuée par la technique à erreur de sortie, le vecteur paramètre étant défini par :

$$\theta_i^T = [a_0 \quad a_1 \quad b_0 \quad b_1 \quad \alpha_1]$$

comme l'ordre n_2 est imposé à la valeur 0.5, il suffit d'estimer l'ordre n_1 , c'est à dire le coefficient α_1 . On utilise la procédure d'identification décrite précédemment, mais adaptée au modèle à deux intégrateurs.

Remarque : comme dans le cas du modèle $H_n(s)$, les paramètres ω_{b_1} , ω_{h_1} , N_1 correspondants à I_{n_1} et ω_{b_2} , ω_{h_2} , N_2 correspondants à I_{n_2} sont imposés. De plus, on impose $\omega_{b_1} = \omega_{b_2}$, $\omega_{h_1} = \omega_{h_2}$ et $N_1 = N_2$.

C.3 Résultats d'identification

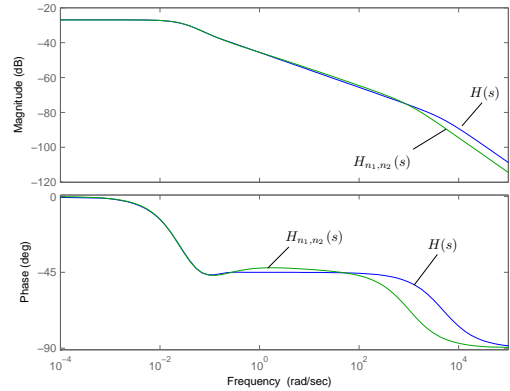


Fig. 9. Réponses fréquentielles de $H_{n_1, n_2}(s)$, $H(s)$

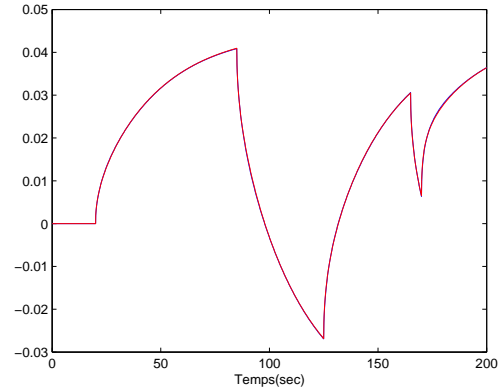


Fig. 10. Réponses temporelles de $H_{n_1, n_2}(s)$, $H(s)$

Selon la figure 9 et contrairement au modèle précédent, il est clair que l'approximation obtenue avec le modèle $H_{n_1, n_2}(s)$ est meilleure que celle obtenue avec le modèle $H_n(s)$, aussi bien aux basses fréquences qu'aux fréquences moyennes, c'est à dire là où le simulateur correspond effectivement à un système fractionnaire (domaine de validité du simulateur). Les réponses temporelles montrent clairement cette amélioration (voir figure 10).

C.4 Conclusion

Le modèle $H_{n_1, n_2}(s)$ bien que précis, nécessite un nombre un peu plus élevé de paramètres à estimer. Pour pallier ce problème de complexité tout en conservant ses performances, une modification de ce modèle est proposée. Elle s'appuie sur l'utilisation d'un intégrateur dont l'ordre varie avec la fréquence.

D. Modèle basé sur un intégrateur simplifié

D.1 Intégrateur fractionnaire d'ordre variant avec la fréquence

Soit $I_{nv}(s)$ le nouvel intégrateur, constitué par l'association de deux intégrateurs fractionnaires I_{n_1} et I_{n_2} (voir figure 11),

où n_1 et n_2 sont les ordres respectifs de I_{n_1} et I_{n_2} . L'opérateur $I_{nv}(s)$ est défini par ω_{b_i} , ω_{h_i} , qui représentent la bande limitée où l'ordre fractionnaire agit, il est aussi défini par $2N$ le nombre total de cellules. ω_p est la fréquence intermédiaire correspondant à :

$$n = \begin{cases} n_1 & \text{pour } \omega < \omega_p \\ n_2 & \text{pour } \omega > \omega_p \end{cases}$$

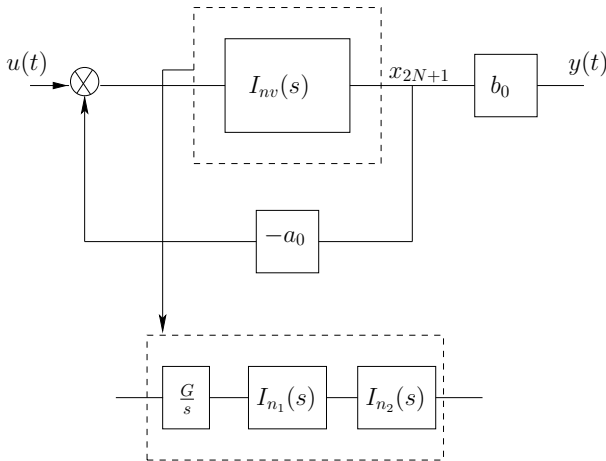


Fig. 11. modèle simplifié

Le diagramme de Bode du nouvel integrateur $I_{nv}(s)$ est donné par la figure 12.

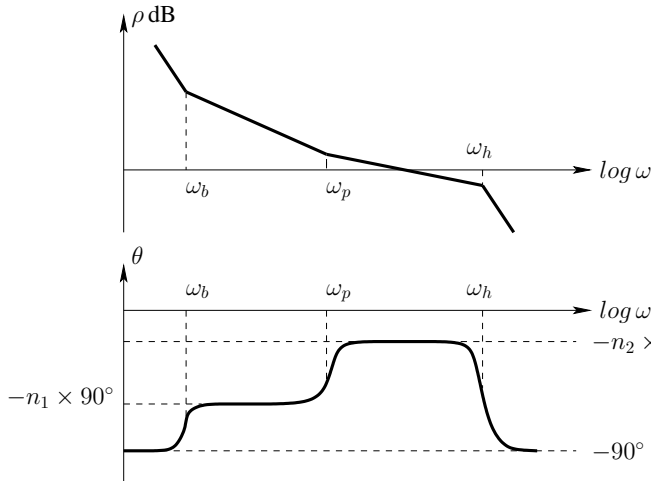


Fig. 12. Diagramme de Bode de $I_{nv}(s)$

Remarque : I_{n_1} et I_{n_2} sont des filtres à avance de phase (voir figure 11)

$$I_{n_k}(s) = \prod_{i=1}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_{i,n_k}'}}{1 + \frac{s}{\omega_{i,n_k}}} \quad (15)$$

La modèle d'état de $H_{nv}(s)$ est donné par :

$$M_I \dot{\underline{x}}_I = A_I \underline{x}_I + \underline{B}_I u \quad (16)$$

où

$$M_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & 0 \\ & & & -\alpha_2 & 1 & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B}_I = \begin{bmatrix} G_n \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_I = \begin{bmatrix} \omega_{1,1} & -\omega_{1,1} & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & 0 \\ & & & \omega_{1,2} & -\omega_{1,2} & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & \dots & \omega_{N,2} & -\omega_{N,2} & \vdots \end{bmatrix} \quad \underline{x}_I = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N+1} \\ \vdots \\ x_{2N+1} \end{bmatrix}$$

avec

- $\omega_{i,1}$: pulsations correspondante à l'opérateur I_{n_1}
- $\omega_{i,2}$: pulsations correspondante à l'opérateur I_{n_2}

D.2 Représentation d'état du modèle $H_{nv}(s)$

Le modèle $H_{nv}(s)$ correspond à une équation différentielle, où $n = f(\omega_p)$:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_0 y(t) = b_0 u(t) \quad (17)$$

Considérons $x(t)$ tel que

$$X(s) = \frac{1}{s^n + a_0} U(s) \quad (18)$$

On obtient une "macro" représentation d'état du système.

$$\begin{cases} \frac{d^n x(t)}{dt^n} = -a_0 x(t) + u(t) \\ y(t) = b_0 x(t) \end{cases} \quad (19)$$

ou de manière équivalente en utilisant $I_{nv}(s)$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = G_n (-a_0 x_{2N+1} + u) \\ y = b_0 x_{2N+1} \end{cases} \quad (20)$$

Le modèle global est :

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{A} \underline{x} + \underline{B} u \\ y = \underline{C}^T \underline{x} \end{cases} \quad (21)$$

avec

$$\begin{cases} \underline{A} = \underline{A}_I^* - a_0 \underline{B}_I \underline{C}_I^T \\ \underline{B} = \underline{B}_I^* \\ \underline{C}^T = b_0 \underline{C}_I^T \end{cases}$$

D.3 Identification du modèle fractionnaire $H_{nv}(s)$

En utilisant les données obtenues par le simulateur de transfert de chaleur précédent, une identification par erreur de sortie du modèle $H_{nv}(s)$ a été effectuée. Les résultats sont présentés dans le tableau I.

TABLE I
RÉSULTATS D'IDENTIFICATION

paramètres	$H_{nv}(s)$
a_0	0.1286
b_0	0.0058
n_1	0.9976
ω_p	0.0997

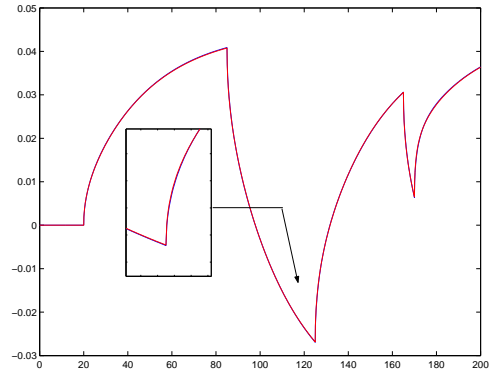


Fig. 14. Réponses temporelles de $H(s)$, $H_{nv}(s)$

Selon la figure 13, la réponse fréquentielle du modèle $H_{nv}(s)$ est comparée avec la réponse fréquentielle du modèle de référence $H(s)$. L'approximation obtenue suit bien la dynamique du modèle $H(s)$ en basses et moyennes fréquences. Le modèle amélioré $H_{nv}(s)$, comme d'ailleurs le modèle $H_{n_1, n_2}(s)$, est capable de reproduire le comportement fréquentiel du simulateur $H(s)$ (dans son domaine de validité), avec l'avantage d'être moins complexe que le modèle à deux intégrateurs.

Selon la figure 14, on peut remarquer que le modèle amélioré ($H_{nv}(s)$) est capable d'approcher parfaitement la réponse temporelle et plus particulièrement, les transitoires rapides. Par ailleurs, le modèle estimé montre que l'ordre d'intégration n_1 est proche de 1. Donc, il est possible de simplifier cet intégrateur variant avec la fréquence en imposant $n_1 = 1$ (et $n_2 = 0.5$) et en ajustant les autres paramètres.

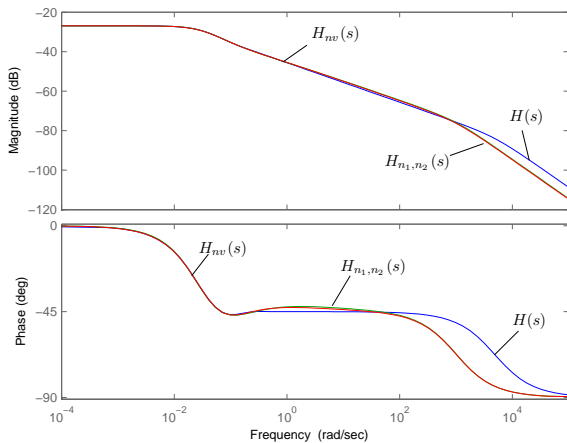


Fig. 13. Réponses fréquentielles de $H(s)$, $H_{n_1, n_2}(s)$ et $H_{nv}(s)$

IV. APPROXIMATION DES INTERFACES DE DIFFUSION PAR INTÉGRATEUR SIMPLIFIÉ

D'après les résultats obtenus par le modèle précédent ($H_{nv}(s)$), un nouveau modèle est maintenant utilisé, basé sur l'utilisation d'un intégrateur fractionnaire simplifié. Ce modèle nous permet d'avoir une bonne approximation de l'interface de diffusion en utilisant un nombre restreint de paramètres $\{a_0, b_0, \omega_p\}$.

Soit $H_{n,s}(s)$ le modèle basé sur cet intégrateur simplifié (il correspond à $H_n(s)$ avec $n = 0.5$. Dans ce cas, seul $\omega_b \equiv \omega_p$ est identifié).

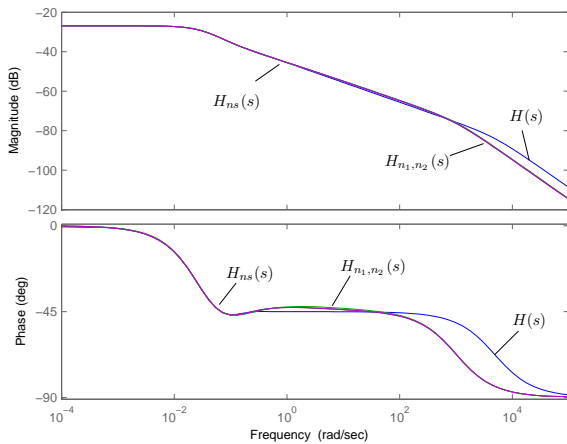
A. Exemple comparatif en simulation

De la même manière que pour le premier modèle, une identification par erreur de sortie du modèle $H_{n,s}(s)$ a été effectuée, en utilisant les données produites par le simulateur de transfert de chaleur. Les résultats sont donnés dans le tableau II.

TABLE II
RÉSULTATS D'IDENTIFICATION

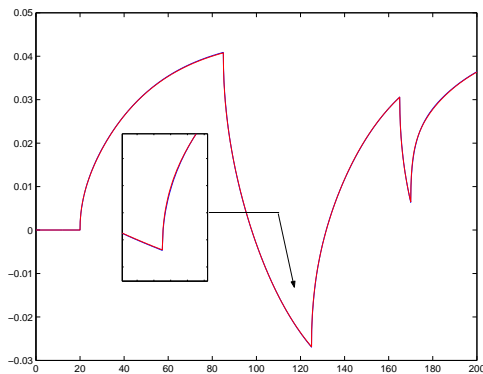
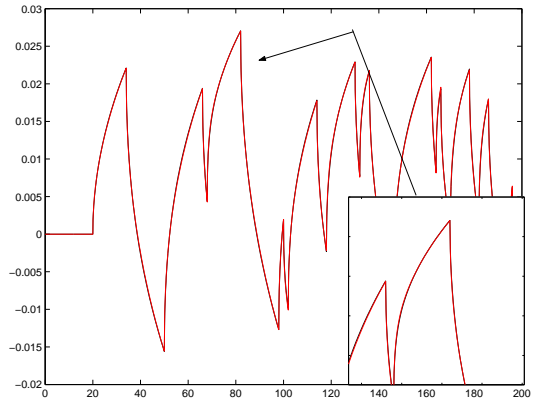
paramètres	$H_{n,s}(s)$
a_0	0.1288
b_0	0.0058
ω_p	0.0982

Les résultats obtenus sont proches de ceux obtenus en utilisant le modèle où n varie avec la fréquence (voir tableau I).


 Fig. 15. Diagrammes de Bode de $H(s)$, $H_{ns}(s)$

On peut noter que le nouvel intégrateur nous permet de reproduire le comportement dynamique du simulateur en basses et moyennes fréquences (voir figure 15). Il assure une bonne approximation et sa réponse est presque confondue à celle du modèle $H_{n_1, n_2}(s)$. Le comportement fractionnaire de l'opérateur n'apparaît que pour $\omega < 10^3 \text{rd/s}$ c'est à dire dans la bande où il est défini ($\omega_h = 10^3 \text{rd/s}$).

Dans le domaine temporel, on constate l'efficacité de ce modèle, que ce soit sur les données utilisées pour l'identification (figure 16) ou sur un nouveau jeu de données (figure 17). Ce modèle est capable de reproduire les transitoires rapides avec une excellente approximation et avec un nombre restreint de paramètres à estimer.


 Fig. 16. Réponses temporelles des modèles $H(s)$, $H_{ns}(s)$ -données utilisées pour l'identification

 Fig. 17. Réponses temporelles des modèles $H(s)$, $H_{ns}(s)$ -données utilisées pour la validation croisée

V. CONCLUSION

Le modèle proposé dans cette communication représente une nouvelle contribution à la modélisation des interfaces de diffusion. A partir de quelques considérations fréquentielles, l'objectif est l'amélioration du comportement dynamique du modèle. Dans les travaux précédents [3], [4], [5], [6], la modélisation des systèmes diffusifs en utilisant les modèles non entiers a montré son efficacité.

L'étude théorique a montré que la modélisation fractionnaire doit être capable de reproduire la caractéristique essentielle des phénomènes diffusifs, c'est à dire $n = 0.5$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Le modèle proposé dans ce papier est une amélioration de ceux proposés dans nos travaux précédents. Ce nouveau modèle est basé sur l'utilisation d'un intégrateur dont l'ordre varie avec la fréquence. Les résultats obtenus révèlent que ce modèle est parfaitement capable d'approcher le système de référence en basses et moyennes fréquences. Selon le paramètre estimé $n_1 = 1$, le modèle $H_{nv}(s)$ a été simplifié en un nouveau modèle ($H_{ns}(s)$) en imposant n_1 à 1. Les simulations effectuées ont démontré que l'intégrateur simplifié est capable d'assurer une excellente approximation des interfaces de diffusion, que ce soit dans le domaine fréquentiel ou temporel. On peut conclure alors que dans le cas du mur l'intégrateur fractionnaire simplifié est préférable par rapport aux précédents opérateurs d'intégration déjà utilisés, grâce à son efficacité d'approximation et sa parcimonie. Une étude sur différentes géométries devra être menée pour valider ces résultats.

RÉFÉRENCES

- [1] J. L. Battaglia, *Méthodes d'identification de modèles à dérivées d'ordre non entiers et de réduction modale. Application à la résolution de problème thermiques inverses dans des systèmes industriels. Habilitation à Diriger des Recherches*, Université de Bordeaux I, 2002.
- [2] A. Benchellal, S. Bachir, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, "Identification of a non integer model of induction machines," In : *Proc FDA'04. Bordeaux, France*, pp. 400–407, 2004.
- [3] A. Benchellal, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, "Approximation and identification of fractional systems," In : *International Design engineering technical Conferences, (ASME, IDETC)*, September 24–28, 2005, Long Beach, California, USA.
- [4] A. Benchellal, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, "Approximation and identification of diffusive interfaces by fractional models," In : *Signal Processing*, 2005.

- [5] A. Benchellal, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, "Approximation et identification des interfaces de diffusion," In : *JDMACS, Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS*, 5-7 Septembre 2005, Lyon, France.
- [6] A. Benchellal, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, "Fractional modelling and identification of a thermal process," In : *IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, 19-21 Juillet 2006, Porto, Portugal.
- [7] F. Benoît-Marrand, L. Signac, A. Benchellal, T. Poinot, and J. C. Trigeassou, "Identification of diffusive interfaces using a simplified fractional integrator. non-linear case," In : *IECON'06, the 32nd annual conference of the IEEE Industrial Electronic Society*, Paris, France, November 7-10, 2006.
- [8] S. Canat and J. Faucher, "Modelling and simulation of induction machine with fractional derivative," In : *Proc FDA'04, Bordeaux, France*, pp. 393-399, 2004.
- [9] O. Cois, "systèmes linéaires non entiers et identification par modèle non entier : Application en thermique," *Thèse de Doctorat. Université de Bordeaux I*, 2002.
- [10] T. Khaorapong, *Modélisation d'ordre nn entier des effets de fréquence dans les barres rotoriques d'une machine asynchrone*, Thèse de Doctorat, INP de Toulouse, 2001.
- [11] J. Lin, T. Poinot, J.C. Trigeassou and R. Ouvrard, "Parameter estimation of fractional systems : Application to the modelling of a lead-acid battery," In : *SYSID. Santa Barbara, USA*, 2000.
- [12] J. Lin, *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 2001.
- [13] L. Ljung, *System identification-Theory for the user*, T. Kailath ed., Prentice Hall. 1987.
- [14] D.W. Marquardt, "An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters," *J. Soc. Industr. Appl. Math, Paris France*, 11(2), pp. 431-441, 1963.
- [15] A. Oustaloup, *La dérivation non entière : théorie, synthèse et applications*, Hermès ed., Paris, France, 1995.
- [16] J. Richalet, A. Rault and R. Poulouen, *Identification des processus par la méthode du modèle*, Gordon and Breach ed, 1971.
- [17] D. Riu, and N. Retière "Implicit half-order systems utilisation for diffusion phenomenon modelling," In : *Proc. FDA'04, Bordeaux, France*, pp. 387-392, 2004.
- [18] J. C. Trigeassou, T. Poinot, J. Lin, A. Oustaloup and F. Levron, "Modelling and identification of a non integer order system," In : *Proc ECC'99. European Control Conference. Karlsruhe, Germany*, 1999.