

Identification de systèmes multivariables à temps continu par approche des sous-espaces

Guillaume MERCÈRE¹, Régis OUVRARD¹, Marion GILSON², Hugues GARNIER²

¹Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle, EA 1219
École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 40, avenue du Recteur Pineau 86022 Poitiers Cedex, France

²Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy-Université
CRAN UMR 7039 CNRS-UHP-INPL, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France

guillaume.mercere@univ-poitiers.fr, regis.ouvrard@univ-poitiers.fr,
marion.gilson@cran.uhp-nancy.fr, hugues.garnier@cran.uhp-nancy.fr

Résumé— *Cet article présente une nouvelle méthode d'identification de modèles d'état à temps continu de systèmes multivariables à partir de données d'entrée/sortie échantillonnées. L'approche proposée consiste plus particulièrement en l'association de techniques de filtrage et de deux algorithmes des sous-espaces. Ces techniques de filtrage permettent de contourner le problème de dérivation des signaux inhérent à toute identification directe de modèles à temps continu. Les méthodes de filtrage considérées sont les moments partiels réinitialisés et les filtres à variables d'état. Les algorithmes développés, fondés sur la classe d'identification MOESP, introduisent une variable instrumentale pour compenser les bruits d'état et de mesure colorés de par le préfiltrage des données d'entrée/sortie. Les performances des algorithmes proposés ainsi que l'influence de certains hyper-paramètres sont mis en évidence à l'aide d'un exemple de simulation.*

Mots-clés— *Modèle linéaire à temps continu, systèmes multivariables, moments partiels réinitialisés, filtres à variables d'état, méthodes des sous-espaces, représentation d'état.*

I. INTRODUCTION

Depuis plusieurs années, les méthodes d'identification utilisant l'approche des sous-espaces font l'objet d'une attention croissante [24], [10], [15]. Ces techniques présentent en effet l'avantage de fournir un modèle d'état linéaire du système, à partir des données d'entrée/sortie (E/S), à l'aide d'outils numériquement efficaces d'algèbre linéaire, sans nécessiter d'algorithme d'optimisation non linéaire. Les principaux développements concernent la modélisation de systèmes multivariables à temps discret [29], [4]. Pourtant, dans de nombreuses applications (modélisation, diagnostic, conception de lois de commande), il est souhaitable d'estimer un modèle à temps continu afin d'avoir accès aux paramètres physiques du système. L'approche qui vient à l'esprit, qualifiée d'indirecte, consiste dans un premier temps, à déterminer un modèle à temps discret à l'aide de techniques maintenant conventionnelles [17], [30], puis à convertir ce dernier en un modèle à temps continu. Les propriétés statistiques de ces méthodes d'estimation telles que biais, variance, convergence, etc, sont bien connues et expliquent en grande partie l'attrait pour cette stratégie. En contrepartie, cette approche indirecte souffre d'un certain nombre de limitations dont les principales concernent :

- le choix délicat de la période d'échantillonnage pour identifier un modèle à temps discret lorsque le système pos-

sède des constantes de temps éloignées. Une surestimation de la période d'échantillonnage conduit à ne pas respecter le théorème d'échantillonnage par rapport à la plus petite des constantes de temps du système. A l'inverse, une sous-estimation de celle-ci implique des pôles estimés proches du cercle unité, pouvant conduire à l'estimation de modèles instables ainsi qu'à des problèmes de conditionnement numérique au sein des techniques d'estimation des modèles à temps discret ;

- la conversion modèle à temps discret/modèle à temps continu nécessite de calculer le logarithme d'une matrice pouvant conduire à des résultats complexes et donner lieu alors à d'importantes erreurs. C'est notamment le cas lorsque la matrice en question possède des valeurs propres non positives ;
- si la plupart des techniques de discrétisation préserve la stabilité, il n'en est pas de même pour les zéros du système [1]. Certains zéros stables du modèle à temps continu peuvent devenir instables dans le modèle à temps discret.

Ces limitations peuvent être palliées avec l'approche directe qui consiste à identifier un modèle à temps continu directement à partir des données échantillonnées [23]. Le problème de base de ces techniques est le calcul des dérivées successives des signaux E/S. Les solutions reposent généralement sur l'introduction de filtres linéaires, de méthodes intégrales ou de fonctions modulantes [7]. Dans cet article, les moments partiels réinitialisés [22], [5] et les filtres à variables d'état [31] sont plus particulièrement utilisées. Ces techniques, bien que développées dans des contextes différents, présentent l'intérêt d'appartenir à une même classe de méthodes (*i.e.* méthodes de filtrage) et de fournir une solution au problème de calcul des dérivées des signaux E/S relativement simple.

Les méthodes d'estimation directe de modèles à temps continu ont essentiellement été développées dans le cas monovarié. Le contexte multivariable reste relativement peu étudié [11], [14], [2], [20], [16]. Les premières études [11], [14] proposent d'introduire des opérateurs de conversion discret/continu particuliers pour analyser et récrire le problème d'identification à temps continu à l'aide d'une approche algébrique. T. Bastogne *et al* combinent quant à eux un préfiltrage de type moment de Poisson à l'algorithme des sous-espaces décrit dans [19] pour compenser les bruits colorés. A. Oshumi

et al [20] traitent le problème d'identification en présence de bruits d'état et de mesure en décrivant les dérivées de bruits blancs gaussiens via le concept de distribution aléatoire de Itô Schwartz. W. Li *et al* [16] proposent finalement d'utiliser l'approche des sous-espaces associée à un filtrage intégral (intégrateur numérique développé dans [21]) pour estimer un modèle de résidu sans estimer préalablement un modèle d'état du système.

Au sein de cet article, le problème d'identification de modèles d'état à temps continu de systèmes multivariables est considéré en associant les moments partiels réinitialisés et les filtres à variables d'état à une classe particulière de méthodes des sous-espaces : les algorithmes MOESP [27], [28], [25], [26]. Ces techniques, fondées principalement sur l'estimation du sous-espace d'observabilité, présentent la caractéristique d'utiliser des projections orthogonales qui tendent à augmenter leur robustesse numérique. Le traitement des perturbations est réalisé en introduisant une variable instrumentale particulière au cours de la phase d'estimation d'une base de la matrice d'observabilité du système.

L'article est organisé comme suit. La section II introduit la problématique de l'identification de modèles d'état à temps continu en explicitant les difficultés liées aux dérivées successives des signaux d'entrée/sortie. La section III présente succinctement les deux techniques de transformation utilisées pour contourner le problème de dérivation et propose une réécriture des équations employées par l'approche des sous-espaces dans le contexte continu. Le développement de deux algorithmes d'estimation est décrit au sein de la section IV. Une étude dans un contexte déterministe puis stochastique est plus particulièrement présentée. Une version décalée des données filtrées d'entrée et/ou de sortie est proposée comme instruments. Cette démarche évite ainsi d'employer des dérivées filtrées d'ordre conséquent tout en conduisant à une décorrélation suffisante de la variable instrumentale et des bruits agissant sur le procédé. Une comparaison des performances des algorithmes développés ainsi qu'une analyse de l'influence de certains hyper-paramètres sont considérées dans la section V. La section VI conclut cet article et introduit quelques perspectives.

II. FORMULATION DU PROBLÈME ET NOTATIONS

Considérons un système linéaire invariant à temps continu représentable par la forme d'état suivante

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t) \quad (1b)$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$ et $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$ sont respectivement les vecteurs d'entrée et de sortie du système, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$ le vecteur d'état et \mathbf{w} et \mathbf{v} les bruits d'état et de mesure supposés de moyenne nulle, de variance finie, constants entre deux échantillons [13] et décorrélés du signal d'entrée. Le problème d'identification considéré ci-après consiste à estimer les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , à un changement de base près, à partir d'un nombre fini de données E/S échantillonnées $\{\mathbf{u}(t_k), \mathbf{y}(t_k)\}_{k=1}^N$ avec $t_k = kT_e$, T_e étant la période d'échantillonnage des signaux.

Afin d'introduire plus précisément la problématique liée à l'identification de modèles à temps continu, plaçons-nous,

dans un premier temps, dans un contexte purement déterministe (*i.e* $\mathbf{v} = \mathbf{w} = \mathbf{0}$) et supposons que les signaux d'entrée et de sortie soient dérivables jusqu'à un ordre $i > n_x$. On peut montrer que [2]

$$\mathbf{y}_i(t_k) = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i(t_k) \quad (2)$$

où $\mathbf{y}_i(t_k)$ (resp. $\mathbf{u}_i(t_k)$) est le vecteur contenant les dérivées successives des sorties (resp. entrées) à l'instant $t = t_k$ défini par

$$\mathbf{y}_i(t_k) = \left[\mathbf{y}^T(t_k) \quad \dot{\mathbf{y}}^T(t_k) \quad \cdots \quad \mathbf{y}^{(i-1)T}(t_k) \right]^T, \quad (3)$$

$\mathbf{\Gamma}_i$ la matrice d'observabilité étendue d'ordre i du système

$$\mathbf{\Gamma}_i = \left[\mathbf{C}^T \quad (\mathbf{C}\mathbf{A})^T \quad \cdots \quad (\mathbf{C}\mathbf{A}^{i-1})^T \right]^T \quad (4)$$

et \mathbf{H}_i une matrice bloc Toeplitz composée des paramètres de Markov du système. Pour N échantillons, l'équation (2) peut s'écrire matriciellement

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{X} + \mathbf{H}_i \mathbf{U}_i \quad (5)$$

avec¹

$$\mathbf{Y}_i = \left[\mathbf{y}_i(t_1) \quad \mathbf{y}_i(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{y}_i(t_N) \right] \quad (6)$$

et

$$\mathbf{X} = \left[\mathbf{x}(t_1) \quad \mathbf{x}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{x}(t_N) \right]. \quad (7)$$

L'équation (5) présente la particularité d'être équivalente à l'équation discrète de données généralement utilisée en identification des sous-espaces [29]. Les approches traditionnelles des sous-espaces pour les modèles à temps discret reposent sur les étapes successives suivantes

- une compression des matrices de données E/S à l'aide d'une factorisation QR,
- une décomposition en valeurs singulières (DVS) de certaines sous-matrices issues de la factorisation précédente conduisant à une estimation consistante de la matrice d'observabilité du système.
- les matrices \mathbf{A} et \mathbf{C} sont ensuite obtenues grâce à la propriété d'A-invariance de $\mathbf{\Gamma}_i$. \mathbf{B} et \mathbf{D} sont ensuite estimées à l'aide, par exemple, d'une régression linéaire [29].

Il est essentiel de préciser que l'hypothèse de la mesure des signaux E/S ainsi que de leurs dérivées est une condition incontournable à l'obtention de l'équation (5). Malheureusement, en pratique, l'acquisition ou le calcul direct des dérivées successives de \mathbf{u} et \mathbf{y} est très rarement réalisable, en particulier en présence de perturbations. Il est donc nécessaire de faire appel à des techniques d'évaluation de ces dérivées à partir de l'information contenues dans les données E/S échantillonnées. Plusieurs algorithmes ont été développés aux cours des trois dernières décennies (cf. [7] pour un état de l'art). Face à la profusion de ces techniques, l'utilisateur était le plus souvent démuné. Une étude comparative à l'aide de simulations de Monte Carlo a permis de dégager six techniques présentant des performances nettement supérieures aux autres. Deux de ces méthodes sont considérées dans cet article : la méthode des filtres à variables d'état [31] et les moments partiels réinitialisés [22], [5].

¹La matrice \mathbf{U}_i est construite similairement à \mathbf{Y}_i .

III. APPROXIMATION DES DÉRIVÉES DES DONNÉES D'ENTRÉE-SORTIE

Le principe de l'identification directe de modèles à temps continu consiste en l'application de transformations linéaires aux données E/S échantillonnées pour évaluer les dérivées (pondérées) des signaux d'entrée et de sortie. Les données utilisées par les algorithmes d'identification ne sont alors plus les signaux $\{\mathbf{u}(t_k), \mathbf{y}(t_k)\}_{k=1}^N$ mais leurs transformées.

Remarque 1. *Il est à noter que ces deux transformations sont disponibles dans la boîte à outils Matlab CONTSID [7], [6].*

A. Moments Partiels Réinitialisés (MPR)

Les moments partiels réinitialisés reposent sur le calcul d'intégrales des signaux E/S pondérés par une fonction particulière. Ce filtrage dépend de l'intervalle d'intégration choisi $[0, T]$. Il est démontré dans [22] qu'il existe une valeur optimale \hat{T} pour laquelle la variance de l'erreur d'estimation est minimale. Afin de profiter de cette propriété quel que soit t , le calcul de l'intégrale est réinitialisé à chaque période d'échantillonnage. L'évaluation des MPR se fait alors sur un horizon mobile $[0, \hat{T}]$. Le MPR, défini comme suit

$$\bar{M}_n(s(t)) = \int_0^{\hat{T}} \frac{\tau^n}{n!} s(t - \hat{T} + \tau) d\tau \quad (8)$$

présente la particularité de pouvoir se récrire comme un produit de convolution [22]

$$\bar{M}_n \{s(t)\} = \int_0^{\hat{T}} \frac{(\hat{T} - \tau)^n}{n!} s(t - \tau) d\tau = [h_n \star s](t) \quad (9)$$

avec $h_n(\tau)$ la réponse impulsionnelle finie (RIF) d'un filtre telle que

$$h_n(t) = \frac{(\hat{T} - t)^n}{n!} \text{ pour } t \in [0, \hat{T}] \quad (10a)$$

$$h_n(t) = 0 \text{ sinon.} \quad (10b)$$

L'utilisation des moments permet, par intégration, de faire disparaître les dérivées successives de l'entrée et de la sortie. Mais l'utilisation de ces moments particuliers revient également à filtrer l'entrée et la sortie par un filtre RIF. Les MPR appartiennent donc à deux classes de méthodes de transformation : les méthodes intégrales et les méthodes de filtrage. Cette approche présente également la propriété de voir l'effet transitoire du filtre disparaître après \hat{T} échantillons du fait de l'utilisation d'un filtre RIF. Cette technique n'est donc pas sensible aux conditions initiales.

B. Filtres à Variables d'État (FVE)

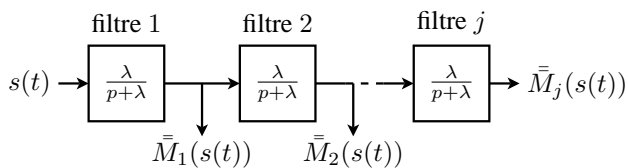


Fig. 1. Chaîne de filtres à variables d'état.

La méthode des filtres à variables d'état consiste à appliquer un filtre linéaire particulier aux dérivées des signaux E/S pour

les transformer en un équivalent algébrique [31]. L'évaluation des dérivées est ainsi évitée. Le filtre considéré ici est constitué d'une cascade de filtres du premier ordre

$$F(p) = \frac{\lambda}{p + \lambda}. \quad (11)$$

La structure chaînée particulière des FVE (cf. fig. 1) permet d'obtenir les signaux filtrés à l'ordre désiré en sortie des filtres concaténés. En tant que filtre, l'application des FVE peut aisément se récrire sous la forme d'un produit de convolution

$$\bar{M}_n \{s(t)\} = \int_0^t s(\tau) g_n(t - \tau) d\tau = [g_n \star s](t) \quad (12)$$

avec

$$g_n(t) = \lambda^{n+1} \frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (13)$$

Bien que le filtre à variable d'état présente une réponse impulsionnelle infinie, cette réponse s'estompe lorsque t croît. L'influence des conditions initiales disparaît donc très rapidement [7].

C. Formulation de l'équation de données filtrées

La représentation de ces deux transformations sous forme de produit de convolution permet de formuler leur application à notre problème d'identification d'une manière globale. Introduisons donc $m_n(t)$ la réponse impulsionnelle telle que

$$m_n(t) = h_n(t) \text{ pour les MPR} \quad (14a)$$

$$m_n(t) = g_n(t) \text{ pour les FVE.} \quad (14b)$$

Pour tout vecteur $\mathbf{z}_i(t) \in \mathbb{R}^{n_{z_i}}$ défini comme suit

$$\mathbf{z}_i(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T(t) & \mathbf{z}^{(1)T}(t) & \dots & \mathbf{z}^{(i-1)T}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (15)$$

il est aisé de vérifier que

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}_i \star m_n](t) &= \begin{bmatrix} [\mathbf{z} \star m_n](t) \\ [\dot{\mathbf{z}} \star m_n](t) \\ \vdots \\ [\mathbf{z}^{(i-1)} \star m_n](t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [\mathbf{z} \star m_n](t) \\ [\mathbf{z} \star \dot{m}_n](t) \\ \vdots \\ [\mathbf{z} \star m_n^{(i-1)}](t) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{z}(t)\} \\ M_1^n \{\mathbf{z}(t)\} \\ \vdots \\ M_{i-1}^n \{\mathbf{z}(t)\} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

avec $n \geq i + 1$. Cette conversion, liée aux propriétés du produit de convolution, permet de reporter l'opération de dérivation sur la fonction m_n , fonction $i - 1$ fois dérivable par construction. Le problème de dérivation des données E/S est ainsi contourné.

En présence de perturbations d'état et de mesure, la relation (2) s'écrit

$$\mathbf{y}_i(t_k) = \mathbf{\Gamma}_i \mathbf{x}(t_k) + \mathbf{H}_i \mathbf{u}_i(t_k) + \mathbf{G}_i \mathbf{w}_i(t_k) + \mathbf{v}_i(t_k) \quad (17)$$

où \mathbf{G}_i est une matrice bloc Toeplitz composée des réponses

impulsionnelles entre \mathbf{w} et \mathbf{y} . L'application de la transformation décrite précédemment aux vecteurs décalés de cette équation conduit à

$$\begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{y}(t_k)\} \\ \vdots \\ M_{i-1}^n \{\mathbf{y}(t_k)\} \end{bmatrix} = \mathbf{\Gamma}_i M_0^n \{\mathbf{x}(t_k)\} + \mathbf{H}_i \begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{u}(t_k)\} \\ \vdots \\ M_{i-1}^n \{\mathbf{u}(t_k)\} \end{bmatrix} + \mathbf{G}_i \begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{w}(t_k)\} \\ \vdots \\ M_{i-1}^n \{\mathbf{w}(t_k)\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{v}(t_k)\} \\ \vdots \\ M_{i-1}^n \{\mathbf{v}(t_k)\} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Comme dans le cas discret, l'accès à N échantillons permet d'étendre l'équation précédente comme suit

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} = \mathbf{\Gamma}_i \mathcal{M}\{\mathbf{X}\} + \mathbf{H}_i \mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\} + \mathbf{G}_i \mathcal{M}\{\mathbf{W}_i\} + \mathcal{M}\{\mathbf{V}_i\} \quad (19)$$

où $\mathcal{M}\{\bullet\}$ symbolise de manière générique la transformation appliquée aux données échantillonnées pour évaluer les dérivées des données E/S

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} = \begin{bmatrix} M_0^n \{\mathbf{y}(t_1)\} & \cdots & M_0^n \{\mathbf{y}(t_N)\} \\ M_1^n \{\mathbf{y}(t_1)\} & \cdots & M_1^n \{\mathbf{y}(t_N)\} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{i-1}^n \{\mathbf{y}(t_1)\} & \cdots & M_{i-1}^n \{\mathbf{y}(t_N)\} \end{bmatrix} \quad (20)$$

et

$$\mathcal{M}\{\mathbf{X}\} = [M_0^n \{\mathbf{x}(t_1)\} \quad \cdots \quad M_0^n \{\mathbf{x}(t_N)\}]. \quad (21)$$

Contrairement à l'équation (5), le calcul des composantes des matrices $\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\}$ et $\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}$ est pratiquement réalisable.

IV. ALGORITHMES D'IDENTIFICATION DES SOUS-ESPACES

Considérons donc désormais l'équation de données filtrées (19). L'équivalence entre le problème d'identification à temps continu et à temps discret est alors autorisée si et seulement si le filtrage ne supprime aucun état *i.e* si $\text{rang}\{\mathcal{M}\{\mathbf{X}\}\} = n_x$. En supposant que le signal d'entrée soit suffisamment riche (cf. [12] pour une étude de ce problème), que les conditions initiales soient nulles et que $i > n_x$, il devient théoriquement possible d'appliquer les algorithmes discrets des sous-espaces au problème d'identification à temps continu. Le choix s'est plus précisément porté sur la classe d'identification MOESP [27], [28], [25], [26]. Les algorithmes regroupés sous cet acronyme présentent en effet certains avantages numériques (mis en évidence par exemple dans [8]) de par l'utilisation de projections orthogonales.

A. Algorithmes d'identification dans un contexte déterministe

Considérons la relation matricielle suivante

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} = \mathbf{\Gamma}_i \mathcal{M}\{\mathbf{X}\} + \mathbf{H}_i \mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}. \quad (22)$$

L'objectif est d'estimer la matrice d'observabilité $\mathbf{\Gamma}_i$ connaissant les matrices de données $\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\}$ et $\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}$. Au sein de la relation (22), la matrice de Toeplitz \mathbf{H}_i est inconnue puisque celle-ci est composée des matrices à identifier. La

première étape de l'algorithme de base MOESP [28] consiste à supprimer le régime forcé $\mathbf{H}_i \mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}$ en appliquant une projection orthogonale sur le noyau de $\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}$. Le calcul de cette projection orthogonale est numériquement robuste en employant la factorisation QR [9]

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\} \\ \mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

En effet, il est facile de montrer que [28], [18]

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} = \mathbf{R}_{22} \mathbf{Q}_2. \quad (24)$$

L'application d'une telle projection conduit ainsi à la relation

$$\mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} = \mathbf{\Gamma}_i \mathcal{M}\{\mathbf{X}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp}. \quad (25)$$

En supposant que la matrice $\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}$ soit de rang plein de telle sorte que

$$\text{rang}\{\mathcal{M}\{\mathbf{X}\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp}\} = n_x, \quad (26)$$

la seconde étape consiste en l'estimation d'une base de $\mathbf{\Gamma}_i$. Cette extraction est réalisée en appliquant une décomposition en valeurs singulières au bloc \mathbf{R}_{22}

$$\mathbf{R}_{22} = [\mathbf{U}_s \quad \mathbf{U}_b] \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s^T \\ \mathbf{V}_b^T \end{bmatrix}. \quad (27)$$

L'estimation de la matrice d'observabilité étendue est alors directement accessible à partir du sous-espace signal [25]

$$\hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \mathbf{U}_s \text{ ou } \hat{\mathbf{\Gamma}}_i = \mathbf{U}_s \mathbf{\Sigma}_s^{1/2}. \quad (28)$$

L'analyse des valeurs singulières de \mathbf{R}_{22} permet de plus d'estimer l'ordre du système au cours de l'identification puisque, dans le cas déterministe, n_x valeurs singulières sont non nulles.

B. Algorithmes d'identification en présence de perturbations

En présence de perturbations, l'algorithme de base MOESP conduirait à une estimation biaisée de la matrice d'observabilité. En effet, même lorsque \mathbf{v} est un bruit blanc gaussien et $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ (contexte dans lequel Ordinary MOESP fonctionne en discret), le filtrage des données E/S conduit nécessairement à la coloration des perturbations agissant sur le procédé. La solution proposée, inspirée du cas discret, consiste à introduire une variable instrumentale au sein de la factorisation QR (23) afin d'annuler l'effet des perturbations tout en conservant les informations utiles liées à la dynamique du système. En notant $\mathbf{\Xi}$ la matrice d'instruments, on peut démontrer qu'en construisant la factorisation suivante

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\} \\ \mathbf{\Xi} \\ \mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{21} & \mathbf{R}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{31} & \mathbf{R}_{32} & \mathbf{R}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix} \quad (29)$$

il s'ensuit que [29], [18]

$$\mathbf{R}_{32} \mathbf{Q}_2 = \mathcal{M}\{\mathbf{Y}_i\} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T \mathbf{P}_d \quad (30)$$

où \mathbf{P}_d est une matrice de pondération particulière. Asymptotiquement, la seconde partie de l'équation (30) s'écrit

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{M} \{ \mathbf{Y}_i \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T \mathbf{P}_d = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\mathbf{\Gamma}_i \mathcal{M} \{ \mathbf{X} \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T \right. \\ \left. + \mathbf{H}_i \mathcal{M} \{ \mathbf{U}_i \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T + \right. \\ \left. [\mathbf{G}_i \mathcal{M} \{ \mathbf{W}_i \} + \mathcal{M} \{ \mathbf{V}_i \}] \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T \right) \mathbf{P}_d. \end{aligned} \quad (31)$$

Par définition de la projection orthogonale, le deuxième terme de la partie droite de l'égalité précédente est nulle. Sachant de plus que

$$\mathbf{\Pi}_{\mathbf{M}^\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^T (\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1} \mathbf{M}, \quad (32)$$

il est aisé de vérifier que²

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathcal{M} \{ \mathbf{V}_i \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T = \mathbb{E} \{ \mathcal{M} \{ \mathbf{v}_i \} \boldsymbol{\xi}^T \} - \\ \mathbb{E} \{ \mathcal{M} \{ \mathbf{v}_i \} \mathcal{M} \{ \mathbf{u}_i \}^T \} \left(\mathbb{E} \{ \mathcal{M} \{ \mathbf{u}_i \} \mathcal{M} \{ \mathbf{u}_i \}^T \} \right)^{-1} \\ \mathbb{E} \{ \mathcal{M} \{ \mathbf{u}_i \} \boldsymbol{\xi}^T \} \end{aligned} \quad (33)$$

avec $\mathbb{E} \{ \bullet \}$ l'espérance mathématique. En choisissant une variable instrumentale $\boldsymbol{\xi}$ décorrélée des perturbations et sachant que, par hypothèse, le signal d'entrée est indépendant de \mathbf{v} et \mathbf{w} , il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{R}_{32} \mathbf{Q}_2 = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \mathbf{\Gamma}_i \mathcal{M} \{ \mathbf{X} \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T \mathbf{P}_d. \end{aligned} \quad (34)$$

Cette équation démontre ainsi qu'il est possible d'estimer une base de la matrice d'observabilité à partir de \mathbf{R}_{32} lorsque

$$\text{rang} \left\{ \mathcal{M} \{ \mathbf{X} \} \mathbf{\Pi}_{\mathcal{M}\{\mathbf{U}_i\}^\perp} \mathbf{\Xi}^T \mathbf{P}_d \right\} = n_x. \quad (35)$$

Cette base est obtenue en appliquant une DVS à ce bloc matriciel. L'estimation de l'ordre peut être réalisée en examinant les valeurs singulières obtenues lors de l'application de cette décomposition. Dans un grand nombre de cas, la recherche de l'écart le plus important entre les différentes valeurs estimées permet de décomposer l'information en une partie système et une partie bruit. Quelques techniques d'estimation, fondées sur la minimisation de critères, sont proposées dans la littérature [3], [4].

Plusieurs possibilités de variable instrumentale peuvent être considérées. En règle générale, dans un contexte temps continu, les instruments sont construits en augmentant l'ordre de dérivation i et, par extension, le nombre de ligne des matrices composant l'équation de données filtrées (22) [14], [20], [16]. R. Johansson *et al* recommandent par exemple d'accroître i d'une valeur supérieure à $n_u + n_y + n_x$. L'inconvénient majeur d'une telle approche est de demander de calculer des approximations de dérivées des signaux E/S d'ordre relativement élevé, contrainte conduisant généralement à une dégradation des performances. Pour remédier à ce désagrément, il

²Il en est de même pour $\mathcal{M} \{ \mathbf{W}_i \}$

est proposé, dans cet article, d'utiliser une version décalée des matrices filtrées d'entrée et/ou de sortie, par exemple

$$\mathbf{\Xi} = \begin{bmatrix} M_0^n \{ \mathbf{u}(t_1 - \ell T_e) \} & \cdots & M_0^n \{ \mathbf{u}(t_N - \ell T_e) \} \\ M_1^n \{ \mathbf{u}(t_1 - \ell T_e) \} & \cdots & M_1^n \{ \mathbf{u}(t_N - \ell T_e) \} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{i-1}^n \{ \mathbf{u}(t_1 - \ell T_e) \} & \cdots & M_{i-1}^n \{ \mathbf{u}(t_N - \ell T_e) \} \end{bmatrix} \quad (36)$$

où ℓ représente le décalage temporel. Cette démarche évite en effet d'employer des dérivées filtrées d'ordre conséquent élevé tout en permettant une décorrélation suffisante de la variable instrumentale et des bruits agissant sur le procédé. Une première étude de l'influence du paramètre ℓ est proposée dans [11].

V. EXEMPLE DE SIMULATION

Le procédé considéré au sein de cette section est extrait d'un des programmes de démonstration de la boîte à outils Matlab CONTSID³. Sa représentation d'état s'écrit

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (37a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t). \quad (37b)$$

Le signal de commande \mathbf{u} est composé de deux séquences binaires pseudo aléatoires non corrélées de longueur $N = 1000$. La période d'échantillonnage est égale à 0.1s. Un bruit blanc gaussien \mathbf{v} est ajouté en sortie et construit de telle sorte que le rapport signal sur bruit⁴ soit de 20dB. La valeur initiale du vecteur d'état est fixée à zéro.

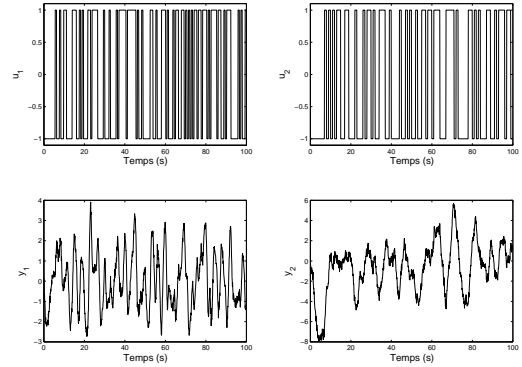


Fig. 2. Signaux d'entrée et de sortie.

Afin de mettre en évidence les apports de l'approche considérée au sein de cet article, les algorithmes développés précédemment (nommés respectivement MPR+MOESP et FVE+MOESP) sont comparés à deux techniques d'identification particulières

- la méthode proposée par T. Bastogne *et al* [2] combinant les fonctionnelles de moments de Poisson (FMP) associées à un algorithme des sous-espaces fondé sur une décomposition en valeurs singulières généralisée (DVSG),

³<http://www.cran.uhp-nancy.fr/contsid/>

⁴ $\text{RSB} = 10 \log \left(\frac{P_{y_d}}{P_v} \right)$, y_d représentant la partie déterministe de y .

– l'algorithme à temps discret PI MOESP [26] conduisant à un modèle d'état discret converti dans le domaine continu à l'aide de la fonction `d2c` de Matlab.

La variable instrumentale employée est une version décalée de la matrice filtrée d'entrée avec $\ell = 10$. Les hyper-paramètres des techniques MPR+MOESP et FVE+MOESP sont choisis comme suit : $\hat{T} = 25$ et $\lambda = 3$.

Deux cas sont plus particulièrement considérés. Dans un premier temps, l'hyper-paramètre i est choisi égal à l'ordre du système $n_x = 3$. La figure 3 présente les pôles estimés par les différents algorithmes au cours d'une simulation de Monte Carlo de 50 réalisations. Les pôles du système étant placés en -2 , $-0.5 + \sqrt{3}j$ et $-0.5 - \sqrt{3}j$, on constate que les techniques MPR+MOESP et FVE+MOESP estiment relativement correctement les pôles complexes conjugués mais rencontrent plus de difficulté à retrouver le pôle réel bien que les estimées soient centrées sur la valeur souhaitée. L'algorithme FMP+DVSG estime correctement les pôles $-0.5 + \sqrt{3}j$ et $-0.5 - \sqrt{3}j$ mais présente un biais sur l'estimation du pôle réel. Étant donné la parenté des FMP et de FVE et les bons résultats obtenus avec FVE+MOESP, il est fort probable que l'erreur d'estimation soit due à l'utilisation d'une décomposition en valeurs singulières généralisée. Enfin, la combinaison PI MOESP conversion discret continu conduit à des résultats très médiocres puisque les pôles estimés sont totalement erronés. Afin de mettre en évidence certaines limites des algorithmes développés jusqu'ici, la simulation de Monte Carlo est réitérée en fixant, dans un second temps, $i = 2n_x = 6$. Les résultats sont présentés figure 4. Comme pressenti au cours de la discussion de la sous-section IV-B, l'augmentation de l'ordre de dérivation conduit à une altération importante des estimées. Cette constatation concerne les trois algorithmes d'identification directe de modèles à temps continu. Au contraire, l'approche indirecte fournit de meilleurs résultats que dans le cas précédent. Ceci s'explique par le fait que les algorithmes de type sous-espaces discrets demandent des matrices de Hankel d'entrée-sortie de taille relativement conséquente pour assurer de bonnes propriétés numériques. La contrainte $i \geq n_x$ n'est donc pas suffisante. Choisir $i \geq 2n_x$ semble être plus raisonnable. On remarque tout de même que la variance des pôles obtenues avec PI MOESP + conversion discret continu est assez grande. Utiliser les algorithmes des sous-espaces à temps continu en fixant les hyper-paramètres de manière optimale paraît donc être, tout au moins sur cet exemple, une bonne approche du problème d'identification de systèmes à représentation continue.

VI. CONCLUSION

Dans cette communication, le problème d'identification de systèmes multivariables représentés sous forme d'état à temps continu est considéré. L'approche proposée consiste en la combinaison des moments partiels réinitialisés ou des filtres à variables d'état et de deux algorithmes d'identification des sous-espaces appartenant à la classe MOESP. L'association de ces techniques conduit à obtenir les matrices du modèle d'état à temps continu du système multivariable à partir de données échantillonnées en appliquant des outils d'algèbre linéaire numériquement robustes, sans nécessiter d'algorithme d'optimisation non linéaire. L'introduction des moments partiels ré-

initialisés ou des filtres à variables d'état permet quant à elle de contourner le problème de dérivation des données d'entrée/sortie, problème particulièrement crucial en présence de perturbations.

L'étude expérimentale a mis en évidence qu'il est possible d'atteindre de bonnes performances en présence de perturbations lorsque les hyper-paramètres sont bien choisis. Les résultats de simulation ont également souligné l'impact de ces hyper-paramètres sur les performances des algorithmes développés. Une analyse plus approfondie de l'influence des hyper-paramètres i et ℓ doit donc être considérée à la suite de cette première étude.

RÉFÉRENCES

- [1] K. J. Aström, P. Hagander, and J. Sternby. Zeros of sampled systems. *Automatica*, 20 :31–38, 1984.
- [2] T. Bastogne, H. Garnier, and P. Sibille. A PMF-based subspace method for continuous-time model identification. Application to a multivariable winding process. *International Journal of Control*, 74 :118–132, 2001.
- [3] D. Bauer. Order estimation for subspace methods. *Automatica*, 37 :1561–1573, 2001.
- [4] D. Bauer. Asymptotic properties of subspace estimators. *Automatica*, 41 :359–376, 2005.
- [5] M. Djamai, E. Tohme, R. Ouvrard, and S. Bachir. Continuous time model identification using reinitialized partial moments. Application to power amplifier modeling. In *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification*, Newcastle, Australia, March 2006.
- [6] H. Garnier, M. Gilson, and O. Cervellin. Latest developments for the Matlab CONTSID toolbox. In *Proceedings of the 14th IFAC Symposium on System Identification*, Newcastle, Australia, March 2006.
- [7] H. Garnier, M. Mensler, and A. Richard. Continuous-time model identification from sampled data : implementation issues and performance evaluation. *International Journal of Control*, 76 :1337–1357, 2003.
- [8] I. Goethals. *Subspace identification for linear, Hammerstein and Hammerstein Wiener systems*. PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit der Toegepaste Wetenschappen, 2005.
- [9] G. H. Golub and C. F. Van Loan. *Matrix computations*. John Hopkins University Press, Baltimore MD, 3rd edition, 1996.
- [10] B. R. J. Haverkamp. *State space identification : theory and practice*. PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands, 2001.
- [11] B. R. J. Haverkamp, C. T. Chou, M. Verhaegen, and R. Johansson. Identification of continuous time MIMO state space models from sampled data in the presence of process and measurement noise. In *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, Kobe, Japan, December 1996.
- [12] M. Jansson and B. Wahlberg. On consistency of subspace methods for system identification. *Automatica*, 34 :1507–1519, 1998.
- [13] R. Johansson. Identification of continuous time models. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42 :887–897, 1994.
- [14] R. Johansson, M. Verhaegen, and C. T. Chou. Stochastic theory of continuous time state space identification. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 47 :41–51, 1999.
- [15] T. Katayama. *Subspace methods for system identification*. Springer, 2005.
- [16] W. Li, H. Raghavan, and S. Shah. Subspace identification of continuous time models for process fault detection and isolation. *Journal of Process Control*, 13(5) :407–421, 2003.
- [17] L. Ljung. *System identification. Theory for the user*. PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series. T. Kailath, Series Editor, Upper Saddle River, 2nd edition, 1999.
- [18] G. Mercère. *Contribution à l'identification récursive des systèmes par l'approche des sous-espaces*. PhD thesis, Universités des Sciences et Technologies de Lille, Villeneuve d'Ascq, France, December 2004.
- [19] M. Moonen, B. De Moor, and J. Vandewalle. *SVD based subspace methods for multivariable continuous time systems identification*, chapter Identification of Continuous Time Systems, pages 473–488. Kluwer Academic Publications, 1991.
- [20] A. Ohsumi, K. Kameyama, and K. I. Yamaguchi. Subspace identification for continuous time stochastic systems via distribution based approach. *Automatica*, 38 :63–79, 2002.
- [21] S. Sagara and Z. Zhao. Numerical integration approach to on-line identification of continuous-time systems. *Automatica*, 26 :63–74, 1990.

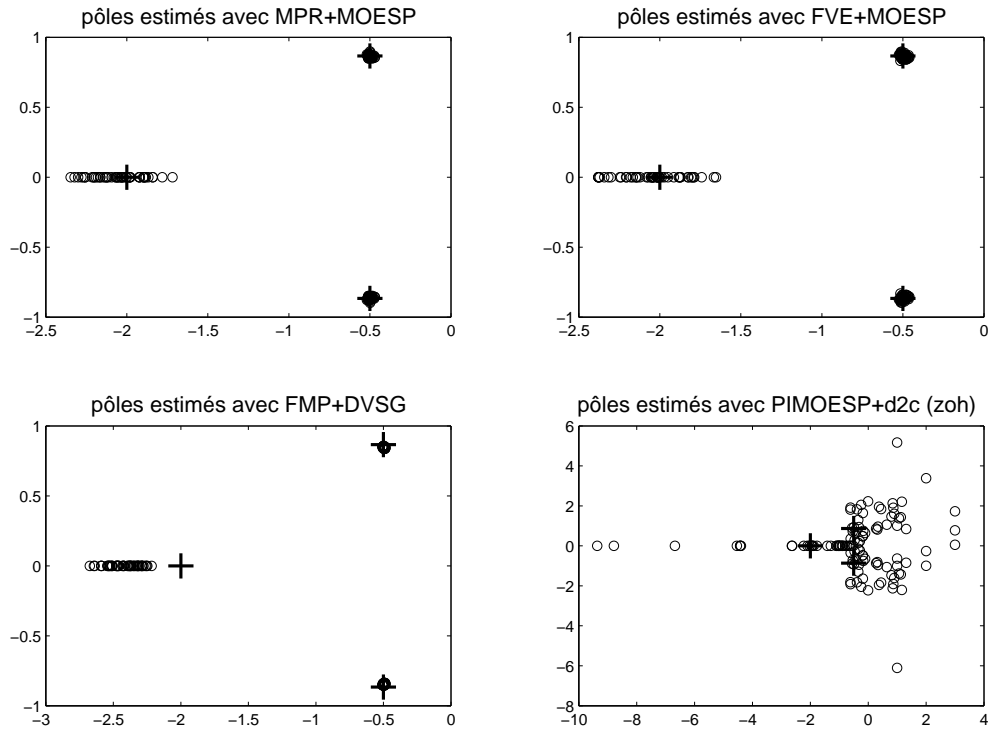


Fig. 3. Comparaison des pôles estimés à l'aide des algorithmes MPR+MOESP, FVE+MOESP, FMP+DVS généralisée et PI MOESP suivi d'une conversion discret/continu pour $i = 3$. Les pôles du système à identifier sont symbolisés par une croix noire.

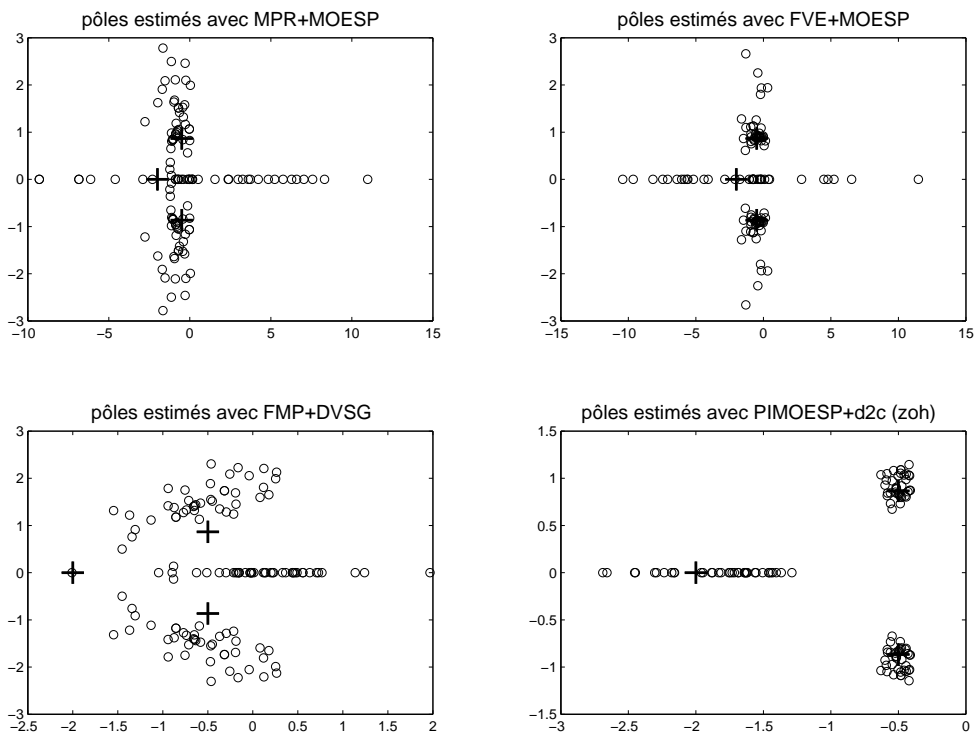


Fig. 4. Comparaison des pôles estimés à l'aide des algorithmes MPR+MOESP, FVE+MOESP, FMP+DVS généralisée et PI MOESP suivi d'une conversion discret/continu pour $i = 6$. Les pôles du système à identifier sont symbolisés par une croix noire.

- [22] J.C. Trigeassou. *Contribution à l'extension de la méthode des moments en automatique. Application à l'identification des systèmes linéaires.* Thèse d'état, Université de Poitiers, France, 1987.
- [23] H. Unbehauen and G. P. Rao. Continuous time approaches to system identification : a survey. *Automatica*, 26 :23–35, 1990.
- [24] P. Van Overschee and B. De Moor. *Subspace identification for linear systems. Theory, implementation, applications.* Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [25] M. Verhaegen. Subspace model identification part 3 : analysis of the ordinary output error state space model identification algorithm. *International Journal of Control*, 58 :555–586, 1993.
- [26] M. Verhaegen. Identification of the deterministic part of MIMO state space models given in innovations form from input output data. *Automatica*, 30 :61–74, 1994.
- [27] M. Verhaegen and P. Dewilde. Subspace model identification part 1 : output error state space model identification class of algorithms. *International Journal of Control*, 56 :1187–1210, 1992.
- [28] M. Verhaegen and P. Dewilde. Subspace model identification part 2 : analysis of the elementary output error state space model identification algorithm. *International Journal of Control*, 56 :1211–1241, 1992.
- [29] M. Viberg. Subspace based methods for the identification of linear time invariant systems. *Automatica*, 31 :1835–1851, 1995.
- [30] E. Walter and L. Pronzato. *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales.* Masson, 1994.
- [31] P. Young. Parameter estimation for continuous time models : a survey. *Automatica*, 17 :23–39, 1981.