7e Conférence Internationale de MOdélisation et SIMulation - MOSIM'08 - du 31 mars au 2 avril 2008 – Paris- France
« Modélisation, Optimisation et Simulation des Systèmes : Communication, Coopération et Coordination.».

MODELISATION QUANTITATIVE DU PROCESSUS DE BENCHMARKING

Ayeley P. TCHANGANI [1,2]

[1]Université Toulouse III
Dpt. GEII, IUT de Tarbes
1 rue Lautréamont
65016 Tarbes Cedex, France
E-Mail: ayeley.tchangani@iut-tarbes.fr

[2] Laboratoire Génie de Production
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes
47 avenue d'Azereix - BP 1629
65016 Tarbes Cedex, France
Ayeley.Tchangani@enit.fr

RESUME : *Le problème considéré dans cette communication est celui de l'établissement d'un model (quantitatif) permettant, étant donné un ensemble d'unités de production (entreprises, usines, banques, établissements universitaires, …), de déterminer les unités qui peuvent être considérées comme des références (ou des benchmarks) en termes d'efficience de production et d'évaluer pour une unité quelconque l'écart qui le sépare des références. Une unité de production est considérée ici comme un centre de transformation qui consomme des ressources (des inputs) de nature différente (information, ressources humaines, énergie, argent, …) pour délivrer des produits (des outputs) de différente nature également (produits manufacturés, services, information, …). Ce problème de référencement ou de benchmarking est donc un problème de classement multicritères (les critères étant les inputs et les outputs) qui nécessite, pour une unité donnée, un calcul de sensibilité afin de savoir quels critères doivent être améliorés pour être aussi performante que la ou les référence(s). Nous nous proposons dans cette communication de modéliser ce problème par les jeux satisfaisants, un processus d'évaluation basé, pour chaque unité de production, sur deux mesures à savoir la sélectabilité (qui mesure en quelque sorte le degré de production de l'unité) et la rejetabilité (qui mesure le degré de consommation des ressources par l'unité). Les unités dont la sélectabilité dépassera la rejetabilité seront considérées comme des unités satisfaisantes ; les benchmarks étant les unités satisfaisantes non dominées. L'avantage essentiel que nous comptons tirer de cette approche par rapport aux différentes méthodes existantes dans la littérature pour traiter des problèmes similaires est la possibilité d'analyse de la sensibilité et la prise en compte d'éventuels avis contradictoires par rapport à l'importance à accorder aux différents critères.*

MOTS-CLES : *Bechmarking, Décision de Groupe, Classement Multicritères, Jeux Satisfaisants, Efficience, AHP.*

1. INTRODUCTION

Le benchmarking ou référencement est une technique qui consiste à comparer une unité de production, en général une entreprise, à d'autres unités considérées comme des références (voir Roux, 2007). On peut distinguer :

- le benchmarking concurrentiel, comparaison par rapport à des unités du même secteur ;
- le benchmarking générique, comparaison par rapport à des unités de secteurs différents afin d'améliorer une ou plusieurs fonctions ;
- le benchmarking interne à des fins de mise en concurrence de plusieurs services d'une même unité.

Dans cette communication le terme unité de production sera un terme générique pour désigner toute entité consommant des ressources (des inputs) pour délivrer des produits au sens large (des outputs).

Le problème de benchmarking considéré dans cette communication est celui du benchmarking concurrentiel (réalisé éventuellement par un analyste indépendant) et consiste à considérer *n* unités de production consommant le même type d'inputs pour produire le même type d'outputs, à déterminer les références, et étant donnée une unité de production qui n'est pas une référence à donner les inputs/outputs à améliorer et de combien. La détermination des références se fera par rapport à l' indicateur *efficience* du diagramme de performance (voir la figure 1), à savoir l'adéquation entre les résultats produits et les moyens ou ressources mis en œuvre (les résultats sont – ils suffisants vu les moyens engagés ?). Les deux autres indicateurs: la *pertinence* (adéquation entre moyens ou ressources engagés et les objectifs) et l'*efficacité* (articulation entre les résultats et les objectifs, à quel point les objectifs fixés ont été atteints) ne sont pas faciles à utiliser compte tenu du fait qu'ils sont en rapport avec la composante *objectifs* qui n'est en général pas facile à définir ni à mesurer.

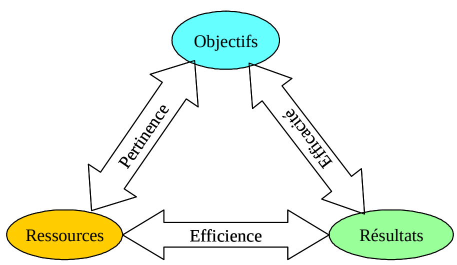

Figure1 : diagramme de performance

Une unité benchmark ou de référence doit non seulement produire au moins autant de résultats qu'elle ne consomme de ressources mais aussi ne pas être dominée en ce sens qu'il n'existe pas d'unités qui produiraient le même résultat avec moins de ressources ou qui produiraient mieux avec les mêmes ressources.

De part la définition de l'unité de production considérée dans cette communication, le Data Envelopment Analysis (DEA), voir (Charnes *et al.*, 1978) est une approche qui peut être et qui est souvent utilisée pour déterminer, pour chaque unité d'un ensemble d'unités données, un indice d'efficience relativement à une unité de référence éventuellement virtuelle dans le cas où les critères sont évaluées numériquement. Mais cette approche a un certain nombre d'inconvénients comme par exemple le fait qu'en choisissant judicieusement les poids à affecter aux critères on peut rendre l'efficience d'une unité égale ou proche de *1* de manière arbitraire, voir par exemple (Tchangani, 2006, 2006a, 2006b) et les références qui s'y trouvent ; ce qui conduit les chercheurs à trouver des méthodes alternatives. De plus cette méthode ne permet pas la prise en compte d'avis multiples or nous pensons que ce contexte est assez fréquent dans les problèmes de benchmarking et ne permet pas non plus une analyse de la sensibilité permettant d'estimer l'écart qui sépare une unité quelconque d'une unité référence.

On peut également utiliser certaines méthodes établies dans le cadre de l'aide multicritères à la décision pour ordonner les unités de production, voir (Brans *et al.*, 1984, 1986 ; Pomerol et Barba-Romero, 1993 ; Roy et Bouyssou, 1993 ; Saaty, 1980 ; Steuer, 1986). Les méthodes d'aide multicritères à la décision qui ont été proposées dans la littérature peuvent être regroupées en deux grandes catégories brièvement décrites ci-dessous.

- *Transformation du problème multicritères en un problème monocritère* : les critères sont agrégés en un seul critère ou certains critères sont transformés en contraintes pour ensuite utiliser les algorithmes d'optimisation monocritère sous contraintes pour résoudre le nouveau problème. L'avantage de cette approche est que des algorithmes et programmes informatiques efficaces, voir par exemple (Teghem, 1996), de résolution des problèmes d'optimisation monocritère existent. L'inconvénient c'est que les procédures d'agrégation ou de transformation des critères en contraintes sont délicates à mener surtout si certains décideurs ou interlocuteurs de l'homme d'étude ou analyste ne sont pas de culture scientifique. Les représentants de cette approche sont principalement l'école nord américaine (Steuer, 1986).
- *Méthodes de sur – classement* : principalement l'œuvre de l'école européenne (Pomerol et Barba-Romero, 1993 ; Roy et Bouyssou, 1993 ; Vincke, 1989) avec des méthodologies comme ELECTRE et PROMETHEE. Elles ont l'avantage de permettre des possibilités de non comparaison entre alternatives mais la procédure de définition des préférences par les décideurs n'est pas toujours simple.

L'approche que nous nous proposons de développer dans cette communication va conduire à un model de benchmarking qui intègre les aspects suivants :

- évaluation de l'adéquation entre production et consommation des ressources de chaque unité et sa performance vis à vis des autres unités ;
- intégration des jugements d'experts ou de décideurs car nous pensons que le problème de benchmarking fait intervenir plusieurs acteurs qui n'ont pas la même sensibilité par rapport à l'importance à accorder à chaque critère ;
- analyse de la sensibilité par rapport à la variation de la valeur des critères afin de pouvoir proposer à une unité non performante ce qu'il faut faire pour améliorer ses performances.

Pour ce faire nous allons utiliser la théorie des jeux satisfaisants (satisficing game theory), voir (Stirling, 2003), comme outil mathématique de base. Cet outil, développé dans le cadre de décision de groupe, de coordination d'agents, principalement en intelligence artificielle, a été utilisé avec succès dans le domaine d'évaluation de performances (Tchangani, 2006, 2006b), de répartition de charges ou de ressources (Tchangani, 2006a) ou encore d'extraction d'objets répondant à certains critères d'une base de données (Tchangani, 2006c). La théorie des jeux satisfaisants est basée sur la notion *d'assez bonnes* unités, alternatives, décisions ou options c'est-à-dire des unités pour lesquelles le « bénéfice » dépasse le « coût » ; la notion de bénéfice et de coût étant représentée par des fonctions masses de sélectabilité et de rejetabilité définies localement par unité. La motivation principale qui nous conduit à utiliser cette théorie dans le cadre du benchmarking est, d'une part le caractère dual qui caractérise les critères (les inputs seront associés au coût et serviront à déterminer la fonction de rejetabilité alors que les outputs serviront à déterminer celle de sélectabilité) et d'autre part la notion même de référence ou benchmark qui veut qu'une unité benchmark produise plus qu'elle ne consomme et produise au moins aussi bien que les autres.

Le reste de la communication est organisée de la manière suivante ; la section 2 présente les bases de la théorie des jeux satisfaisants nécessaires à la tâche que nous nous fixons, pour plus d'information par rapport à cette théorie le lecteur peut consulter (Stirling, 2003) ; la section 3 montre comment le problème de benchmarking peut être modélisé en utilisant les jeux satisfaisants ; dans la section 4, un exemple sera considéré pour montrer les potentialités du modèle construit et enfin une conclusion est présentée à la section 5.

2. JEUX SATISFAISANTS : PRESENTATION

L'objectif principal de cette section est de présenter les outils de la théorie des jeux satisfaisants dont on aura besoin dans la section suivante pour la construction du modèle de benchmarking. Dans sa version la plus simple un jeu satisfaisant est donné par la définition suivante.

Définition 1. *Un jeu satisfaisant consiste en la donnée du triplet* $\langle U, p_S, p_R \rangle$ *où :*

- *U est l'ensemble (discret) des unités, alternatives, décisions ou options, … ;*
- p_S *et* p_R *représentent des fonctions masses définies de U vers l'intervalle [0, 1] ; une fonction p est une fonction masse sur un ensemble discret U si elle a une structure probabiliste c'est-à-dire qu'elle vérifie* $p(u) \geq 0$ *pour tout élément u de U et la somme des p(u) sur U est égale à l'unité.*

Les unités intéressantes qui peuvent être qualifiées de satisfaisantes sont celles pour qui la sélectabilité dépasse la rejetabilité comme l'indique la définition ci-dessous.

Définition 2. *Soit* Σ_q *l'ensemble des unités satisfaisantes par rapport à un indice de prudence ou d'audace q (suivant la valeur de q on autorise plus ou moins d'unités, d'options, d'alternatives ou de décisions à être satisfaisantes), alors on a*

$$\Sigma_q = \{u \in U : p_S(u) \geq q p_R(u)\}. \qquad (1)$$

Mais une unité satisfaisante peut être dominée en ce sens qu'il peut exister une autre unité dont la sélectabilité est au moins plus grande et la rejetabilité plus faible ou dont la rejetabilité est au moins plus faible et la sélectabilité plus grande que la précédente. En définitive, les unités qualifiables « *d'assez bonnes ou des benchmarks* » seront celles qui sont à la fois satisfaisantes et non dominées. Pour les qualifier, appelons *D(u)* l'ensemble des unités qui dominent l'unité *u* ; *D(u)* est alors donné par l'équation (2)

$$D(u) = D_S(u) \cup D_R(u) \qquad (2)$$

où

$$D_S(u) = \{v \in U : p_R(v) < p_R(u) \ et \ p_S(v) \geq p_S(u)\},$$
$$D_R(u) = \{v \in U : p_R(v) \leq p_R(u) \ et \ p_S(v) > p_S(u)\}.$$

Les unités non dominées ainsi que les unités benchmarks sont alors données par la définition suivante.

Définition 3. *On appelle unités équilibres ou unités no dominées, l'ensemble E des unités défini par l'équation (3) suivante*

$$E = \{u \in U : D(u) = \emptyset\}. \qquad (3)$$

L'ensemble B des unités benchmarks ou de références (unités assez bonnes) par rapport à un indice de prudence ou d'audace q est alors donné par l'équation (4)

$$B = \Sigma_q \cap E. \qquad (4)$$

La Figure 2 montre dans le plan *(p_R, p_S)*, la position de l'ensemble Σ_q des unités satisfaisantes (Figure 2 (a)), et pour une unité *u* quelconque l'ensemble *D(u)* des unités qui le dominent (Figure 2 (b)). Une unité non dominée est celle pour laquelle l'espace colorée de la Figure 2 (b) ne contient pas d'autres unités.

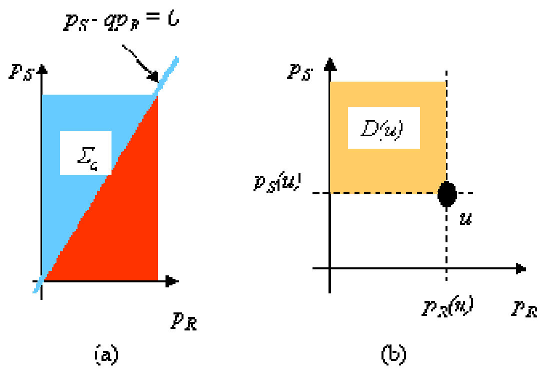

Figure 2 : Représentation dans le plan *(p_R, p_S)* des ensembles Σ_q et *D(u)*

On peut remarquer que l'ensemble *E* des unités équilibres ne peut pas être vide ; en effet cela signifierait que pour toute unité *u*, l'espace colorée de la Figure 2 (b) contiendrait au moins une unité, ce qui est impossible. Si on relie toutes les unités non dominées ou équilibres dans le plan *(p_R, p_S)*, on obtient une courbe (non convexe, étant donné que l'ensemble des unités est discret) au dessus de laquelle il n'y aura pas d'autres unités. L'indice de prudence ou d'audace *q* permet d'ajuster la taille de l'ensemble des unités satisfaisantes: si l'ensemble des unités satisfaisantes est vide, en réduisant cet indice, de nouvelles unités vont être déclarées satisfaisantes; au contraire si trop d'unités sont déclarées satisfaisantes, en augmentant cet indice l'on va réduire leur nombre. La plage de variation nécessaire de cet indice peut être déterminée comme suit : la borne inférieure $q_{\min}$ est la valeur en dessous de laquelle toutes les unités seront déclarées satisfaisantes et est donnée par l'équation (5)

$$p_S(u) \geq q p_R(u), \forall u \in U \Leftrightarrow q \leq q_{\min} = \min_{u \in U}\left(\frac{p_S(u)}{p_R(u)}\right) \qquad (5)$$

alors que la borne supérieure $q_{\max}$ est la valeur au-delà de laquelle aucune unité ne sera déclarée satisfaisante et est donnée par l'équation (6)

$$p_S(u) < q p_R(u), \forall u \in U \Leftrightarrow q > q_{\max} = \max_{u \in U}\left(\frac{p_S(u)}{p_R(u)}\right) \quad (6)$$

Finalement pour toute valeur de l'indice q dans l'intervalle $[q_{\min}, \ q_{\max}]$ on a $\Sigma_q \subseteq U$. Comme l'ensemble E des unités équilibres ne peut pas être vide, on peut toujours ajuster le paramètre q pour avoir au moins une unité benchmark respectant ainsi l'esprit de la théorie des jeux satisfaisants qui privilégie la notion « d'assez bon » plutôt que celle « d'optimal », ce qui permet d'avoir une solution à tout problème quitte à re-voir en baisse ses aspirations. Par rapport à notre problème de benchmarking, la principale tâche va être de définir les fonctions de sélectabilité et de rejetabilité ; cette tâche fera l'objet de la section suivante.

3. MODEL DE BENCHMARKING

Dans cette section nous allons présenter une méthode pour calculer les deux paramètres principaux d'un jeu satisfaisant à savoir les fonctions masses de sélectabilité et de rejetabilité à partir des valeurs des critères et la préférence des acteurs.

3.1. Préparation des données

L'application de la théorie des jeux satisfaisants telle que définie précédemment à la résolution du problème de benchmarking revient à établir une méthode permettant de définir les mesures de sélectabilité et de rejetabilité à partir des données du problème, à savoir les mesures des différents critères et l'opinion des acteurs ou décideurs. Ici le rôle des acteurs va être de fournir à l'analyste leur opinion par rapport à l'importance de chaque critère. Nous considérons que les unités consomment p ressources en entrées pour produire m produits en sortie ; la valeur (numérique ou rendue telle par une procédure quelconque) de la ressource i et du produit j pour l'unité u sont données par *I(u,i)* et *O(u,j)* respectivement. On demandera ainsi à chaque acteur k de fournir les poids α_{kj} (dans une certaine échelle) pour j parcourant l'ensemble des produits ; α_{kj} sera d'autant plus grand que l'acteur k considère que la participation du critère j à la sélectabilité est importante. De même chaque acteur k fournit les poids β_{kj} pour j parcourant l'ensemble des ressources ; β_{kj} sera d'autant plus grand que l'acteur k considère que la participation du critère j à la rejetabilité est importante. La détermination des pondérations α_{kj} et β_{kj} des critères par les acteurs peut s'avérer délicat surtout pour ceux des acteurs qui n'ont pas une culture scientifique. Pour les aider dans cette tâche des méthodes formalisées existent. Une de ces méthodes est la méthode AHP (Analytic Hierarchy Process), voir (Saaty, 1980) qui est largement utilisée dans des problèmes de décision multicritères et en particulier pour les problèmes où les critères ne sont pas mesurables numériquement. Une version simplifiée de cette méthode pour la détermination des pondérations α_{kj} et β_{kj} est la suivante : on demande à chaque acteur k de choisir un critère pivot c_p (pour chaque catégorie de critères) et de compléter le tableau suivant (Table 1)

Critères	Critère pivot, c_p
….	…
c_i	v_{ip}^k
…	…

Table 1 : Poids de comparaison inter critères

en donnant une note v_{ip}^k (importance relative du critère c_i par rapport au critère pivot c_p selon l'acteur *k*) sur une échelle de 1 à 9 dont la signification est donnée par la Table 2.

Importance relative	v_{ip}^k
Egalement important	1
Modérément plus important	3
Fortement plus important	5
Très fortement plus important	7
Extrêmement plus important	9

Table 2 : Echelle de comparaison inter critères de même catégorie

Les notes 2, 4, 6 et 8 représentent les opinions intermédiaires. A partir des notes v_{ip}^k, l'analyste construit pour chaque acteur k une matrice consistante[1] A^k de comparaison inter critères de produits (outputs) de la manière suivante : $A_{ip}^k = v_{ip}^k$, $A_{pi}^k = \dfrac{1}{v_{ip}^k}$; les autres coefficients se déduisent en appliquant la règle $A_{il}^k = A_{ij}^k A_{jl}^k$. Une matrice consistante B^k de comparaison inter critères de ressources (inputs) sera définie de la même manière. Les poids α_{kj} et β_{kj} sont alors donnés par l'équation (7) suivante.

$$\alpha_{kj} = \frac{1}{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{A_{jl}^k}{\sum_{t=1}^{m} A_{tl}^k}\right) et\ \beta_{kj} = \frac{1}{p}\sum_{l=1}^{p}\left(\frac{B_{jl}^k}{\sum_{t=1}^{p} B_{tl}^k}\right). \quad (7)$$

[1] Une matrice A est consistante si elle vérifie: $A_{ii} = 1, A_{ji} = \dfrac{1}{A_{ij}}\ et\ A_{ik} = A_{ij} A_{jk}$.

Ces poids sont ensuite agrégés pour obtenir les poids ω_j^S pour les outputs et ω_j^R pour les inputs comme donnés par l'équation (8)

$$\omega_j^S = \frac{\sum_{k=1}^{d} \alpha_{kj}}{\sum_j \sum_{k=1}^{d} \alpha_{kj}}, \qquad \omega_j^R = \frac{\sum_{k=1}^{d} \beta_{kj}}{\sum_j \sum_{k=1}^{d} \beta_{kj}}. \tag{8}$$

Les poids ω_j^S et ω_j^R mesurent l'importance globale que les acteurs accordent au critère correspondant ; ces poids sont ensuite organisés sous forme de vecteurs (lignes) donnés par l'équation (9)

$$\omega^S = [\omega_1^S \quad \omega_2^S \quad \ldots \quad \omega_m^S], \qquad \omega^R = [\omega_1^R \quad \omega_2^R \quad \ldots \quad \omega_p^R] \tag{9}$$

Ensuite, on normalise les valeurs des critères comme suit, voir l'équation (10)[2]

$$O_n(u,i) = \frac{O(u,i)}{\max_{v\in U} O(v,i)}, \qquad I_n(u,i) = \frac{I(u,i)}{\max_{v\in U} I(v,i)} \tag{10}$$

qu'on organise également en vecteurs (colonnes) donnés par l'équation (11)

$$O_n(u) = [O_n(u,1) \quad O_n(u,2) \quad \ldots \quad O_n(u,m)]^T, \qquad I_n(u) = [I_n(u,1) \quad I_n(u,2) \quad \ldots \quad I_n(u,p)]^T \tag{11}$$

où x^T signifie le vecteur transposé de x. Une procédure de normalisation des critères avant pondération est nécessaire car ils sont en général évalués dans des unités et échelles différentes. Les fonctions $g_S(u)$ et $g_R(u)$ pour chaque unité $u \in U$ qui agissent dans le sens de la sélectabilité ou de la rejetabilité de u sont alors données par l'équation (12)

$$g_S(u) = \omega^S O_n(u) \text{ et } g_R(u) = \omega^R I_n(u)\,. \tag{12}$$

La définition suivante donne alors les paramètres nécessaires de la théorie des jeux satisfaisants c'est-à-dire les fonctions masses de sélectabilité et de rejetabilité.

[2] Une autre possibilité de normalisation peut être :

$$O_n(u,i) = \frac{O(u,i) - \min_{v\in U} O(v,i)}{\max_{v\in U} O(v,i) - \min_{v\in U} O(v,i)}$$

et $I_n(u,i) = \dfrac{I(u,i) - \min_{v\in U} I(v,i)}{\max_{v\in U} I(v,i) - \min_{v\in U} I(v,i)}$

Définition 4. *Les fonctions de sélectabilité et de rejetabilité pour le problème de benchmarking sont données par l'équation (13)*

$$p_S(u) = \frac{g_S(u)}{\sum_{x\in U} g_S(x)}, \qquad p_R(u) = \frac{g_R(u)}{\sum_{x\in U} g_R(x)}. \tag{13}$$

Une question qu'on peut se poser à ce stade est celle de la cohérence de cette méthode : si une unité consomme plus de ressources pour produire moins qu'une autre, est – il possible qu'elle soit déclarée assez bonne c'est à dire une unité équilibre satisfaisante ? Considérons la définition suivante qui formalise cette idée.

Définition 5. *Une unité $u \in U$ domine une autre unité $v \in U$, noté $u \succ v$, si et seulement si les inégalités (14) suivantes sont vraies, avec au moins une stricte.*

$$O(u,i) \ge O(v,i),\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad I(u,j) \le I(v,j),\ j = 1, 2, \ldots, p. \tag{14}$$

La proposition suivante prouve la cohérence de l'approche de détermination des fonctions masses de sélectabilité et de rejetabilité.

Proposition. Soient u et v deux unités alors $u \succ v \Rightarrow u \in B(v)$ et donc $v \notin E$ c'est-à-dire que v ne peut pas être une unité équilibre.

Preuve. $u \succ v \Rightarrow O_n(u,i) \ge O_n(v,i) \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$ et $0 \le I_n(u,j) \le I_n(v,j),\ j = 1, 2, \ldots, p$ avec au moins une inégalité stricte et comme $\omega_l^S \ge 0,\ \omega_l^R \ge 0$, on a $g_S(u) \ge g_S(v)$ *et* $g_R(u) \le g_R(v)$ et finalement $p_S(u) \ge p_S(v)$ *et* $p_R(u) \le p_R(v)$ avec au moins une inégalité stricte donc $u \in B(v)$ c'est-à-dire que $B(v) \ne \varnothing$ et donc que v n'est pas une unité équilibre.

On peut maintenant entreprendre l'analyse du problème de benchmarking.

3.2. Analyse du problème de benchmarking

Les informations nécessaires à l'analyse du problème de benchmarking sont résumées par les ensembles Σ_q, E et B ainsi que l'ensemble $D(u)$ pour chaque unité.

- Les unités de l'ensemble B sont les unités de référence (les benchmarks) car elles utilisent bien leurs ressources et il n'y a pas d'autres unités qui le font mieux qu'elles.

- Σ_q contient les unités qui utilisent bien leurs ressources mais pas nécessairement de la meilleur façon car il peut en exister d'autres qui font mieux avec les mêmes ressources. Si une unité u n'est pas dans cet ensemble ($u \notin \Sigma_q$), il peut être intéressant de lui montrer ses points faibles et de calculer de combien elle doit améliorer ces points pour devenir satisfaisante si toutes les autres unités n'ont pas changé leur comportement. Pour cela nous proposons de faire une étude de sensibilité en déterminant les paramètres

$$\delta_u^i \geq 0, i = 1, 2, .., m \text{ et } \gamma_u^i \geq 0, i = 1, 2, .., p,$$

tels que si on remplace $O_n(u,i)$ et $I_n(u,i)$ par $O_n(u,i) + \delta_u^i$ et $I_n(u,i) - \gamma_u^i$ respectivement en respectant les conditions (15)

$$\begin{aligned} 0 < O_n(u,i) + \delta_u^i \leq 1 \\ 0 < I_n(u,i) - \gamma_u^i \leq 1 \end{aligned} \tag{15}$$

alors on aura l'inéquation (16)

$$p_S(u) \geq q p_R(u). \tag{16}$$

Ces paramètres peuvent être déterminés en résolvant le problème de programmation non linéaire (17) suivant.

$$\min_{\delta_u, \gamma_u} 0 \quad s.c. \quad \begin{cases} C_O(\delta_u) \geq q C_I(\delta_u) \\ \varepsilon_O \leq O_n(u) + \delta_u \leq 1, \ \delta_u \geq 0 \\ \varepsilon_I \leq I_n(u) - \gamma_u \leq 1, \ \gamma_u \geq 0 \end{cases} \tag{17}$$

où

$$\begin{aligned} \delta_u &= \begin{bmatrix} \delta_u^1 & \delta_u^2 & \dots & \delta_u^m \end{bmatrix}^T \\ \gamma_u &= \begin{bmatrix} \gamma_u^1 & \gamma_u^2 & \dots & \gamma_u^p \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Le 1 et le 0 (de la deuxième partie) de l'équation (17) sont en fait des vecteurs (de dimensions *m* ou *p*) dont toutes les composantes sont des 1 respectivement des 0 ; de même les ε_O et ε_I sont des vecteurs de dimensions compatibles ; *s.c.* signifie sous contraintes et enfin les fonctions non linéaires $C_O(\delta_u)$ et $C_I(\gamma_u)$ sont données par l'équation (18).

$$\begin{aligned} C_O(\delta_u) &= \frac{\omega^S (O_n(u) + \delta_u)}{\sum_{v \in U, v \neq u} \omega^S O_n(v) + \omega^S (O_n(u) + \delta_u)}, \\ C_I(\gamma_u) &= \frac{\omega^R (I_n(u) - \gamma_u)}{\sum_{v \in U, v \neq u} \omega^R I_n(v) + \omega^R (I_n(u) - \gamma_u)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Notons que la formulation du programme (17) est très général et que d'autres contraintes peuvent être ajoutées pour tenir compte des préoccupations pratiques comme par exemple la distribution uniforme de l'effort entre les critères ou au contraire la concentration de l'effort sur un nombre restreint de critères. Cette analyse est très indiquée pour les unités de l'ensemble E - B (les unités qui sont des équilibres mais n'assurant pas une adéquation entre le niveau de consommation de ressources et le niveau de production); $\frac{\delta_u^i}{O_n(u,i)}$ et $\frac{\gamma_u^i}{I_n(u,i)}$ représentent les proportions d'augmentation des produits ou de réduction de la consommation des ressources à opérer pour rendre une telle unité satisfaisante.

- Les ensembles $D(u)$ renferment une information importante qui peut être exploitée pour l'amélioration des performances ; en effet si $u^* \in D(u)$, en observant les conditions dans lesquelles opère l'unité u^*, on peut trouver les raisons de la faiblesse de l'unité u surtout pour les unités de l'ensemble $\Sigma_q - B$ c'est à dire les unités qui sont satisfaisantes mais pas des équilibres. Une procédure d'analyse de sensibilité similaire à celle du point précédent peut être mise en place pour déterminer de combien l'unité u doit améliorer ces critères pour devenir aussi bonne que l'unité u^*. Pour cela on calcule les paramètres $\delta_u^{u^*}$ et $\gamma_u^{u^*}$ (définis comme les paramètres δ_u et γ_u du point précédent respectivement) tels que les équations (19) soient vérifiées.

$$\begin{aligned} p_S(u) &= \frac{\omega^S (O_n(u) + \delta_u^{u^*})}{\sum_{v \in U, v \neq u} \omega^S O_n(v) + \omega^S (O_n(u) + \delta_u^{u^*})} = p_S(u^*) \\ p_R(u) &= \frac{\omega^R (I_n(u) - \gamma_u^{u^*})}{\sum_{v \in U, v \neq u} \omega^R I_n(v) + \omega^R (I_n(u) - \gamma_u^{u^*})} = p_R(u^*) \end{aligned} \tag{19}$$

en résolvant un problème de programmation linéaire donné par l'équation (20).

$$\min_{\delta_u^{u^*}, \gamma_u^{u^*}} 0$$

$$s.c. \quad \begin{cases} \omega^S \delta_u^{u^*} = \dfrac{p_S(u^*)\left(\sum_{v \in U} \omega^S O_n(v)\right) - \omega^S O_n(u)}{1 - p_S(u^*)} \\ \omega^R \gamma_u^{u^*} = -\dfrac{p_R(u^*)\left(\sum_{v \in U} \omega^R I_n(v)\right) - \omega^R I_n(u)}{1 - p_R(u^*)} \\ \varepsilon_O \leq O_n(u) + \delta_u^{u^*} \leq 1, \ \delta_u^{u^*} \geq 0 \\ \varepsilon_I \leq I_n(u) - \gamma_u^{u^*} \leq 1, \ \gamma_u^{u^*} \geq 0 \end{cases} \tag{20}$$

- L'ensemble $U - \Sigma_q \cup E$ contient les unités complètement inefficientes car elles utilisent mal leurs ressources ; pour ces unités on peut appliquer les deux analyses précédentes soit de manière locale afin que leur production soit en adéquation avec leur consommation de ressources soit par comparaison aux unités qui les dominent.

Remarque. Il est à noter que les problèmes (17) et (20) sont mathématiquement mal posés (possibilité d'infinité de solutions); en ajoutant d'autres contraintes comme une distribution uniforme des paramètres δ_u et γ_u ou δ_u^{u*} et γ_u^{u*}, ou encore des bornes inférieures et/ou supérieures pour ces paramètres on peut rendre ces problèmes mathématiquement bien posés.

3.3 Commentaires

L'indice de prudence ou d'audace q permet aux acteurs de moduler leur niveau d'aspiration; si très peut d'unités sont déclarées satisfaisantes pour un indice q, les acteurs peuvent décider de réduire leur niveau d'aspiration en réduisant q ; au contraire si trop d'unités sont déclarées satisfaisantes, on peut augmenter cet indice pour réduire leur nombre. Cette procédure peut être programmée afin de faire varier q en partant de q_{min} jusqu'à ce que le nombre d'unités de référence que l'on souhaite considérer soit atteint. Ce nombre dépendra du problème considéré et de la préférence des acteurs, un travail préliminaire à l'utilisation du modèle. L'analyse de la sensibilité fournit une information importante pour d'autres activités comme la négociation : supposons par exemple que l'ensemble U soit constitué de fournisseurs d'une entreprise, cette entreprise peut utiliser cette analyse pour les mettre en concurrence et ces derniers en utilisant également cette analyse sauront sur quels points insister. On peut remarquer que l'approche présentée dans cette communication a les points forts suivants :

- elle est facile à comprendre et à intégrer dans les outils (informatiques) d'aide à la décision ;
- les préférences des acteurs sont exprimés de manière locale par rapport aux critères indépendamment de leur valeur (numérique);
- la connaissance, pour une unité dominée, de l'ensemble des unités qui la dominent permet d'analyser les points faibles de cette dernière ;
- l'analyse de la sensibilité fournit une information importante pour l'aide à la décision ;
- elle ne nécessite pas de puissance de calcule énorme même pour des problèmes de taille importante.

On peut néanmoins lui relever les points faibles suivants :

- il est nécessaire de normaliser les données de départ et donc il peut se poser le problème d'échelle de normalisation ;
- les fonctions masses de sélectabilité et de rejetabilité ne représentent rien de palpable pour une unité, étant issues d'une agrégation ;
- l'expression des préférences des acteurs à travers des pondérations peut ne pas être aisée même si l'approche AHP peut contribuer énormément à cela.

Dans la section suivante, nous allons appliquer cette approche à un cas concret d'évaluation de dépôts.

5. APPLICATION

Une large organisation de grossistes qui livre des produits aux supermarchés est constituée de 20 dépôts qu'on souhaite évaluer, voir (Emrouznejad, 1995). Les ressources des dépôts sont constituées du stock (**St**) mesuré en millions d'unités monétaires et du coût de fonctionnement, essentiellement les salaires (**Sl**) mesuré en centaines de milliers d'unités monétaires. Les produits ou outputs sont constitués du niveau d'activité en termes de nombre de livraisons aux supermarchés (**Li**, en centaines), le nombre de réception (**Rc**, en milliers) de chez les fournisseurs et le nombre de relances de demandes (**De**, en milliers) chez les fournisseurs quand il y a ou en approche de rupture de stock. Les données de ce problème sont données par le tableau suivant (Table 3).

dépôts	**St**	**Sl**	**Li**	**Rc**	**De**
#01	3	5	40	55	30
#02	2.5	4.5	45	50	40
#03	4	6	55	45	30
#04	6	7	48	20	60
#05	2.3	3.5	28	50	25
#06	4	6.5	48	20	65
#07	7	10	80	65	57
#08	4.4	6.4	25	48	30
#09	3	5	45	64	42
#10	5	7	70	65	48
#11	5	7	45	65	40
#12	2	4	45	40	44
#13	5	7	65	25	35
#14	4	4	38	18	64
#15	2	3	20	50	15
#16	3	6	38	20	60
#17	7	11	68	64	54
#18	4	6	25	38	20
#19	3	4	45	67	32
#20	5	6	57	60	40

Table 3: données du problème

L'application de l'approche DEA, voir (Emrouznejad, 1995), à ce problème donne les résultats de la quatrième colonne de la Table 4 qui montre que les dépôts relativement efficients sont les dépôts #12, #14, #15 et #19 qui ont un degré d'efficience de 1. En observant bien on peut remarquer que le dépôt #14 est déclaré efficient simplement à cause du fort rapport entre sa performance en demandes et ses consommations de ressources (un des inconvénients de la méthode DEA) et ceci va être révélé par notre approche. En appliquant l'approche considérée dans cette communication avec la condition que tous les critères sont de même importance, on obtient les résultats des colonnes 2 et 3 de la table 4 comme fonction masse de sélectabilité et de rejetabilité respectivement et donc les ensembles Σ, E *et* B pour un indice de prudence de 1 ($q = 1$) sont donnés par

Σ = {01, 02, 05, 09, 10, 12, 14, 15, 16, 19, 20},

E = {02, 05, 07, 09, 10, 12, 15, 19, 20},

B = {02, 05, 09, 10, 12, 15, 19, 20}.

dépôts	p_S	p_R	**DEA**
#01	0.0466	0.0394	0.82
#02	0.0503	0.0342	0.94
#03	0.0476	0.0498	0.82
#04	0.0476	0.0666	0.65
#05	0.0387	0.0289	0.95
#06	0.0496	0.0519	0.83
#07	0.0744	0.0852	0.71
#08	0.0389	0.0540	0.52
#09	0.0565	0.0394	0.96
#10	0.0675	0.0603	0.89
#11	0.0561	0.0603	0.63
#12	0.0480	0.0290	1.00
#13	0.0450	0.0603	0.83
#14	0.0452	0.0417	1.00
#15	0.0321	0.0249	1.00
#16	0.0443	0.0435	0.91
#17	0.0689	0.0892	0.55
#18	0.0310	0.0498	0.42
#19	0.0537	0.0354	1.00
#20	0.0581	0.0562	0.84

Table 4: Résultats

- L'ensemble *E* - *B* est réduit au dépôt #07 (voir Figure 3); ce qui signifie que même s'il n'y a pas de dépôt qui domine ce dépôt, il peut mieux faire. En appliquant le problème d'optimisation (17) à ce dépôt nous obtenons les résultats suivants pour les paramètres δ_{07} et γ_{07} :

  $\delta_{07} = [0.00 \quad 0.03 \quad 0.06]^T$ et $\gamma_{07} = [0.11 \quad 0.11]^T$.

  Donc, comme $O_n(07) = [1.00 \quad 0.97 \quad 0.88]^T$ et $I_n(07) = [1.00 \quad 0.91]^T$, si le dépôt #07 augmente ses réceptions et ses demandes de 3.08 % et 7.10 % et réduit sa consommation de ressources par 10.51 % et 11.56 % respectivement, il devient satisfaisant à condition que les autres dépôts restent inchangés.

- On a *Σ – B = {01, 14, 16}* (voir Figure 3) avec

  D(01) = {02, 09, 12, 19},
  D(14) = {01, 02, 09, 12, 19},
  D(16) = {01, 02, 09, 12, 14, 19},

  les dépôts qui dominent les dépôts #01, #14 et #16 respectivement (voir Figure 3). Ce qui signifie que même si les dépôts #01, #14 et #16 ont individuellement une performance satisfaisante, ils ne sont pas très bons car il y a des dépôts qui peuvent faire mieux dans les mêmes conditions. Pour chacun de ces dépôts, en résolvant le programme linéaire (20), on obtient les résultats donnés dans les tables suivantes (Tables 5 à 7).

u*=	#02	#09	#12
δ_{01}^{u*}	$\begin{bmatrix}0.0663\\0.0073\\0.0767\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.1785\\0.0273\\0.1972\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0202\\0.0132\\0.0241\end{bmatrix}$
γ_{01}^{u*}	$\begin{bmatrix}0.0568\\0.0641\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0002\\0.0000\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.1152\\0.1250\end{bmatrix}$

Table 5 : Paramètres pour l'amélioration des performances de l'unité *#01*

u*=	#01	#02	#12	#19
δ_{14}^{u*}	$\begin{bmatrix}0.0084\\0.0344\\0.0152\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0669\\0.1252\\0.0154\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.0296\\0.0695\\0.0153\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.1270\\0.2068\\0.0119\end{bmatrix}$
γ_{14}^{u*}	$\begin{bmatrix}0.0349\\0.0194\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.1155\\0.0591\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.1853\\0.1085\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.1017\\0.0453\end{bmatrix}$

Table 6 : Paramètres pour l'amélioration des performances de l'unité *#14*

u*	#01	#02	#09	#12	#14	#19
δ_{16}^{u*}	$\begin{bmatrix}0.02\\0.05\\0.03\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.09\\0.14\\0.01\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.20\\0.29\\0.003\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.04\\0.08\\0.02\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.00\\0.01\\0.02\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.15\\0.22\\0.01\end{bmatrix}$
γ_{16}^{u*}	$\begin{bmatrix}0.04\\0.06\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.09\\0.13\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.02\\0.07\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.14\\0.19\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.02\\0.02\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.07\\0.12\end{bmatrix}$

Table 7 : Paramètres pour l'amélioration des performances de l'unité *#16*

- Le reste des résultats sont donnés ci-dessous (voir également la Figure 3).

  $U - \Sigma \cup B = \{03, 04, 06, 08, 11, 13, 17, 18\}$ avec

  D(03) = {02, 09, 12, 19},
  D(04) = {02, 06, 9, 10, 11, 12, 19, 20},
  D(06) = {02, 09, 19},
  D(08) = {01, 02, 03, 06, 09, 12, 14, 16, 19},
  D(11) = {09, 10, 20},
  D(13) = {01, 02, 03, 06, 09, 10, 11, 12, 14, 19, 20},
  D(17) = {07},
  D(18) = {01, 02, 03, 05, 09, 12, 14, 15, 16, 19}.

En comparaison avec l'approche DEA, nous pouvons remarquer que tous les dépôts déclarés relativement efficients par l'approche DEA sont des dépôts benchmarks par notre approche à l'exception du dépôt #14 qui est dominé par les dépôts #01, #02, #12 et #19. Ce dernier cas est dû au fait que dans l'approche DEA en mettant le maximum de poids au troisième output où le dépôt #14 est très bien placé par rapport à sa consommation de ressources, il devient efficient. La Figure 3 montre la représentation graphique dans le plan *(p_R, p_S)* de l'analyse précédente. Cette visualisation est intéressante à des fins de communication et surtout de la recherche des proximités entre unités non benchmarks et unités benchmarks, ce qui peut permettre une meilleure formulation des problèmes (17) et/ou (20). On voit par exemple qu'il suffirait que les dépôts #01, #14 et #16 fassent aussi bien que le dépôt le plus proche d'eux c'est-à-dire le dépôt #02 pour devenir des benchmarks.

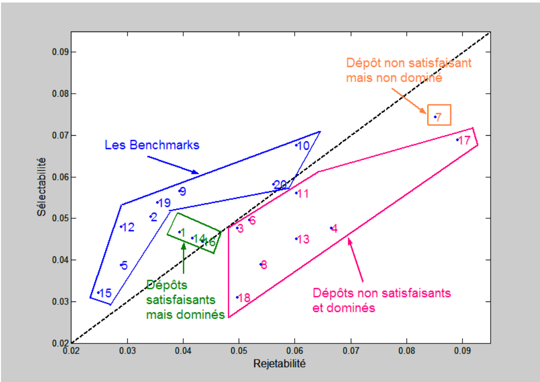

Figure 3 : Représentation de l'analyse du problème d'évaluation des dépôts dans le plan *(p_R, p_S)*

6. CONCLUSION

Une méthode de benchmarking ou de référencement des unités de production (au sens large) consommant plusieurs ressources pour délivrer plusieurs produits a été présentée dans cette communication. Cette méthode qui intègre des opinions (éventuellement contradictoires) de différents acteurs dans l'évaluation de l'adéquation entre la consommation des ressources et le niveau de production d'un certain nombre d'unités de production a pour outil mathématique de base la théorie des jeux satisfaisants, une méthode d'évaluation qui se base sur la notion d'assez bonne unité ou satisfaisante plutôt que sur la notion d'unité optimale. L'apport principal de cette communication est d'avoir établi une procédure de calcul des fonctions masses de sélectabilité et de rejetabilité, pierres angulaires dans l'application de cette théorie, à partir des performances réalisées par les unités dans chaque critère et de l'opinion des acteurs en termes de pondération des critères. Un autre crédit qui peut être accordé à l'approche établie dans cette communication est celui d'offrir un cadre d'analyse de la sensibilité qui permet de détecter pour une unité qui n'est pas une référence, les raisons de sa faiblesse et de déterminer de combien elle doit améliorer ses performances afin de le devenir. Le problème de benchmarking est alors organisé en deux étapes : (1) on détermine les unités considérées comme des benchmarks et (2) on détermine les améliorations à entreprendre pour devenir des benchmarks pour les unités qui ne le sont pas. L'application de cette approche à un cas concret de problème d'évaluation de performances a montré un avantage certain par rapport à des méthodes comme le data envelopment analysis (DEA). Le problème de benchmarking étant un cas particulier de décision ou de classement multicritères, cette méthode peut être utilisée ou adaptée pour des problèmes de cette nature.

REFERENCES

Brans J.P., Mareschal B. and Vincke Ph., 1984. *PROMOTHE: A new family of outranking methods in multi-criteria analysis*, in Brans J.P. (Ed), Operational Research, North Holland, pp. 477-490.

Brans J.P., Mareschal B. and Vincke Ph., 1986. *How to select and how to rank projects: the PROMETHE method*, European Journal of Operational Research, Vol. 24, pp. 228-238.

Charnes A., Cooper W. W., and Rhodes E., 1978. *Measuring the efficiency of decision making units*, European Journal of Operational Research, 2, 429-444.

Emrouznejad A., 1995. http://www.deazone.com/

Ignizio J.P., 1976. Goal programming and extensions, Lexington Books, Lexington, MA.

Jensen F.V., 1999. *Lecture Notes on Bayesian Networks and Influence Diagrams*, Dpt. of Computer Science, Aalborg University.

Pomerol J.-C. and Barba-Romero S., 1993. *Choix multicritère dans l'entreprise, principe et pratique*, Hermes, Paris.

Roux D., 2007. *Les 100 mots de la gestion*, Que sais-je ?, PUF.

Roy B. and Bouyssou D., 1993. *Aide Multicritere a la Decision: Methodes et Cas*, Edition Economica.

Salminen P., Hokkanen J. and Lahdelma R., 1996. *Muticriteria Decision Analysis Project on Environmental Problems*, Report 5/1996, Department of Mathematics, Laboratory of Scientific Computing, University of Jyväskylä.

Saaty T., 1980. *The Analytic Hierarchy Process*, John Wiley, New York.

Steuer R.E., 1986. *Muticriteria Optimization: Theory, Computation, and Application*, Wiley, New York.

Stirling W.C., 2003. *Satisficing Games and Decision Making: With Applications to Engineering and Computer Science*, Cambridge University.

Tchangani A.P., 2006. *SANPEV: a **S**atisficing **A**nalytic **N**etwork **P**rocess framework for **E**fficiency e**V**aluation of alternatives*, Foundations of Computing and Decision Sciences Journal, **Vol. 31, No. 3-4**, pp. 291-319.

Tchangani A.P., 2006a. *Multiple Objectives and Multiple Actors Load/Resource Dispatching or Priority Setting: Satisficing Game Approach*, AMO – Advanced Modeling and Optimization: An Electronic International Journal, **Vol. 8, No. 2**, pp. 111 – 134**.**

Tchangani A.P., 2006b. *A Satisficing Game Theory Approach for Group Evaluation of Production Units*, Decision Support Systems, **Vol. 42, No. 2**, pp. 778-788.

Tchangani A.P., 2006c. *A Satisficing Game Theoretic Framework for Retrieving Relevant Objects from a Database,* International Journal of Computers, Systems and Signals, **Vol. 7, No. 2**, pp. 18 – 29.

Teghem J., 1996. *Programmation Linéaire*, Editions de l'Université de Bruxelles.

Vincke Ph., 1989. *L'aide multicritere a la décision*, Editions de l'Université Libre de Bruxelles.