

VERS UNE NOUVELLE METHODE DE SYNTHESE DE COMMANDE DES SYSTEMES A CONTRAINTES DE TEMPS

P. BONHOMME

Université François-Rabelais de Tours
Laboratoire d'Informatique (LI)
64 avenue Jean Portalis
37200 Tours cedex
bonhomme@univ-tours.fr

RÉSUMÉ : *Les Réseaux de Petri constituent un formalisme puissant et reconnu pour la spécification et la vérification de systèmes concurrents, tels que les systèmes séquentiels et les systèmes de production manufacturière. Afin de prendre en compte de manière efficace le facteur temps, de nombreux modèles ont vu le jour, chacun étant dédié à un domaine particulier d'application. Dans cet article une nouvelle méthode de synthèse de commande pour les réseaux de Petri temporels est développée. Elle est basée sur la notion d'instants de tir et consiste à déterminer un système d'inégalités linéaires, obtenu pour une possible évolution du réseau autonome sous-jacent au réseau temporel considéré. Ce système peut alors être utilisé pour évaluer les performances d'un fonctionnement spécifique, vérifier l'accessibilité de marquages particuliers mais aussi pour synthétiser une commande répondant à des spécifications désirées. De plus, l'approche n'est pas restreinte à des sous-classes de réseaux ou à des réseaux saufs (ou T-saufs).*

MOTS-CLES : *Réseaux de Petri, systèmes à événements discrets, commande, évaluation de performances*

1. INTRODUCTION

Les réseaux de Petri (RdP) (David et Alla, 1994), (Murata, 1989), (Brams, 1983) sont reconnus pour être un outil efficace et performant pour la modélisation et l'analyse des systèmes à événements discrets asynchrones exhibant des phénomènes de concurrence. A l'origine, développé comme un modèle causal où le facteur temps n'était pas pris en considération, ils ont été étendus et adaptés de diverses manières afin de répondre aux spécifications propres à différents champs d'application (Roux et Déplanche, 2002), (Boucheneb et Berthelot, 1993), (Khansa et al., 1996), (Merlin et Farber, 1976).

Tout particulièrement, pour les systèmes dont les fonctionnalités sont définies en fonction des aspects temporels (Calvez et al. 2004), et dont la validité ne peut être prouvée qu'en prenant en considération le facteur temps, les réseaux de Petri ont été enrichis de deux paramètres représentant un délai minimum et un délai maximum. Pour le modèle de Merlin, communément appelé modèle t-temporel (Merlin et Farber, 1976), (t-RdP), ces délais constituent l'intervalle de tir associé à chaque transition du réseau (à une validation près). Afin d'assurer un comportement admissible pour cette classe de systèmes il est alors nécessaire de disposer de méthodes formelles afin de représenter et d'analyser leur validité.

Un grande partie des techniques de synthèse de commande des réseaux de Petri temporels est basée sur l'algèbre linéaire et elles sont souvent restreintes à des sous-classes de réseaux exhibant des propriétés particulières

(graphes d'événements, machines à états, réseaux à choix libre, etc ...).

Dans cet article, une nouvelle méthode de synthèse de commande est introduite. Elle est basée sur l'analyse de la structure du réseau de Petri temporel et plus particulièrement sur l'ensemble des séquences de tir réalisables sur le réseau autonome sous-jacent au réseau temporel étudié. De plus, elle apparaît comme une approche générale, non restreinte à une sous-classe particulière de RdP et s'appliquant aussi à des réseaux non saufs. Ainsi, elle conduira à la détermination d'un système d'inéquations généré pour une possible évolution du réseau autonome sous-jacent. Ce système permettra alors l'évaluation des performances et la synthèse d'une commande pour un fonctionnement désiré du modèle temporel.

En substance, le système d'inéquations obtenu est écrit une unique fois, pouvant alors l'être pour des valeurs symboliques, ainsi un changement des contraintes temporelles n'induit aucune modification de sa forme et l'existence de solution (ou non) permet de répondre à des questions concernant l'accessibilité de marquages particuliers.

L'article est organisé de la manière suivante : une définition formelle des réseaux de Petri temporels est donnée dans le paragraphe qui suit. La troisième partie rappelle les fondements nécessaires à la compréhension de l'approche proposée, originellement développée dans un souci de simulation exhaustive. La méthode est présentée dans le paragraphe quatre et un exemple illustratif

consistant en la supervision d'une commande distribuée sur plusieurs automates programmables industriels (API) est présenté au paragraphe cinq.

Pour finir, le dernier paragraphe est réservé aux conclusions et dévoile aussi quelques pistes concernant des développements futurs.

2. RÉSEAUX DE PETRI TEMPORELS

La définition formelle d'un réseau de Petri P-temporel (Khansa *et al.*, 1996) est donnée par une paire $\langle N; I \rangle$ avec :

N un réseau de Petri marqué (Brams, 1983)

$$P \rightarrow (Q^+ \cup \{0\}) \times (Q^+ \cup \{\infty\})$$

$$p_i \rightarrow I_i = [a_i, b_i] \text{ avec } 0 \leq a_i \leq b_i$$

où :

P : l'ensemble des places du réseau N ,

Q^+ : l'ensemble des nombres positifs rationnels.

I_i représente l'intervalle statique des durées opératoires d'un jeton dans la place p_i .

Un jeton contenu dans une place p_i participera à la validation des transitions de sortie de cette place si il y a séjourné au minimum a_i unités de temps et si sa durée de séjour ne dépasse pas b_i . En conséquence, le jeton doit quitter la place p_i au plus tard, quand sa durée opératoire devient égale à b_i . Après cette durée b_i , le jeton sera considéré comme «mort» et il ne pourra plus participer à la validation de transitions. Il peut être noté qu'un jeton mort n'est pas retiré de sa place et que son état indique qu'une contrainte temporelle a été violée.

La particularité de ce modèle conduit à la nécessité de disposer de techniques d'analyse permettant de considérer, de manière efficace, les différentes fonctionnalités du système modélisé aussi bien que ses caractéristiques temporelles. De plus, la politique qui consisterait à franchir les transitions dès que ces dernières deviennent franchissables (fonctionnement au plus tôt) n'est pas toujours réalisable et conduit dans la plupart des cas à la mort de certaines marques. Une approche de commande s'avère donc plus que nécessaire.

Le paragraphe qui suit est consacré à la notion d'instant de tir (Bonhomme *et al.*, 2001).

3. INSTANT DE TIR

Définition (Boucheneb et Berthelot, 1993): à chaque transition franchie notée t_j sera associé le $j^{\text{ème}}$ instant de tir x_j (i.e. la séquence considérée est $t_1 t_2 t_3 \dots t_q$). La variable décisionnelle x_i représentera alors le temps écoulé entre le $(i - 1)^{\text{ème}}$ et le $i^{\text{ème}}$ instant de tir.

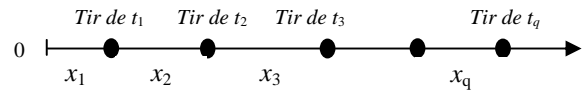


Figure 1. Illustration des instants de tir

Par exemple sur la Figure 1, $(x_2 + x_3)$ représente la durée écoulée entre le franchissement de la transition t_3 et celui de la transition t_1 .

Dans un réseau de Petri p-temporel l'horloge permettant d'évaluer la durée de séjour d'un jeton dans une place est déclenchée dès que ce dernier arrive dans la place. Ainsi, il peut être noté que les considérations de nature quantitative (i.e. les performance) « prennent l'avantage » sur les considérations de nature qualitative (i.e. logique), alors que dans le modèle de Merlin il en va de manière inverse. En effet, pour le modèle t-temporel, l'horloge associée à une transition n'est déclenchée que lorsque tous les jetons nécessaires à la validation de la transition sont présents dans les places en amont de cette dernière (le dernier arrivé déclenche le décompte).

Afin d'évaluer les instants de tir, l'approche proposée requiert qu'un jeton soit identifié par l'intermédiaire de trois paramètres : la place qui le contient, son instant de création et son instant de consommation.

La fonction TOK a été définie dans ce but.

Quand le poids des arcs du p-RdP sont éléments de l'ensemble N , alors $TOK(j, n)$ est un multi-ensemble.

Dans un souci de simplicité seuls des p-RdP dont le poids des arcs est élément de $\{0, 1\}$ seront considérés dans la suite.

$$\text{Ainsi : } TOK : N \times N^* \rightarrow \mathcal{A}(P),$$

$$TOK(j, n) = \{p \in P / p \text{ contient un jeton créé par le } j^{\text{ème}} \text{ instant de tir et consommé par le } n^{\text{ème}}\}.$$

Avec $\mathcal{A}(P)$ l'ensemble des parties de P .

Plusieurs jetons contenus dans la même place seront différenciés par les valeurs de j et n qui leur seront associées. Il sera alors possible d'imposer n'importe quel mode de gestion des jetons dans les places, mais dans la suite ce sera le mode FIFO qui sera considéré. De plus, la détermination de ces ensembles est étroitement liée à la séquence de tir qui sera considérée.

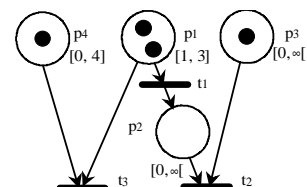


Figure 2. Illustration de l'ensemble TOK

Par exemple, pour la séquence de tir $t_1 t_2 t_3$, les ensembles suivants sont obtenus :

$$TOK(0, 1) = \{p_1\}, TOK(0, 2) = \{p_3\},$$

$$TOK(1, 2) = \{p_2\}, TOK(0, 3) = \{p_1, p_4\}.$$

Par l'intermédiaire de ces ensembles les durées de séjour effectives de chaque jeton dans sa place peuvent être évaluées comme suit :

$$D_{smin}(j, n) = \begin{cases} \max(a_i, i \mid p_i \in TOK(j, n) \\ \text{else } 0 \text{ si } TOK(j, n) = \emptyset \end{cases}$$

$$D_{smax}(j, n) = \begin{cases} \min(b_i, i \mid p_i \in TOK(j, n) \\ \text{else } +\infty \text{ si } TOK(j, n) = \emptyset \end{cases}$$

3.1 Commande périodique

Le comportement de ce mode de fonctionnement est entièrement déterminé par l'équation suivante :

$$\forall k \geq 1, s_i(k) = s_i(1) + (k - 1) \cdot \pi \quad (1)$$

Avec $s_i(k)$ l'instant de la $k^{\text{ème}}$ occurrence de la transition t_i et π la période de fonctionnement. Cela signifie que les dates du premier tir des transitions du réseau ainsi que la période de fonctionnement suffisent à caractériser entièrement ce mode de fonctionnement et à construire une commande périodique.

Définition : un échancier d'un p-RdP sera définie comme étant une séquence de paires ordonnées $(t_i, \sum_{k=0}^i x_k)$ avec la transition t_i franchissable à l'instant $(\sum_{k=0}^i x_k)$ depuis l'état obtenu, en partant de l'état initial du réseau N et en tirant les transitions $t_j, 1 \leq j < i$ aux dates prévues.

La partie qui suit détaille l'approche de commande proposée.

4. APPROCHE DE COMMANDE

4.1 Arithmétique d'intervalle

Soient $I_1 = [a_1, b_1]$ et $I_2 = [a_2, b_2]$, avec $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq +\infty$ et $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq +\infty$. Alors $I_1 + I_2$ sera défini comme l'intervalle $[a_1 + a_2, b_1 + b_2]$ et $I_1 - I_2$ comme l'intervalle $[a_1 - a_2, b_1 - b_2]$ si $a_2 \leq a_1$ et $b_2 = a_2$. Soit IV l'intervalle $[\alpha, \beta]$, IV^{\min} représentera α et IV^{\max} β .

Dans ce qui suit, afin de ne pas alourdir les écritures, nous considérerons que partant de l'état initial le franchissement de la transition t_i conduira à l'état étiqueté par i (le $i^{\text{ème}}$ état).

Le principe du schéma de synthèse de commande proposé sera dans un premier temps illustré via l'exemple simple qui suit.

A l'état initial, l'intervalle de disponibilité de chaque jeton contenu dans une place p_i , $DS_0(p_i)$ peut s'évaluer comme suit :

$$\forall p_i \in TOK(0, .), DS_0(p_i) = [a_i, b_i], \text{ et } MIN_0 = D_{smax}(0, 1),$$

Sur le p-RdP de la Figure 3 :

$$DS_0(p_1) = [4, 6], DS_0(p_3) = [3, 5] \text{ et } MIN_0 = 5.$$

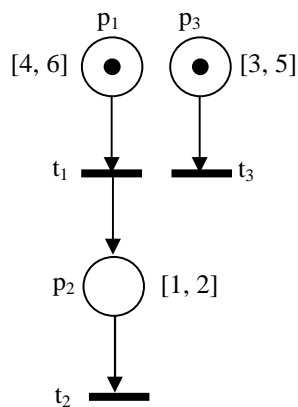


Figure 3. Illustration

DS_0 contient l'intervalle statique de tous les jetons présents initialement dans le réseau et MIN_0 représente l'instant après lequel une contrainte temporelle sera inévitablement violée, conduisant alors à la mort de marque(s).

Une transition validée t_1 sera franchissable si et seulement si :

$$D_{smin}(0, 1) \leq MIN_0.$$

Pour le p-RdP de la Figure 3, la transition t_1 est franchissable car $DS_0^{\min}(p_1) \leq 5$.

Après le tir de la transition t_1 , deux situations doivent être considérées :

1. les jetons nouvellement créés (par le tir de la première transition t_1 , le premier instant de tir) :

$$\forall p_i \in TOK(1, .), DS_1(p_i) = x_1 + [a_i, b_i],$$

2. les jetons créés initialement et qui n'ont pas contribué au franchissement de la transition t_1 :

$$\forall p_i \in TOK(0, j), j \neq 1, DS_1(p_i) = [\max(x_1, a_i), b_i],$$

$$MIN_1 = \min(DS_1^{\max}(p_i)), \forall p_i \in TOK(0, j) \cup TOK(1, k), j \neq 1 \text{ et } k > 1.$$

Pour le p-RdP de la Figure 3 :

Le jeton créé dans la place p_2 par le tir de t_1 (à l'instant x_1) sera considéré dans la validation de la transition t_2 dans l'intervalle $DS_1(p_2) = x_1 + [1, 2] = [x_1 + 1, x_1 + 2]$.

Pour le jeton contenu dans la place p_3 , créé initialement et non engagé dans le tir de la transition t_1 , la date minimale à laquelle il pourra participer au franchissement de la t_3 doit être mise à jour.

Par exemple, si la transition t_1 est franchie à l'instant $x_1 = 4$, comme le tir de t_3 doit intervenir après le tir de t_1 , le jeton contenu dans la place p_3 pourra être considéré au plus tôt (pour le tir de la transition t_3) à l'instant $\max(x_1, 3) = 4$, ainsi $DS_1(p_3) = [4, 5]$.

Une généralisation de ce principe peut alors être réalisée.

Considérons la séquence (répétitive) $\sigma = t_1 t_2 t_3 \dots t_q$ (sa longueur correspondant à $|\sigma| = q$) (M_i le marquage atteint après le franchissement de la transition t_i) la borne minimale (resp. maximale) notée μ_σ^{\min} (resp. μ_σ^{\max}) de son temps de cycle moyen peut alors être évaluée par l'intermédiaire des programmes linéaires qui suivent :

$$\mu_\sigma^{\min} = \text{Min}(\pi) / \mu_\sigma^{\max} = \text{Max}(\pi),$$

$$\text{avec } \pi = \sum_{i=0}^{|\sigma|} x_i,$$

sous l'ensemble de contraintes :

$$\sum_{i=0}^j x_i \in \text{INTV}_j, \forall j \in \{0, \dots, |\sigma|\}.$$

Avec $\text{INTV}_j, \forall j$ calculé comme suit :

$$\text{INTV}_1 = [D_{\text{min}}(0, 1), \text{MIN}_0],$$

Evaluation de l'ensemble DS_1 :

- contribution des jeton(s) créés par le tir de t_1 (la première transition franchie) :

$$\forall p_i \in \text{TOK}(1, \cdot), DS_1(p_i) = x_1 + [a_i, b_i],$$

- contribution des jeton(s) créés initialement et ne participant pas au tir de t_1 :

$$\forall p_i \in \text{TOK}(0, j), j > 1, DS_1(p_i) = [\max(x_1, a_i), b_i],$$

et $\text{MIN}_1 = \min(DS_1^{\max}(p_i)), \forall p_i \in M_1$.

Le cas $i > 1$:

Partant du marquage M_{i-1} le franchissement de la transition t_i conduit à l'obtention des ensembles suivants :

$$\text{INTV}_i = [\max(DS_{i-1}^{\min}(p_k)), \text{MIN}_{i-1}],$$

$$\forall p_k \in \text{TOK}(\cdot, i),$$

Evaluation de l'ensemble DS_i :

les jetons nouvellement créés :

$$\forall p_j \in \text{TOK}(i, \cdot), DS_i(p_j) = \sum_{u=0}^i x_u + [a_j, b_j],$$

les jetons créés par le $s^{\text{ème}}$ instant de tir, avec $s < i$, qui ne participent pas au franchissement de t_i :

$$\forall p_k \in \text{TOK}(s, j), j > i,$$

$$DS_i(p_k) = [\max(\sum_{u=0}^i x_u, \sum_{u=0}^s x_u + a_k), \sum_{u=0}^s x_u + b_k],$$

et $\text{MIN}_i = \min(DS_i^{\max}(p_k)), \forall p_k \in \text{TOK}(\cdot, j), j > i$.

4.2 Considérations sur le parallélisme

On peut noter qu'un ordre strict sur les événements est imposé : le système obtenu précédemment étant écrit pour une séquence de tir donnée ($\sigma = t_1 t_2 t_3 \dots t_q$), l'absence de solution signifiera que cette dernière est tout simplement non réalisable.

Considérons le p-RdP de la figure 4 et la séquence $\sigma = t_1 t_2$, le système S_σ obtenu est :

$$S_\sigma \begin{cases} 4 \leq x_1 \leq \min(6, 3) \\ \max(x_1, 1) \leq x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

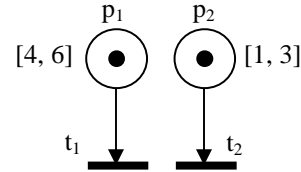


Figure 4. Parallélisme

On voit aisément sur ce simple exemple d'illustration que pour la séquence donnée, à cause des contraintes temporelles, le système n'admet pas de solution. Ceci traduit le fait que la transition t_1 ne peut pas être franchie avant la transition t_2 .

Dans le système précédent une relation de précédence a été imposée sur l'instant de tir des deux transitions parallèles t_1 et t_2 . Cette relation est explicitement exhibée par l'inégalité $\max(x_1, 1) \leq x_1 + x_2$ (i.e. le tir de t_1 doit intervenir avant celui de t_2).

Nous proposons dans la suite de ne pas imposer de contraintes de précédence sur les tirs des transitions pouvant intervenir en parallèle. Ceci sera réalisé en ne prenant pas en considération la contribution des contraintes générées par les jetons qui ne participent pas au tir considéré et qui initient un autre franchissement de transition.

Ainsi, pour l'exemple considéré en Figure 4, le nouveau système suivant est alors obtenu :

$$S_{\sigma} \begin{cases} 4 \leq x_1 \leq 6 \\ 1 \leq x_1 + x_2 \leq 3 \end{cases}$$

Par exemple, si l'instant de tir de la transition t_1 est $x_1 = 6$, il s'ensuit que : $-5 \leq x_2 \leq -3$, cette inégalité signifie que le franchissement de la transition t_2 doit intervenir avant celui de la transition t_1 et son instant de tir est égal à $x_1 + x_2$. Sa valeur au plus tôt sera $6 + (-5) = 1$ et sa valeur au plus tard correspondra à $6 + (-3) = 3$.

Ainsi, un exemple d'échéancier réalisable est :

$$\overline{\omega} = ((t_2, x_1 + x_2 = 6 - 5 = 1), (t_1, x_1 = 6)).$$

Il peut être noté que l'ordre des événements dans l'échéancier considéré sera déterminé par la valeur de la

somme des instants de tir $\sum_{k=0}^i x_k$.

Les bénéfices de cette approche sont manifestes car en présence d'un fort degré de parallélisme, il n'est pas nécessaire de considérer l'ensemble de toutes les « combinaisons » possibles. En effet, il suffit de se restreindre aux séquences de tir réalisables sur le réseau de Petri sous-jacent (sans considérations temporelles) et par des techniques de programmation linéaire, la solution obtenue en résolvant le système généré (associé à la séquence de tir étudiée) déterminera l'ordre réel des différents événements et la durée exacte des opérations constitutives de la séquence.

De plus, cette approche peut être utilisée pour répondre à des questions concernant l'accessibilité de marquages particuliers. En effet, en considérant l'ensemble des évolutions possibles (en termes de séquences réalisables) à partir d'un marquage source et conduisant à un marquage cible, un ensemble de systèmes d'inéquations est alors obtenu. Si ce dernier n'admet pas de solution cela veut dire qu'il n'existe pas de séquence de franchissement réalisable autorisant le passage du marquage source vers le marquage cible sur le modèle p-temporel.

5. EXEMPLE ILLUSTRATIF

Dans ce paragraphe, une application de la méthode proposée est présentée. Elle concerne la supervision d'une commande distribuée sur plusieurs automates programmables industriels (API).

La supervision consiste à accéder via un réseau à des variables système (température, pression, niveau dans une cuve...) en vue de les contrôler par le biais de différentes requêtes soumises aux API. La durée des requêtes dépend de plusieurs facteurs tels que le matériel et le protocole de communication utilisés, la charge des API, le nombre de variables à espionner, ... Dans un cadre général ces durées ne sont pas des valeurs ponctuelles mais elles sont connues sous la forme d'intervalles.

Ainsi, l'assurance de la cohérence des variables à contrôler impose que la durée séparant les différentes requêtes ne doit pas excéder une durée fixée, durée imposée par la dynamique du procédé observé.

Il apparaît que la cohérence implique des contraintes qui ne sont pas de type temps de réponse mais de type temps de séjour, pouvant alors être modélisées sous la forme d'intervalles de temps.

Afin de modéliser de manière naturelle le fonctionnement répétitif de la supervision, un modèle p-temporel peut être construit, représentant le problème d'ordonnancement du superviseur.

La supervision consiste à soumettre six différentes requêtes ($p_{12}, p_{14}, p_{22}, p_{25}, p_{32}, p_{34}$) à trois API (p_{10}, p_{20}, p_{30}).

Le modèle obtenu tient compte de :

- Contraintes de précédence : ensemble de places ($p_{12}, t_{12}, p_{13}, t_{13}, p_{14}$) la requête associée à p_{14} doit être traitée après celle associée p_{12} .
- Contraintes de synchronisation : par l'intermédiaire de la transition t_{40} , toutes les requêtes doivent être traitées afin de respecter la contrainte de cohérence des données (aucune requête ne peut être traitée deux fois avant que toutes les autres ne le soient au moins une fois).
- Contraintes de ressources partagées: l'API associé à la place p_{20} ne peut traiter les requêtes associées aux places p_{22} et p_{25} en même temps.

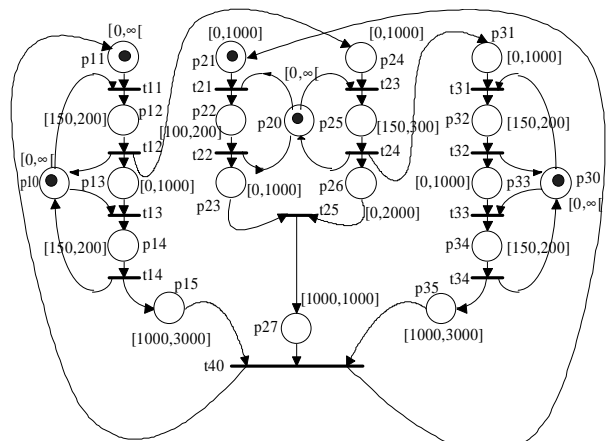


Figure 5. modèle de la supervision

Table des transitions

t_{11}	Début traitement requête 1.
t_{12}	Fin de la requête 1.
t_{13}	Début traitement requête 2.
t_{14}	Fin de la requête 2.
t_{21}	Début traitement requête 3.
t_{22}	Fin de la requête 3.
t_{23}	Début traitement requête 4.

t_{24}	Fin de la requête 4.
t_{25}	Cohérence requête 3 avec requête 4.
t_{31}	Début traitement requête 5.
t_{32}	Fin de la requête 5.
t_{33}	Début traitement requête 6.
t_{34}	Fin de la requête 6.
t_{40}	Cohérence globale.

Considérons la sequence de franchissement $\sigma = t_{11}t_{12} t_{13}t_{14} t_{21}t_{22} t_{23}t_{24} t_{25}t_{31} t_{32}t_{33} t_{34}t_{40}$, le système d'inégalité (simplifié) obtenu est le suivant :

$$\begin{aligned}
 &0 \leq x_1 \leq \infty \\
 &150 \leq x_2 \leq 200 \\
 &0 \leq x_3 \leq 1000 \\
 &150 \leq x_4 \leq 200 \\
 &0 \leq \sum_{i=1}^5 x_i \leq 1000 \\
 &\sum_{i=1}^5 x_i + 1000 \leq \sum_{i=1}^6 x_i \leq \sum_{i=1}^5 x_i + 200 \\
 &\max(\sum_{i=1}^6 x_i, \sum_{i=1}^2 x_i) \leq \sum_{i=1}^7 x_i \leq \min(\sum_{i=1}^5 x_i + 200, \sum_{i=1}^4 x_i + 3000) \\
 &\sum_{i=1}^7 x_i + 150 \leq \sum_{i=1}^8 x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^7 x_i + 300) \\
 &\max(\sum_{i=1}^6 x_i, \sum_{i=1}^8 x_i) \leq \sum_{i=1}^9 x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^6 x_i + 1000, \sum_{i=1}^8 x_i + 2000) \\
 &\sum_{i=1}^8 x_i \leq \sum_{i=1}^{10} x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^8 x_i + 1000, \sum_{i=1}^9 x_i + 1000) \\
 &\sum_{i=1}^{10} x_i + 150 \leq \sum_{i=1}^{11} x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^9 x_i + 1000, \sum_{i=1}^{10} x_i + 200) \\
 &\sum_{i=1}^{11} x_i \leq \sum_{i=1}^{12} x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^9 x_i + 1000, \sum_{i=1}^{11} x_i + 1000) \\
 &\sum_{i=1}^{12} x_i + 150 \leq \sum_{i=1}^{13} x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^9 x_i + 1000, \sum_{i=1}^{12} x_i + 200) \\
 &\max(\sum_{i=1}^4 x_i + 1000, \sum_{i=1}^9 x_i + 1000, \sum_{i=1}^{13} x_i + 1000) \leq \sum_{i=1}^{14} x_i \\
 &\sum_{i=1}^{14} x_i \leq \min(\sum_{i=1}^4 x_i + 3000, \sum_{i=1}^9 x_i + 1000, \sum_{i=1}^{13} x_i + 3000)
 \end{aligned}$$

Soit $\pi = \sum_{i=0}^{14} x_i$ et $\mu_{\sigma}^{\min} = \text{Min}(\pi) / \mu_{\sigma}^{\max} = \text{Max}(\pi)$,

sous les contraintes du système précédent. On obtient $\mu_{\sigma}^{\min} = 1600$ et $\mu_{\sigma}^{\max} = 3200$ unités de temps.

Par exemple, les instants de tir (les x_i) correspondant à μ_{σ}^{\min} sont:

$$[0, 150, 300, 150, -550, 100, 0, 150, 300, -300, 150, 0, 150, 1000],$$

et l'échéancier réalisable associé est :

$$\varpi = ((t_{11}, 0), (t_{21}, 50), (t_{12}, 150), (t_{22}, 150), (t_{23}, 150), (t_{24}, 300), (t_{31}, 300), (t_{13}, 450), (t_{32}, 450), (t_{33}, 450), (t_{14}, 600), (t_{25}, 600), (t_{34}, 600), (t_{40}, 1600)).$$

On peut noter que bien que le système soit obtenu sur la base de la séquence de tir

$\sigma = t_{11}t_{12} t_{13}t_{14} t_{21}t_{22} t_{23}t_{24} t_{25}t_{31} t_{32}t_{33} t_{34}t_{40}$, la résolution conduit à la vraie séquence de tir réalisable $t_{11}t_{21} t_{12}t_{22} t_{23}t_{24} t_{31}t_{13} t_{32}t_{33} t_{14}t_{25} t_{34}t_{40}$ (les différences portant alors sur les occurrences d'événements pouvant intervenir en parallèle).

Pour μ_{σ}^{\max} , les instants de tir correspondants sont : [1600, 150, 300, 150, -1200, 200, 550, 150, 300, -300, 150, 0, 150, 1000],

et l'échéancier réalisable associé est le suivant :

$$\varpi' = ((t_{21}, 1000), (t_{22}, 1200), (t_{11}, 1600), (t_{12}, 1750), (t_{23}, 1750), (t_{24}, 1900), (t_{31}, 1900), (t_{13}, 2050), (t_{32}, 2050), (t_{33}, 2050), (t_{14}, 2200), (t_{25}, 2200), (t_{34}, 2200), (t_{40}, 3200)).$$

Pour fixer les idées, on peut dire que le système d'inégalités est généré pour une séquence de franchissement pouvant être vue comme une « pseudo séquence ».

En effet, ce système est utilisé pour déterminer les contraintes de type logique (précédence, exclusion mutuelle, concurrence) mais l'ordonnancement réel (la vraie séquence de tir réalisable) est obtenue non seulement grâce à la valeur des différents instants de tir mais aussi grâce au signe associé à ces différentes valeurs.

Il est à noter que le modèle réseau de Petri de l'exemple illustratif proposé est un modèle sauf (les places ne pouvant être multi-marquées). La méthode s'appuyant sur une énumération partielle des états atteints, dans un cadre non sauf la complexité du système obtenu augmentera forcément. Cependant, la restriction aux séquences de tir réalisables sur le modèle autonome sous jacent ne peut conduire qu'à une réduction de la combinatoire globale.

6. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le facteur temps est devenu un élément incontournable lors de l'analyse des systèmes de production. En effet, en ce qui concerne les systèmes à contraintes de temps, ce paramètre n'affecte pas seulement les performances du système mais il peut aussi nuire à sa validité.

Il s'ensuit qu'un comportement satisfaisant de tels systèmes ne dépend pas seulement de l'ordre dans lequel les différentes opérations sont effectuées mais aussi du temps nécessaire à leur bonne réalisation. En conséquence, validité et performance sont étroitement liées et la présence de spécifications temporelles sous la forme d'intervalles impose le recours à une étape de synthèse commande.

Dans cet article, une nouvelle approche de commande a été proposée. Cette approche s'appuie sur le modèle p-temporel des réseaux de Petri et est basée sur la notion d'instant de tir. Elle apparaît comme une méthode générale, non conditionnée par des propriétés structurelles

fortes du modèle et donc non restreinte à une sous-classe particulière de RdP.

La méthode prend en compte les différents états atteints au cours d'une séquence de tir à étudier. Plus particulièrement, elle explore l'ensemble des séquences de franchissement réalisables sur le modèle autonome sous-jacent du modèle p-temorel considéré.

La technique présentée conduit à l'obtention d'un système d'inégalités, système écrit une unique fois (au début de la phase d'analyse) et pouvant l'être pour des valeurs symboliques des contraintes temporelles. L'avantage de considérer des quantités symboliques réside dans la possibilité de modifier leurs valeurs sans modifier la forme du système obtenu. De plus, cela peut aussi trouver son intérêt dans une phase de test de spécifications temps réel.

En effet, comme il l'a été montré dans le paragraphe décrivant l'exemple illustratif, l'ordre des différentes opérations à effectuer peut se voir être imposé par les contraintes temporelles. Si un ordonnancement obtenu s'avère comme étant inapproprié, les contraintes temporelles peuvent être modifiées (sans altérer la forme du système) et le nouvel ordonnancement résultant sera dicté par les valeurs et le signe des différents instants de tir provenant de la résolution du système original.

Un système n'évoluant que très rarement en isolation, se trouve soumis aux influences de l'environnement dans lequel il est plongé. Une piste en cours d'investigation est l'évaluation de la robustesse des ordonnancements obtenus face à des perturbations quantifiées. Ces perturbations apparaissant sous la forme de retard ou d'avance sur des instants de tir préalablement planifiés.

REFERENCES

- Bonhomme, P., P. Aygalinc and S. Calvez, 2001. Towards the Control of Time-Critical Systems. *Proceedings of the IEEE Conference on Control Applications (CCA/ISIC)*, Mexico city, Mexico.
- Boucheneb, H. and G. Berthelot, 1993. Towards a simplified building of Time Petri Nets reachability graph. *Proceedings of PNPM'93*, p. 46-55.
- Brams, G.W., 1983. Réseaux de Petri: Théorie et Pratique, Tome 1 and 2, Masson.
- Calvez, S., P. Aygalinc and P. Bonhomme, 2004. Proactive/Reactive Approach for Transient Functioning Mode of Time Critical Systems *Proceedings of the Third Conference on Management and Control of Production and Logistics (MCPL'2004)*, Santiago, Chili, p. 65-70.
- David, R. And H. Alla Houck, 1994. Petri Nets for Modeling of Dynamic Systems - A survey. *Automatica*, **30(2)**, p. 175-202.
- Khansa, W., J.P. Denat and S. Collart Joines, 1996. P-Time Petri Nets for Manufacturing Systems. *Proceedings of the Wodes'96*. Edinburgh, UK, p 94-102.
- Merlin, P. and D. Faber, 1976. Recoverability of communication protocols - implications of a theoretical study. *IEEE Trans. Communications*, **COM-24 (9)**, p. 381-404.
- Murata, T., 1989. Petri Nets : Properties, Analysis and Applications. *Proceedings of the IEEE*, **Vol 77 n°4**, p. 541-580.
- Roux, O.H. and A.M. Déplanche, 2002. A t-time Petri net extension for real time-task scheduling modeling, *European Journal of Automation (JESA)*, **vol.36, no.7**, p. 973-986.