

# PROCEDURE POUR LA LOCALISATION DES FAUTES ACTIONNEURS ET LA DETECTION DES FAUTES DE MESURES SUR DES SYSTEMES LINEAIRES STATIONNAIRES

B. LARROQUE, F. NOUREDDINE, F. ROTELLA

Laboratoire Génie de Production - ENIT

47, avenue d'Azereix

BP 1629 65016 Tarbes CEDEX

benoit.larroque@enit.fr, nour@enit.fr, rotella@enit.fr

**RÉSUMÉ :** Une nouvelle procédure de construction d'un observateur à entrées inconnues (OEI) d'ordre réduit générant un résidu pour la détection et localisation de fautes (DLF) est proposée dans cet article. L'originalité de ce travail réside dans l'approche adoptée pour l'élaboration de la procédure illustrée sur un exemple. En effet, le noyau de la matrice de distribution des fautes actionneurs est généré à l'aide d'inverses généralisées. La résolution d'une équation de Sylvester, composante des relations constitutives d'un OEI, est menée en utilisant le produit de Kronecker. Un banc d'observateur générant plusieurs résidus autorise d'une part la détection et la localisation de chaque faute actionneur parmi toutes les fautes actionneurs possibles et d'autre part la classification entre fautes actionneurs et fautes de mesure.

**MOTS-CLÉS :** Détection et localisation de fautes, observateurs à entrées inconnues, produit de Kronecker, inverses généralisées

## 1. INTRODUCTION

Les observateurs à entrées inconnues (OEI) sont généralement utilisés lorsqu'il s'agit de s'affranchir des effets des perturbations sur un système. Cette approche est d'ailleurs celle qui a été conduite dès les années 80 où l'observateur à entrées inconnues a retenu une grande attention dans le domaine du contrôle (Kudva, Viswanadham & Ramakrishna 1980), (Yang & Wilde 1988). Dans le domaine de la détection et localisation de fautes (DLF), la modélisation et l'occurrence des fautes pouvant affecter un système sont décrites dans (Chen & Patton 1999). De nombreux travaux relatifs à la DLF sont basés sur la conception d'un observateur à entrées inconnues d'ordre plein, (Chen & Patton 1999), (Demetriou 2005), car ces structures procurent le maximum de degrés de liberté lors de la conception de résidus pour l'isolation de fautes. Toutefois, dans certains contextes, la conception des OEI d'ordre réduit répond aux problèmes posés (Koenig & Mammari 2001).

L'utilisation d'un observateur d'ordre réduit peut ainsi s'avérer tout aussi performante et une procédure simple est présentée dans cet article pour estimer des résidus afin de permettre la détection et l'isolation des fautes actionneurs par rapport aux fautes de mesures.

L'utilisation des inverses généralisées pour dimensionner un OEI permet d'introduire des paramètres arbitraires qui vont s'avérer très utiles en terme de degrés de liberté supplémentaires afin de construire l'OEI. Sur ce point, citons les travaux de (Hou & Muller 1994) qui traitent d'un OEI d'ordre plein. Cependant l'approche menée par ces derniers se base sur l'hypothèse que les entrées inconnues affectent de la même manière les états et les sorties du système. Si, dans certains cas, cette approche est valable, elle semble néanmoins assez restrictive. Notons toutefois que ce type d'approche a été également utilisé par (Hou, Pugh & Muller 1999) où les hypothèses citées précédemment ont été posées sur les perturbations.

Un certain nombre de travaux utilisent une inverse généralisée afin de résoudre l'équation assurant l'insensibilité du résidu vis-à-vis des fautes actionneurs. La matrice arbitraire qui résulte de la résolution d'un système linéaire par les inverses généralisées est ainsi utilisée afin de fixer les dynamiques de l'observateur. Citons par exemple les travaux de (Kudva et al. 1980), (Kurek 1983) et (Darouach, Zasadinsky & Xu 1994) qui s'attachent aussi à définir les conditions d'existence en utilisant cette approche.

Concernant nos travaux, nous nous sommes placés dans la perspective de construction d'un OEI d'ordre réduit.

Le principal avantage est de substituer la recherche d'une solution d'une équation linéaire par la recherche du noyau d'une application. Un autre point particulier de notre approche, non développé dans les travaux cités précédemment, réside dans le fait que nous nous imposons la matrice qui affecte les dynamiques de l'observateur et que la matrice arbitraire issue de la résolution par des inverses généralisées permet de garantir la compatibilité des systèmes d'équations utiles pour dimensionner l'OEI. Les conditions d'existence de l'OEI sont induites par des tests au cours du déroulement de la procédure présentée.

Afin de décrire le cadre de notre étude, nous présentons en préliminaire les notations utilisées par la suite. Nous considérons un système linéaire stationnaire, soumis à  $r$  fautes actionneurs et à  $m$  fautes de mesure, régi par les équations d'état suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + K_a f_a \quad (1)$$

$$\begin{aligned} y(t) &= Cx(t) + K_m f_m \\ &= [I_m \ 0] x(t) + K_m f_m \end{aligned} \quad (2)$$

où à chaque instant  $t$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^r$ ,  $f_a \in \mathbb{R}^r$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $f_m \in \mathbb{R}^m$  sont respectivement le vecteur d'état, le vecteur d'entrées connues, le vecteur des fautes actionneurs, le vecteur des sorties du système et le vecteur des fautes de mesure. Les matrices  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$  et  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sont les matrices constitutives du système d'état. Notons que dans (2) une structure spéciale est utilisée pour  $C$  en ligne. Cette forme particulière peut toujours être obtenue grâce un changement de variables à partir du moment où  $C$  est de rang plein, c'est à dire lorsque les  $m$  mesures sont indépendantes.  $K_a \in \mathbb{R}^{n \times r}$  et  $K_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$  sont respectivement les matrices de distribution des fautes actionneurs et des fautes de mesure.

Dans une optique de DLF, et d'après (Chen & Patton 1999), il est possible d'écrire le système (1,2) sous la forme :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \sum_{i=1}^r K_{a_i} f_{a_i}, \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t) + \sum_{i=1}^m K_{m_i} f_{m_i}, \quad (4)$$

$$= [I_m \ 0] x(t) + \sum_{i=1}^m K_{m_i} f_{m_i}, \quad (5)$$

ce qui signifie que l'on scinde les matrices de distribution en  $r$  vecteurs de distribution pour les fautes actionneurs et  $m$  vecteurs de distribution pour les fautes de mesures. Ainsi,  $f_{a_i}$  correspond à la  $i$ -ème faute actionneur et  $K_{a_i}$  est son vecteur de distribution. Il en est de même pour  $f_{m_i}$  qui correspond à la  $i$ -ème faute de mesure et  $K_{m_i}$  le vecteur de distribution associé.

On note par  $(X)^T$  la transposée d'une matrice  $X$ , par  $(X)^{\{1\}}$  une inverse généralisée de  $X$  (Ben-Israel & Greville 1974) et si :

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \cdots & X_{mn} \end{bmatrix} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n],$$

avec  $X_{ij}$  tels que  $X_{ij} \in \mathbb{R}$  et  $X_i$  sont des vecteurs tels que  $X_i \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ , alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \text{vect}(X) &= [X_{11} \ \cdots \ X_{m1} \ \cdots \ X_{1n} \ \cdots \ X_{mn}]^T, \\ &= [X_1^T \ X_2^T \ \cdots \ X_n^T]^T. \end{aligned}$$

Une inverse généralisée de la matrice  $X$  est définie comme une matrice de taille  $(q \times r)$  notée  $X^{\{1\}}$  telle que :

$$X X^{\{1\}} X = X.$$

Pour toute matrice  $X$ , une inverse généralisée existe et l'ensemble de ces inverses généralisées de la matrice  $X$  est donné par :

$$X^{\{1\}} + Y - X^{\{1\}} X Y X X^{\{1\}}, \quad (6)$$

où  $X^{\{1\}}$  est une inverse généralisée particulière de  $X$  et  $Y$  est une matrice arbitraire de taille  $(q \times r)$ . Par exemple, si :

$$X = \begin{bmatrix} I_\rho & 0_{\rho, q-\rho} \\ L & 0_{r-\rho, q-\rho} \end{bmatrix},$$

où  $\rho = \text{rang } X$  et  $L$  est une matrice donnée de taille  $(r - \rho) \times \rho$ , alors on peut choisir :

$$X^{\{1\}} = \begin{bmatrix} I_\rho & 0_{\rho, r-\rho} \\ 0_{q-\rho, \rho} & 0_{q-\rho, r-\rho} \end{bmatrix}.$$

Un système linéaire est compatible si une solution existe. Deux conditions équivalentes assurent l'existence d'une solution pour  $M = N\Gamma$  :

$$\left\{ \text{rang } N = \text{rang} \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} \right\} \text{ ou } \left\{ M(I_q - N^{\{1\}} N) = 0 \right\}.$$

Quand ces conditions sont vérifiées, une solution générale pour  $M = N\Gamma$  est donnée par :

$$\Gamma = MN^{\{1\}} + Z(I - NN^{\{1\}}), \quad (7)$$

où  $Z$  est une matrice arbitraire.

Nous utilisons aussi la notion de produit de Kronecker (Rotella & Borne 1995). Le produit de Kronecker  $C(ms \times nt)$  de deux matrices  $A(m \times n)$  et  $B(s \times t)$  est défini par :

$$C = A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ A_{m1}B & \cdots & A_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Ce produit est parfois appelé produit tensoriel.

## 2. GENERATION DE RESIDU

Le but de cette partie est de fournir une procédure pour construire un OEI d'ordre réduit permettant de générer un résidu insensible à une faute (terme  $K_{a_i}f_{a_i}$  dans (3) ou insensible à plusieurs fautes actionneurs (terme  $K_a f_a$  dans (1)). Ainsi afin de simplifier les notations, nous considérerons par la suite que nous conserverons la matrice  $K_a$  telle quelle dans un cas d'étude où l'on souhaite générer un résidu insensible à toutes les fautes actionneurs. Nous la transformerons en une matrice  $K_{a_i}$  lorsque l'on souhaite générer un résidu insensible à la  $i$ -ème faute.

### 2.1. Dimensionnement de l'OEI et du résidu

En utilisant les principes de base de conception de résidus [(Franck & Wünnenberg 1989), (Chen & Patton 1999)], le résidu  $r(t)$  peut être estimé par :

$$r(t) = G_1 z(t) + G_2 y(t), \quad (8)$$

où  $r(t) \in \mathbb{R}$  et  $z(t) \in \mathbb{R}^q$  sont respectivement le résidu et le vecteur d'observation. Le vecteur d'observation  $z(t)$  est régi par :

$$\dot{z}(t) = Nz(t) + Qu(t) + Ly(t), \quad (9)$$

avec  $G_1 \in \mathbb{R}^{1 \times q}$ ,  $G_2 \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ ,  $N \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $Q \in \mathbb{R}^{q \times r}$ ,  $L \in \mathbb{R}^{q \times m}$  et  $T \in \mathbb{R}^{q \times n}$ . Considérant cet observateur, l'erreur d'estimation est donnée par :

$$e(t) = z(t) - Tx(t). \quad (10)$$

Les dimensions  $q$  et  $g$  et les matrices  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $N$ ,  $Q$ ,  $L$  et  $T$  doivent être déterminées afin d'obtenir  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$

dans un mode sans faute. Ainsi, les conditions de convergence asymptotique de l'erreur d'observation définie par (10), peuvent être établies, suivant (Tsui 2004) par :

$$N \text{ est une matrice de Hurwitz}, \quad (11)$$

$$Q = TB, \quad (12)$$

$$LC = TA - NT. \quad (13)$$

En considérant ces conditions, la dynamique de l'erreur d'observation est définie par :

$$\dot{e} = Ne - TK_a f_a + LK_m f_m.$$

En présence de fautes et en remplaçant  $y(t)$ , défini par (2), et  $z(t)$ , défini par (10), dans (8), on obtient :

$$\begin{aligned} r(t) &= G_1(e(t) + Tx(t)) + G_2 Cx(t) \\ &= G_1 e(t) + (G_1 T + G_2 C)x(t) + G_2 K_m f_m. \end{aligned}$$

Ce résidu  $r(t)$  ne doit pas dépendre de l'état, ce qui nous impose :

$$G_1 T + G_2 C = 0, \quad (14)$$

qui constitue une nouvelle contrainte pour le dimensionnement du système observateur-résidu, au même titre que les contraintes (11), (12) et (13).

De plus, en régime permanent et en considérant une faute  $f_a$  constante, le résidu  $r(t)$  vérifie alors la condition suivante :

$$r = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = G_1 N^{-1} T K_a f_a \quad (15)$$

$$- (G_1 N^{-1} L K_m - G_2 K_m) f_m. \quad (16)$$

Afin de rendre le résidu  $r(t)$  insensible à la faute  $f_a$ , la matrice  $T$  doit être orthogonale à  $K_a$ . On en déduit alors que :

$$T K_a = 0 \Leftrightarrow K_a^T T^T = 0 \Leftrightarrow T^T \in \text{Ker}(K_a^T). \quad (17)$$

De plus, pour obtenir un résidu permanent  $r$  sensible aux fautes de mesures  $f_m$ , (15) la condition (18) doit être satisfaite :

$$G_2 K_m - G_1 N^{-1} L K_m \neq 0. \quad (18)$$

Pour étudier (8), il est intéressant de poser  $T^T = VX$  où  $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $X \in \mathbb{R}^{n \times q}$ . La matrice  $V$  est telle que ses colonnes engendrent  $Ker(K_a^T)$ . La matrice  $V$  vérifie donc :

$$\begin{aligned} \text{rang}(V) &= \dim(Ker(K_a^T)) \\ &= n - \dim(Im(K_a^T)) \\ &= n - \text{rang}(K_a) = q. \end{aligned} \quad (19)$$

$K_a$  et  $n$  étant donnés *a priori*, (19) nous permet de définir l'ordre de l'observateur. Pour obtenir  $V$ , l'équation  $TK_a = 0$  est résolue à l'aide d'inverses généralisées.

Remarque : Dans le cas où une seule faute actionneur est considérée ( $K_a \equiv K_{a_i}$ ) l'ordre de l'observateur  $q$  sera tel que  $q = n - 1$ .

Comme dit précédemment nous avons donc :

$$T^T = VX \quad (20)$$

avec :

$$V = (I_m - (K_a^T)^{\{1\}} K_a^T) \quad (21)$$

et  $X$  est une matrice arbitraire de taille  $n \times q$ .

En explicitant l'expression de  $T^T$ , (20) dans (13), on obtient alors :

$$A^T V X - V X N^T = C^T L^T. \quad (22)$$

(22) est une équation de Sylvester. L'utilisation du produit de Kronecker pour traiter ce type d'équation permet d'écrire :

$$[(I_q \otimes A^T V) - (N \otimes V)] \text{vect}(X) = \text{vect}(C^T L^T). \quad (23)$$

Afin d'assurer la condition (11), on choisit de prendre, pour  $N$ , une matrice diagonale  $N = \text{diag}\{n_i\}$ , où les  $n_i$  sont non nuls et doivent être à partie réelle négative.

**Remarque 1 :** Dans les travaux de (Kudva et al. 1980) et de (Hou et al. 1999), le placement de pôles sur la matrice fondamentale de l'observateur (ici  $N$ ) fait intervenir la notion de stabilité des zéros de transmissions. En effet avec l'OEI réduit définit dans (Hou et al. 1999) plusieurs cas sont à considérer. Un OEI réduit est dit :

- *Statique si l'observateur peut se construire sous la forme simple  $r(t) = G_2 y(t)$ .*
- *A dynamiques fixes si les valeurs propres de  $N$  ne peuvent pas être arbitrairement fixées lors de la conception de l'OEI. Ce type d'observateur sera à considérer si et seulement si le système admet un zéro de transmission stable.*
- *A dynamiques arbitraires si les valeurs propres sont choisies arbitrairement lors du dimensionnement de l'observateur. Ce type d'observateur sera à considérer dans le cas où il existe un sous système observable permettant de choisir les pôles de l'observateur.*

Dans le cas que nous considérons dans ce papier, la matrice  $N$  est choisie diagonale. Les dynamiques de l'observateur peuvent alors être soit :

- *arbitrairement choisies. On se retrouve alors dans le cas d'un OEI à dynamiques arbitraires.*
- *imposées lors du dimensionnement. On se retrouve alors dans le cas d'un OEI à dynamiques fixes. Dans ce cas là il faudra alors s'assurer que les dynamiques imposées par le dimensionnement soient à parties réelles négatives afin que  $N$  soit une matrice de Hurwitz.*

Ainsi, les  $n_i$  représentent les valeurs propres de  $N$  et définissent donc les dynamiques de l'observateur. Avec cette considération sur la matrice  $N$ , [23] peut s'écrire :

$$\left( \text{diag}_{i=1}^q \{A^T V\} - \text{diag}_{i=1}^q \{n_i V\} \right) \text{vect}(X) = \text{vect}(C^T L^T) \quad (24)$$

En utilisant les notations définies précédemment  $(X)_i$  représente la  $i$ -ième colonne d'une matrice  $X$  donnée. Ainsi (24) peut s'écrire sous la forme de  $q$  équations linéaires indépendantes définies pour  $i = 1, \dots, q$ , par :

$$(A^T V - n_i V) X_i = (C^T L^T)_i \quad (25)$$

En considérant la forme de  $C$  décrite dans (2) et en la remplaçant dans (25), on obtient pour  $i = 1, \dots, q$  :

$$(A^T V - n_i V) X_i = \begin{bmatrix} (L^T)_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

En résolvant ces  $q$  systèmes, les matrices  $L$  et  $X$  sont entièrement déterminées.

Afin d'exprimer le résidu en utilisant (8), les matrices  $G_1$  et  $G_2$  doivent être calculées.

En multipliant l'équation (14) par  $K_a$ , on trouve :

$$G_2 C K_a = 0 \iff K_a^T C^T G_2^T = 0 \iff G_2^T \in \text{Ker}(K_a^T C^T)$$

Pour résoudre l'équation  $K_a^T C^T G_2^T = 0$  on utilise la théorie des inverses généralisées, ce qui permet d'écrire :

$$G_2 = W^T V_2^T, \quad (27)$$

avec :

$$V_2 = (I_m - (K_a^T C^T)^{\{1\}} K_a^T C^T), \quad (28)$$

où  $V_2 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et  $W$  est une matrice arbitraire telle que  $W \in \mathbb{R}^{g \times m}$ .

La matrice  $G_2$  est alors déterminée et la relation (29) nous permet de calculer  $G_1$  comme solution de :

$$G_1 T = -V_2 W C \quad (29)$$

### 2.1. Procédure

On peut résumer la démarche précédente, en une procédure d'un OEI par :

**Etape 1 :** A partir de (19) :

$$n - \text{rang}(K_a) = q,$$

calculer l'ordre de l'observateur ( $q > 0$ ). Si  $q = 0$  aller en 10.

**Etape 2 :** Calculer la matrice  $V$  par (21) :

$$V = (I_m - (K_a^T)^{\{1\}} K_a^T).$$

**Etape 3 :** Choisir les  $q$  dynamiques de l'observateur notées  $N_{ii}$  pour  $i = 1, \dots, q$ . En déduire  $N$  :

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_{qq} \end{bmatrix}.$$

**Etape 4 :** Résoudre les  $q$  systèmes linéaires (26) :

$$(A^T V - n_i V) X_i = \begin{bmatrix} (L^T)_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

en déduire  $X$  et  $L$ .

**Etape 5 :** Calculer la matrice  $V_2$  par (28) :

$$V_2 = (I_m - (K_a^T C^T)^+ K_a^T C^T).$$

**Etape 6 :** A partir de (27) :

$$G_2 = W^T V_2^T,$$

exprimer  $G_2$  en fonction de  $W$ .

**Etape 7 :** Résoudre (29) :

$$G_1 T = -V_2 W C,$$

pour déterminer  $G_1$  et  $W$  sous la contrainte (18) :

$$W^T V_2^T K_m - G_1 N^{-1} L K_m \neq 0,$$

en déduire  $G_2$ .

**Etape 8 :** Vérifier (18) :

$$G_2 K_m - G_1 N^{-1} L K_m \neq 0.$$

Si (18) n'est pas vérifiée aller en 10.

**Etape 9 :** Mettre en œuvre le générateur de résidu  $r(t)$ .  
Fin.

**Etape 10 :** Cette procédure ne peut construire un OEI.  
Fin.

**Remarque 2 :** On constate que lors de l'étape 3 de la procédure on choisit arbitrairement les dynamiques de l'observateur que l'on injecte ensuite dans les  $q$  systèmes linéaires (26). Ainsi sous réserve de compatibilité de ces sous-systèmes, les matrices  $X$  et  $L$  sont alors dimensionnées. Cette procédure ne considère donc que le cas les observateurs à entrées inconnues à dynamiques arbitraires.

### 3. APPLICATION

Considérons une machine à papier (Kailath 1980) dont le modèle est décrit par (1). Les différentes matrices constitutives sont données par :

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 1 \\ -0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.7 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad K_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Les 2 actionneurs et les 2 capteurs peuvent être sujets respectivement aux fautes actionneurs  $f_{a_1}$  et  $f_{a_2}$  et aux fautes de mesure  $f_{m_1}$  et  $f_{m_2}$ . De plus, les sorties du système sont bruitées.

Un banc d'observateur nous permet de détecter et de localiser  $f_{a_1}$  ou  $f_{a_2}$  et de détecter  $f_{m_1}$  et  $f_{m_2}$ . On procède de la façon suivante :

- construire un OEI pour générer un résidu insensible à  $f_{a_1}$  ;
- construire un OEI pour générer un résidu insensible à  $f_{a_2}$  ;
- construire un observateur pour générer un résidu sensible à toutes les fautes.

### 3.1. Résidu insensible à $f_{a_1}$

On considère :  $K_a = K_{a_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , et en déroulant la procédure présentée précédemment le résidu est établi par :

**Etape 1 :** Comme  $\text{rang}[K_a] = 1$ , alors  $\text{rang}[T] = q = 2$ .

**Etape 2 :** La matrice  $V$  est déterminée par (20) à l'aide des inverses généralisées :

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Etape 3 :** Puisque  $q = 2$ , il faut donc choisir 2 dynamiques arbitraires pour l'observateur que nous prendrons égales respectivement à  $-1$  et  $-2$ .  $N$  s'écrit donc :

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

**Etape 4 :** Comme  $q = 2$ , la matrice  $X$  s'écrit :

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix},$$

(26) peut alors s'écrire comme suit :

$$\begin{cases} (A^T V - n_1 V) X_1 = (C^T L^T)_1 \\ (A^T V - n_2 V) X_2 = (C^T L^T)_2 \end{cases}, \text{ et devient :}$$

$$\begin{cases} (A^T V - n_1 V) \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{bmatrix} = (C^T L^T)_1 \\ (A^T V - n_2 V) \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{bmatrix} = (C^T L^T)_2 \end{cases}.$$

Chaque sous système est défini par :

$$\left( \begin{bmatrix} 0.8 & -0.05 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X_{11} \\ X_{21} \\ X_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

et

$$\left( \begin{bmatrix} 1.8 & -0.05 & 0 \\ 0.1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X_{12} \\ X_{22} \\ X_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{21} \\ L_{22} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

En résolvant (32) et (33) on a :

$$\begin{cases} X_{11} = X_{12} = 0 \\ L_{11} = -0.05 X_{21} \\ L_{12} = X_{21} \\ L_{21} = -0.05 X_{22} \\ L_{22} = 2 X_{22} \end{cases}.$$

Ensuite, en choisissant par exemple  $X_{21} = 1$  et  $X_{22} = 2$ , nous obtenons :

$$\begin{cases} L_{11} = -0.05 \\ L_{12} = 1 \\ L_{21} = -0.05 \\ L_{22} = 2 \end{cases}.$$

Finalement  $N$ ,  $X$ , et  $L$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} N &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ X &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ X_{31} & X_{32} \end{bmatrix} \text{ et} \\ L &= \begin{bmatrix} -0.05 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

**Etape 5 :** D'après (28)  $V_2$  s'écrit :

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Etape 6 :** En posant :

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} \\ W_{21} \end{bmatrix},$$

$G_2$  se déduit par :

$$G_2 = [ W_{11} \quad W_{21} ].$$

**Etape 7 :** D'après (29) et sachant que  $T = (VX)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ , on a :

$$\begin{aligned} & [ G_{111} \quad G_{112} ] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ = & - [ W_{11} \quad W_{21} ] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [ 0 \quad G_{111} + 2G_{112} \quad 0 ] \\ = & - [ W_{11} \quad W_{21} \quad 0 ] \end{aligned}$$

ce qui donne directement :

$$G_2 = [ 0 \quad G_{111} + 2G_{112} ].$$

L'équation (18) devient :

$$-0.05G_{111} - 0.05G_{112} \neq 0$$

En posant  $[ G_{111} \quad G_{112} ] = [ 1 \quad 2 ]$ , la condition précédente est satisfaite.

**Etape 8 :** L'équation (18) est vérifiée car :

$$G_2 K_m - G_1 N^{-1} L K_m = -0.15 \neq 0.$$

**Etape 9 :** Le résidu est obtenu par :

$$r = \lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} ([ 1 \quad 2 ] z(t) + [ 0 \quad 5 ] y(t))$$

et est donc insensible à  $f_{a_1}$ .

### 3.2. Résidu insensible à $f_{a_2}$

On considère  $K_a = K_{a_2} = [ 1 \quad 0.7 \quad 0 ]^T$ . En déroulant la procédure présentée et en choisissant les 2 dynamiques de l'observateur en  $-1$  et  $-1.1$ , puis en choisissant  $G_1 = [ 1 \quad 1 ]$ , on obtient, en procédant de la même façon que précédemment, l'observateur suivant

:

$$N = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1.1 \end{bmatrix};$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0971 & -0.1471 \end{bmatrix};$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.1 & -0.1429 & -1 \end{bmatrix};$$

$$G_1 = [ 1 \quad 1 ];$$

$$G_2 = [ -0.1 \quad 0.1429 ].$$

Afin de compléter la stratégie de détection de fautes, un résidu sensible à toutes les fautes ( $f_{a_1}$ ,  $f_{a_2}$ ,  $f_{m_1}$  et  $f_{m_2}$ ) doit être généré. Ce résidu se construit facilement grâce à un observateur de Luenberger.

### 3.3. Génération d'un résidu sensible à toutes les fautes

Afin de générer un tel résidu, nous construisons l'observateur de Luenberger (Luenberger 1971) suivant :

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = (A - KC)\hat{x}(t) + Bu(t) + Ky(t) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases}$$

Ainsi l'erreur de reconstruction de l'état s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \tilde{\dot{x}}(t) &= \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) \\ &= (A - KC)\hat{x}(t) + K_a f_a(t) - KK_m f_m(t) \end{aligned}$$

En l'absence de faute, pour que l'erreur de reconstruction de l'état converge vers 0, il faut que la matrice  $A - KC$  soit de Hurwitz. Le choix de  $K$  sera réalisé en conséquence. Afin de pouvoir choisir arbitrairement les valeurs propres de  $A - KC$ , il faut que la paire  $(A, C)$  soit observable (Borne, Dauphin-Tanguy, Richard, Rotella & Zambettakis 2000). Cette condition étant assurée pour cette application, nous choisissons de fixer les dynamiques de cet observateur en  $-1$ ,  $-2$  et  $-3$ . Nous obtenons alors la matrice  $K$  suivante :

$$K = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.38 \\ 0.95 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le résidu généré par cet observateur n'est autre que l'erreur de reconstruction de la sortie définie par :

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= Cx(t) - C\hat{x}(t) + K_m f_m(t) \\ &= C\tilde{x}(t) + K_m f_m(t).\end{aligned}$$

### 3.4. Résultats de simulation

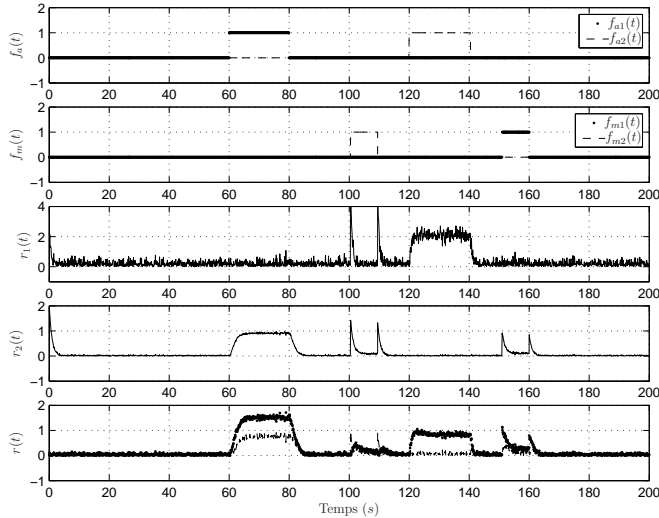


Figure 1: Résidus  $r_1(t)$ ,  $r_2(t)$  et  $r(t)$

La simulation, dont les résultats sont montrés en figure 1, comprend :

- la simulation du système défini par (1), dont les valeurs des matrices sont données par (30) ;
- l'injection de 2 fautes actionneurs  $f_{a_1}$  et  $f_{a_2}$  sous forme d'offset, avec  $f_{a_1}$  affectant le système pour  $t \in [60; 80]$  et  $f_{a_2}$  affectant le système pour  $t \in [120; 140]$  ;
- l'injection de 2 fautes de mesures  $f_{m_1}$  et  $f_{m_2}$  sous forme d'offset, avec  $f_{m_1}$  affectant le système pour  $t \in [100; 110]$  et  $f_{m_2}$  affectant le système pour  $t \in [150; 160]$  ;
- la génération d'un résidu, noté  $r_1(t)$ , insensible à  $f_{a_1}$  ;
- la génération d'un résidu, noté  $r_2(t)$ , insensible à  $f_{a_2}$  ;
- la génération d'un résidu, noté  $r(t)$ , sensible à toutes les fautes ( $f_{a_1}$ ,  $f_{a_2}$ ,  $f_{m_1}$  et  $f_{m_2}$ ).

Ainsi, comme le montre la figure 1, nous pouvons détecter et localiser les 2 fautes  $f_{a_1}$  et  $f_{a_2}$ .

En effet, dans un premier temps, l'analyse du résidu  $r(t)$  nous permet de détecter l'instant où une faute ( $f_{a_1}$  ou  $f_{a_2}$  ou  $f_{m_1}$  ou  $f_{m_2}$ ) est apparue sur le système.

Ensuite, après détection de cette faute, il est nécessaire de la localiser :

- l'évolution du signal  $r_1(t)$  : si  $r_1(t) \rightarrow 0$  il s'agit d'une faute sur l'actionneur 1 ( $f_{a_1}$ ), sinon la faute est soit  $f_{a_2}$  ou  $f_{m_1}$  ou  $f_{m_2}$  ;
- l'évolution du signal  $r_2(t)$  : si  $r_2(t) \rightarrow 0$  il s'agit d'une faute sur l'actionneur 2 ( $f_{a_2}$ ), sinon la faute est soit  $f_{a_1}$  ou  $f_{m_1}$  ou  $f_{m_2}$  ;
- si  $r_1(t) \neq 0$  et  $r_2(t) \neq 0$ , il s'agit d'une faute de mesure  $f_{m_1}$  ou  $f_{m_2}$ .

## 4. CONCLUSION

Dans l'optique d'une approche DLF, une nouvelle procédure pour la conception de résidus s'appuyant sur la construction d'un observateur à entrées inconnues d'ordre réduit est présentée dans ce travail. Le point de départ de la procédure proposée est l'étude du noyau associé au vecteur de distribution de fautes actionneurs. L'exploitation de cette propriété nous permet dans un premier temps de déterminer l'ordre de l'observateur, puis à l'aide de l'utilisation du produit de Kronecker de proposer une procédure pour générer un résidu insensible à une ou plusieurs fautes actionneurs. Afin de compléter la stratégie de DLF, nous avons brièvement rappelé la méthode pour générer un résidu sensible à toutes les fautes. Ainsi, grâce à une logique de détection nous pouvons distinguer entre elles les différentes fautes actionneurs pouvant affecter le système et classifier les fautes actionneurs et les fautes de mesures. Ce travail, si non novateur quant à la finalité, puisque la DLF dans les systèmes linéaires stationnaires est bien maîtrisée, s'avère néanmoins original de par la procédure établie.

## REFERENCES

- Ben-Israel, A. & Greville, T. (1974). Generalized inverses : theory and applications, *John Wiley & Sons* .
- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J., Rotella, F. & Zambettakis, I. (2000). *Commande et optimisation des processus*, Editions Technip.

- Chen, J. & Patton, R. (1999). *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*, Kluwer academic.
- Darouach, M., Zasadinsky, M. & Xu, S. (1994). Full-order observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **39**: 606–609.
- Demetriou, M. (2005). Using unknown input observers for robust adaptive fault detection in vector second-order systems, *Mechanical Systems and Signal Processing* **19**: 291–309.
- Franck, P. & Wünnenberg, J. (1989). *Fault Diagnosis in Dynamic Systems: Theory and Applications, chapter 3: Robust fault diagnosis using unknown input observer schemes, pages 47–98*, Prentice Hall.
- Hou, M. & Muller, P. (1994). Fault detection and isolation observers, *Int. Journal of Control* **60**: 827–846.
- Hou, M., Pugh, A. & Muller, P. (1999). Disturbance decoupled functional observer, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **44**: 382–386.
- Kailath, T. (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall information and system sciences series.
- Koenig, D. & Mammar, S. (2001). Design of a class of reduced order unknown inputs nonlinear observer for fault diagnosis, *IEEE ACC'01, American Control Conference, Arlington, Virginia (U.S.A.)*.
- Kudva, P., Viswanadham, N. & Ramakrishna, A. (1980). Observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Trans. on Automatic Control* **25**(1): 113–115.
- Kurek, J. E. (1983). The state vector reconstruction for linear systems with unknown inputs, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **28**: 1120–1122.
- Luenberger, D. (1971). An introduction to observers, *IEEE Trans. Aut. Control* **16**: 596–602.
- Rotella, F. & Borne, P. (1995). *Théorie et pratique du calcul matriciel*, Editions Technip.
- Tsui, C. (2004). An overview of the applications and solutions of a fundamental matrix equation pair, *Journal of the Franklin Institute* **34**: 465–475.
- Yang, F. & Wilde, R. (1988). Observers for linear systems with unknown inputs, *IEEE Trans. on Automatic Control* **33**(7): 677–681.