

## EXPRESSIONS ANALYTIQUES DU TEMPS DE CYCLE POUR LES AS/RS MULTI – ALLEES

Latefa GHOMRI, Zaki SARI, Amine GUEZZEN

Laboratoire d'Automatique de Tlemcen  
BP. 230 Faculté des sciences de l'ingénieur  
Université Abou-Bekr Belkaïd – Tlemcen.  
{ghomri ; z\_sari ; guezzen\_a}@mail.univ-tlemcen.dz

Tewfik SARI

Laboratoire de mathématiques, Informatique et applications  
Université de Haute Alsace, Mulhouse, France  
tewfik.sari@uha.fr

**RESUME :** Dans un AS/RS (Automated Storage/Retrieval System), le temps de cycle de la machine de stockage/déstockage est un des paramètres les plus importants du système. Dans ce travail nous développons une expression analytique continue permettant un calcul approximatif du temps de simple cycle d'un AS/RS du type multi-allée. Nous comparons les résultats donnés par cette expression avec ceux donnés par une expression discrète exacte. Nous discutons aussi une méthode pour développer une expression mathématique estimant le temps du double cycle pour le même type d'AS/RS.

**MOTS-CLES :** AS/RS (Automated Storage retrieval system), temps de cycle ;

### 1. INTRODUCTION

Les systèmes automatisés de stockage et de déstockage AS/RS sont largement utilisés dans les systèmes de production pour stocker et déstocker les produits finis. Ce sont des combinaisons entre des équipements automatiques qui servent à supporter, à stocker et à déstocker les produits, et d'un système de contrôle dont les principales caractéristiques sont la grande précision et la grande vitesse. Les AS/RS attirent de plus en plus d'intérêt grâce aux avantages importants qu'ils présentent : à savoir un faible coût de main d'œuvre, un faible coût de stockage, une meilleure exploitation de l'espace de stockage, une meilleure traçabilité des produits stockés et un haut débit du système.

La forme de base d'un AS/RS est composée d'une allée comportant un rack sur côté, et chaque rack comporte un certain nombre de casiers. L'allée est servie par une machine S/R (Storage/Retrieval machine) dont le rôle est de stocker les produits dans les casiers et les déstocker à partir des casiers. Cette forme d'AS/RS est dite AS/RS à charge unitaire. C'est la forme la plus étudiée. Les AS/RS peuvent être classés suivant la disposition des casiers de stockage et le nombre de machines S/R servant ces casiers. Ainsi on peut citer : les AS/RS à charge unitaire, les AS/RS multi-allées, les AS/RS à racks glissants, les AS/RS à mini-charge, les AS/RS à carrousel, les AS/RS à personne embarqué, les AS/RS à étagère profonde, les AS/RS à convoyeur gravitationnel...etc.

Dans ce travail nous nous intéressons aux AS/RS multi-allées. Ce type d'AS/RS comporte plusieurs allées, toutes desservies par une seule machine S/R. Ceci permet le stockage d'un nombre important de produits (à

cause de l'existence de plusieurs allées), mais avec un faible débit (à cause de l'utilisation d'une seule machine). Parmi les principaux avantages des AS/RS multi-allées, on peut citer leur coût réduit. Le coût des machines S/R représente approximativement 40% de l'investissement initial d'un AS/RS. Le fait qu'un AS/RS multi-allées utilise une seule machine S/R lui confère un coût réduit par rapport aux autres types. Ceci représente un des principaux avantages des AS/RS multi-allées. La figure 1 schématise un AS/RS multi-allées, ses composantes, et les notations adoptées pour ses dimensions.

La machine S/R se déplace simultanément dans les deux directions horizontale et verticale pour réduire le temps de déplacement. Ceci est dit déplacement de Tchebychev. La machine S/R peut opérer soit en simple ou en double cycle. Dans un simple cycle, la machine S/R effectue soit une opération de stockage soit une opération de déstockage par cycle. Tandis que dans un double cycle, la machine S/R effectue une opération de stockage suivie d'une opération de déstockage dans le même cycle.

Plusieurs mesures de performances peuvent être utilisées pour évaluer un AS/RS. Les plus importantes sont : Le taux d'utilisation de la machine S/R et le temps moyen nécessaire pour servir une requête de stockage ou de déstockage, défini comme étant le temps qui sépare l'apparition de la requête jusqu'à la fin de son exécution.

Le temps de cycle est parmi les paramètres les plus importants d'un AS/RS. Il influence sur les performances du système global.

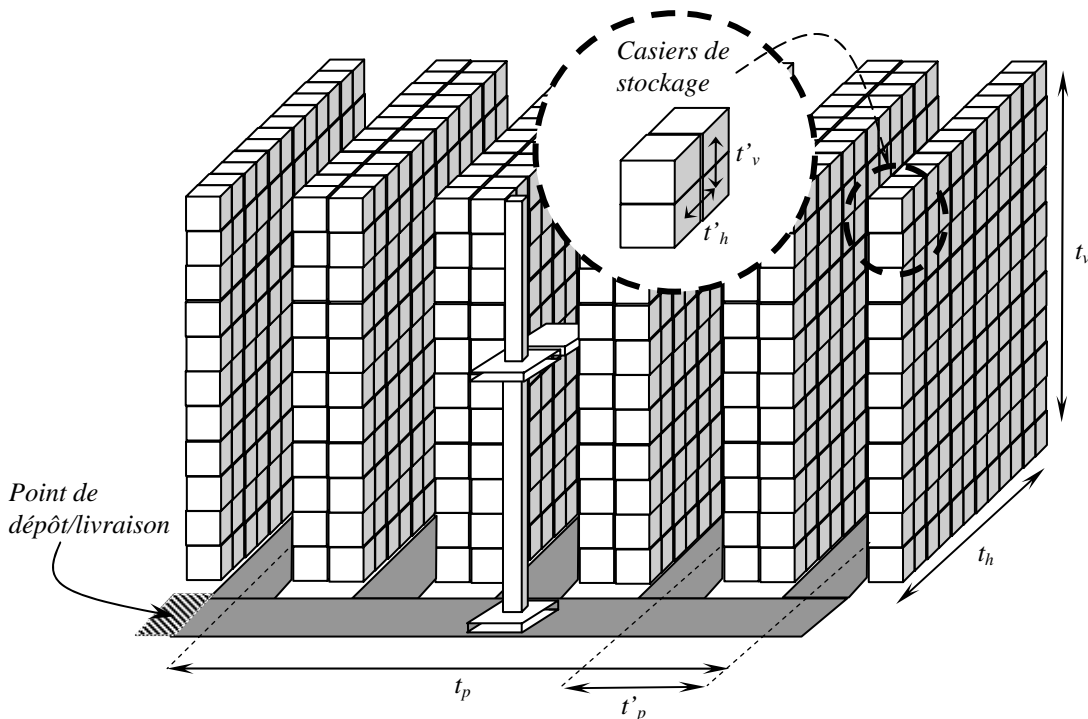


Figure 1. Configuration d'un AS/RS multi-allée et ses composants

Beaucoup de travaux ont été consacrés au temps de cycle de la machine S/R. La plus part de ces travaux concernent les AS/RS à charge unitaire. Hausman *et al.* (1976) ont été parmi les premiers à développer un modèle analytique pour l'analyse des AS/RS à charge unitaire. Il aborde le problème de l'assignement optimal de stockage. Ils considèrent trois stratégies :

- Le stockage aléatoire,
- Le stockage dédié,
- Le stockage par classe.

Il montrent qu'une réduction importante du temps de cycle est obtenue pour le stockage dédié par rapport à un stockage purement aléatoire. Bozer et White (1984) ont utilisé une approximation continue du rack de stockage pour développer une expression mathématique calculant le temps de simple et de double cycle. Les AS/RS considérés sont à charge unitaire. Le rack est rectangulaire et la stratégie de stockage est aléatoire. En plus, ils ont étudié plusieurs positions du point de dépôt/livraison. Han et al. (1997) ont développé une expression mathématique estimant le temps du double cycle, sous la règle "plus proche voisin" (nearest-neighbour). Sous cette règle, les requêtes de stockage et les requêtes de déstockage les plus proches sont appariées pour minimiser le temps de double cycle. Dans (Hwang et KO, 1988) les auteurs ont proposé une expression mathématique pour les AS/RS multi-allées. Dans ce travail, chaque rack est considéré comme une face continue et pour chaque rack est développée une expression analytique du temps de cycle. L'expression globale est la moyenne de toutes les expressions. Lerher *et al.* (2005) ont proposé un modèle analytique du temps de cycle d'un AS/RS multi-allée dans lequel, les auteurs ont pris en

considération l'accélération et la décélération de la machine S/R. Les auteurs dans (Sari *et al.* 2004) et (Sari, 2003) ont considéré les AS/RS à convoyeur gravitationnel, pour lequel ils ont développé une expression mathématique continue du temps de stockage et du temps de déstockage.

Dans cet article, nous considérons les AS/RS multi-allées. Nous proposons une expression analytique continue pour le calcul du temps de simple cycle. Nous discutons une méthode pour le calcul du temps de double cycle. Une expression analytique discrète de temps de simple cycle est utilisée pour valider l'expression continue.

## 2. DEFINITIONS ET NOTATIONS

Dans un AS/RS, La machine S/R peut fonctionner en deux mode, soit en simple cycle soit en double cycle. En fonctionnement simple cycle, après avoir effectué une opération de stockage ou de déstockage, la machine S/R, doit retourner à son point de dépôt/livraison avant d'effectuer une autre opération. La figure 2 schématise ce mode de fonctionnement.

En fonctionnement double cycle, la machine S/R stock un produit se déplace directement vers un deuxième casier pour déstocker un autre produit et le transporte au point de dépôt/Livraison. Ce mode de fonctionnement est illustré dans la figure 3. Notant que dans le cycle représenté sur la figure 3, le casier de stockage et le casier de déstockage se trouvent sur la même allée ; ceci n'est qu'un cas particulier. Dans le

cas le plus général, les casiers de stockage et de déstockage peuvent ne pas être sur la même allée.

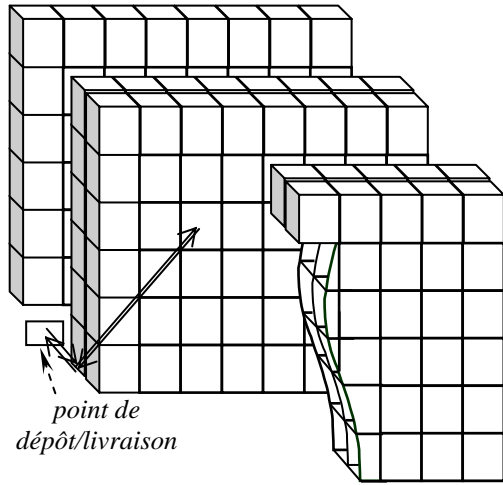


Figure 2. Fonctionnement simple cycle d'un AS/RS multi-allées

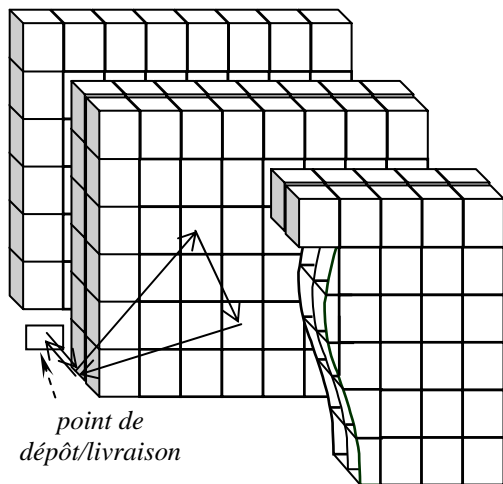


Figure 3. Fonctionnement double cycle d'un AS/RS multi-allées

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de cet article :

- M : nombre de racks dans le système ;
- M/2 : nombre d'allées dans le système ;
- N<sub>L</sub> : nombre de casiers par ligne ;
- N<sub>H</sub> : nombre de casiers par colonne ;
- N : nombre total de casiers ;  
N = M.N<sub>L</sub>.N<sub>H</sub>
- t'<sub>h</sub> : temps de déplacement horizontal d'un casier à un casier voisin ;
- t'<sub>v</sub> : temps de déplacement vertical d'un casier à un casier voisin
- t'<sub>p</sub> : temps de déplacement d'une allée à une allée voisine ;
- t<sub>h</sub> : temps nécessaire pour parcourir la longueur d'un rack ou la longueur d'une allée ;

- t<sub>v</sub> : temps nécessaire pour parcourir la hauteur d'une rack ;
- t<sub>p</sub> : temps nécessaire pour parcourir l'allée principale ;
- $\overline{E(SC)}$  : temps moyen simple cycle ;
- $\overline{E(DC)}$  : temps moyen double cycle ;
- $\overline{E(TB)}$  : temps moyen, de déplacement entre deux casiers aléatoires du système.

### 3. EXPRESSIONS DISCRETES DU TEMPS DE CYCLE (SARI, 1998)

Le temps de simple cycle de la machine S/R est le temps nécessaire pour aller du point de dépôt/livraison au casier de stockage (déstockage) plus le temps nécessaire pour retourner de ce casier au point de dépôt/livraison.

Considérons le casier de coordonnées (i, j) dans la k<sup>ième</sup> allée. Le déplacement horizontal nécessaire pour atteindre ce casier est :

$$t'_{h.i} + t'_p.(k-1) \quad (1)$$

le déplacement vertical nécessaire pour atteindre ce même casier est

$$t'_{v.(j-1)} \quad (2)$$

Grâce au déplacement de Tchebychev, le temps global que met la machine S/R pour atteindre ce casier est le maximum entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical.

$$\text{Max}[(t'_{h.i} + t'_p.(k-1)), t'_{v.(j-1)}] \quad (3)$$

Si on veut calculer un temps de cycle moyen pour tous les casiers, on obtient l'expression discrète suivante :

$$\overline{E(SC)} = \frac{4}{N} \sum_{k=1}^{M/2} \sum_{i=1}^{N_L} \sum_{j=1}^{N_H} \max [(t'_{h.i} + t'_p.(k-1)), t'_{v.(j-1)}] \quad (4)$$

De la même manière, on peut exprimer une expression discrète estimant le temps de double cycle. En fonctionnement double cycle la machine S/R effectue trois déplacements dans chaque cycle. Du point de dépôt/livraison au casier de stockage, du casier de stockage au casier de déstockage et enfin du casier de déstockage à sa position de dépôt/ livraison. Le temps moyen de la somme du premier et du dernier mouvement vaut exactement le temps moyen de simple cycle. Reste à estimer le temps de déplacement entre les casiers de stockage et de déstockage. Ce déplacement est noté E(TB).

Considérons deux casiers de coordonnées respectives (i<sub>1</sub>, j<sub>1</sub>) dans l'allée k<sub>1</sub> et (i<sub>2</sub>, j<sub>2</sub>) dans l'allée k<sub>2</sub>. Deux cas peuvent se présenter :

- Les casiers de stockage et le déstockage se trouvent dans la même allée ( $k_1 = k_2$ ) :

$$E(TB) = \text{Max}(t'_h \cdot |i_2 - i_1|, t'_v \cdot |j_2 - j_1|) \quad (5)$$

- Les casiers de stockage et de déstockage se trouvent dans deux allées différentes ( $k_1 \neq k_2$ )

$$E(TB) = \text{Max}[(t'_h |i_2 + i_1| + t'_p \cdot |k_2 - k_1|), t'_v |j_2 - j_1|] \quad (6)$$

$$\overline{E(TB)} = \frac{4}{N^2 - 2N} \sum_{k_1=1}^{M/2} \sum_{i_1=1}^{N_H} \sum_{j_1=1}^{M/2} \sum_{k_2=1}^{N_H} \sum_{i_2=1}^{M/2} \sum_{j_2=1}^{N_H} \max [ (t'_h |i_2 - i_1| + 2\min(i_1, i_2)) \cdot \min(|k_2 - k_1|, 1) + |k_2 - k_1| t'_p, t'_v |j_2 - j_1| ] \quad (8)$$

Le temps moyen de double cycle est la somme du temps moyen de simple cycle est du temps moyen de déplacement entre deux casiers.

$$\overline{E(DC)} = \overline{E(SC)} + \overline{E(TB)} \quad (9)$$

#### 4. EXPRESSION CONTINUE DU TEMPS DE CYCLE

##### 4.1. Expression du temps de simple cycle

La contribution principale de ce travail consiste à présenter une expression mathématique continue permettant d'approcher la modélisation du temps de simple cycle d'un AS/RS multi-allées.

La figure 4 représente une vue de haut de l'AS/RS multi-allées. Sur cette figure, on peut voir que le temps de déplacement horizontal de la machine S/R, qu'on note  $SC_H$ , est la somme de deux déplacements, qu'on note  $SC_{H1}$  et  $SC_{H2}$  respectivement.

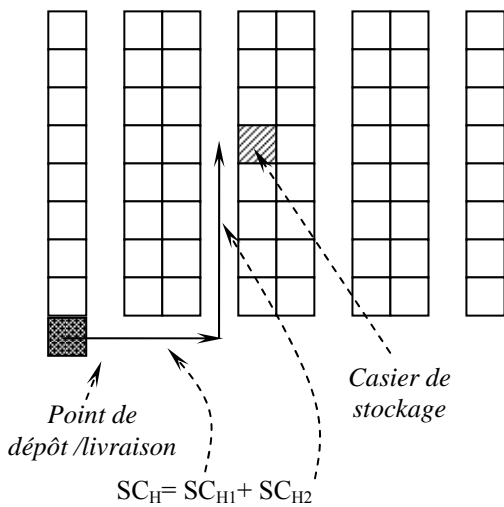


Figure 4. Déplacement horizontal de la machine S/R.

$SC_{H1}$  et  $SC_{H2}$  représentent des durées de déplacement. Chacune de ces deux variables est une variable aléatoire

Notant que :

$$(i_1 + i_2) = |i_1 - i_2| + 2\min(i_1, i_2) \quad (7)$$

Le temps moyen de déplacement entre deux casiers peut donc être estimé par l'expression mathématique discrète suivante :

re discrète de distribution uniforme. Les figures 5-a et 5-b représentent les distributions uniformes discrètes respectives de  $SC_{H1}$  et de  $SC_{H2}$ .

Ces distributions discrètes exactes sont approchées par les distributions uniformes continues dans les figures 6-a et 6-b.

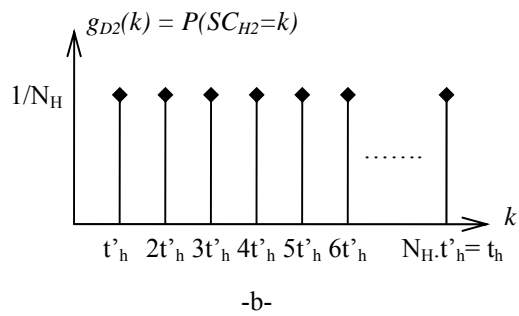
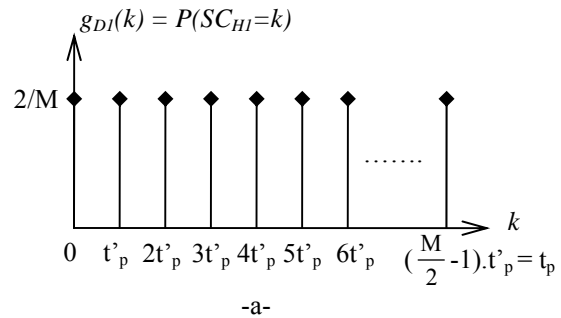


Figure 5. a- Distribution discrète exacte de la variable  $SC_{H1}$ ; b- Distribution discrète exacte de la variable  $SC_{H2}$ ;

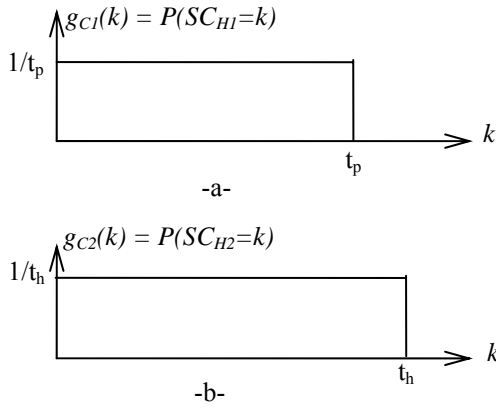


Figure 6. a– Distribution continue approchée de la variable  $SC_{H1}$  ; b– Distribution continue approché de la variable  $SC_{H2}$

Puisque le déplacement horizontal de la machine S/R est la somme de deux déplacements, comme suit :

$$SC_H = SC_{H1} + SC_{H2} \quad (10)$$

Ceci implique, que la distribution de la variable  $SC_H$  (noté  $g_c(k)$ ) est le produit de convolution des fonctions  $g_{c1}(k)$  et  $g_{c2}(k)$ , les distributions respectives des variables  $SC_{H1}$  et  $SC_{H2}$ .

$$g_c(k) = g_{c1}(k) * g_{c2}(k) = \int_0^k g_{c1}(k).g_{c2}(x - k)dk \quad (11)$$

La distribution du déplacement horizontal totale de la machine S/R (figure 7) est la convolution des distributions de  $SC_{H1}$  et  $SC_{H2}$ . Après calcul de ce produit de convolution, on trouve l'expression suivante :

$$g_c(k) = \begin{cases} \frac{k}{t_p t_h} & k < \min(t_p, t_h) \\ \frac{1}{\max(t_p, t_h)} & k < \max(t_p, t_h) \\ \frac{t_p + t_h - k}{t_p t_h} & k < t_p + t_h \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (12)$$

La distribution de déplacement vertical est comme suit :

$$h_c(k) = \begin{cases} \frac{1}{t_v} & k < t_v \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (13)$$

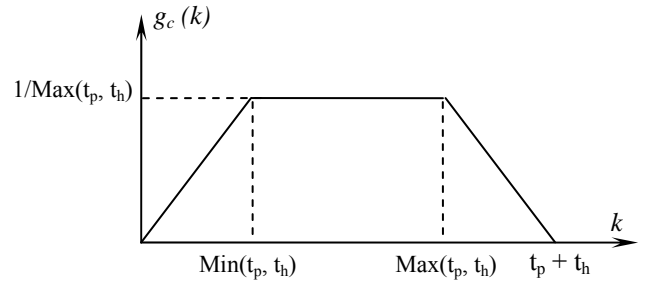


Figure 7. Distribution aléatoire de la variable  $SC_H$  modélisant le déplacement horizontal de la machine S/R.

L'expression de la distribution du déplacement vertical (13) est une distribution continue approchée, obtenue à partir d'une distribution discrète, de la même manière que pour les expressions continues de  $SC_{H1}$  et  $SC_{H2}$ .

Puisque le temps de déplacement total de la machine S/R est le maximum entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical (déplacement de Tchebychev).

$$SC = \text{Max}(SC_H, SC_V) \quad (14)$$

La distribution  $f(k)$  du temps de simple cycle de la machine S/R a donc l'expression suivante :

$$f_c(k) = g_c(k).H_c(k) + h_c(k).G_c(k) \quad (15)$$

$$\text{avec } G_c(k) = P(SC_H < k) = \int_{-\infty}^k g_c(t)dt$$

$$\text{et } H_c(k) = P(SC_V < k) = \int_{-\infty}^k h_c(t)dt$$

sont respectivement les fonctions de répartition des déplacements horizontal et vertical.

Quatre cas se présentent lors du calcul de la distribution du temps de déplacement (temps de cycle) de la machine S/R (Figure 8).

- 1<sup>er</sup> cas :  $t_v < \min(t_p, t_h)$
- 2<sup>ième</sup> cas :  $\text{Min}(t_p, t_h) < t_v < \text{Max}(t_p, t_h)$
- 3<sup>ième</sup> cas :  $\text{Max}(t_p, t_h) < t_v < t_p + t_h$
- 4<sup>ième</sup> cas :  $t_v > t_p + t_h$

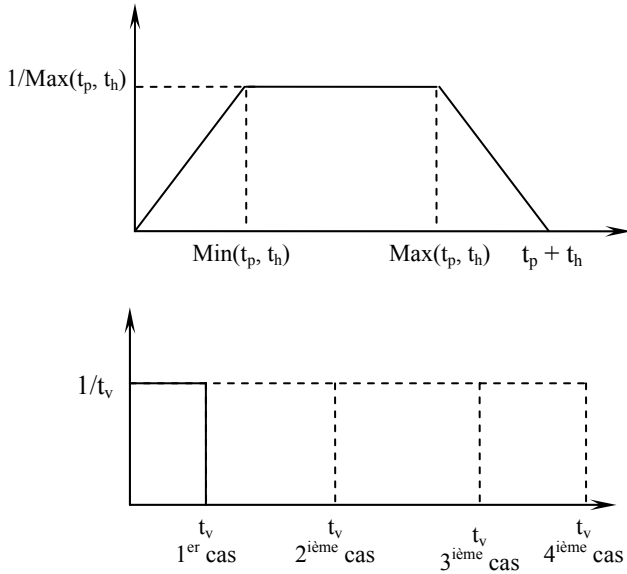


Figure 8. Les quatre cas se présentant lors du calcul du temps de cycle de la machine S/R.

pour chacun des quatre cas cités ci-dessus, nous obtenons une expression mathématique du temps de cycle, comme suit :

$$\text{ESC} = \begin{cases} tp + th + \frac{tv^3}{12 tp th} & 0 < tv < \min(tp, th) \\ tp + th + \frac{tv^3}{12 tp th} - \frac{(tv - \min(tp, th))^4}{12 tp th tv} & \min(tp, th) < tv < \max(tp, th) \\ tp + th + \frac{tv^3}{12 tp th} - \frac{(tv - \min(tp, th))^4}{12 tp th tv} - \frac{(tv - \max(tp, th))^4}{12 tp th tv} & \max(tp, th) < tv < tp + th \\ tv + \frac{2 (tp + th)^2 - tp th}{6 tv} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (16)$$

Soit la fonction de Heaviside, qu'on note, définie comme un échelon unitaire qui vaut :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (17)$$

En utilisant la fonction de Heaviside, les quatre équations (16) peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\text{ESC} = \begin{cases} tp + th + \frac{tv^3}{12 tp th} - \frac{H(tv - th) (tv - \min(tp, th))^4}{12 tp th tv} - \frac{H(tv - tp) (tv - \max(tp, th))^4}{12 tp th tv} & tv < tp + th \\ tv + \frac{2 (tp + th)^2 - tp th}{6 tv} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (18)$$

#### 4.1. Expression du temps de double cycle

Comme précédemment mentionné, le temps de double cycle est la somme du temps de double cycle et du temps moyen de déplacement entre deux casiers de l'AS/RS.

Comme pour l'expression discrète, deux cas peuvent se présenter

1<sup>er</sup> cas : les casiers de stockage et de déstockage dans un même cycle se trouvent sur une même allée. Ce cas a déjà été étudié par Bozer et Whithe (1984)

2<sup>ième</sup> cas : Les casiers de stockage et de déstockage se trouvent sur deux allées différentes. Ce cas est schématisé sur la figure 9. qui montre une vue de haut d'un AS/RS multi-allée.

Supposant que le déplacement doit se faire entre le casier de coordonnées  $(X_1, Y_1)$  de l'allée  $K_1$  et le casier de coordonnées  $(X_2, Y_2)$  de l'allée  $K_2$ . Notant que les variables  $X_1, X_2, Y_1, Y_2, K_1,$  et  $K_2$  sont des durées de déplacement.

Le temps de déplacement horizontal ( $TB_H$ ) entre ces deux casiers peut s'écrire sous la forme.

$$TB_H = X_1 + X_2 + |K_1 - K_2| \quad (19)$$

Si on considère en plus que les deux casiers de stockage et de déstockage sont aléatoirement choisis. Ceci implique que  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, K_1$  et  $K_2$  sont des variables aléatoires dont les distributions sont uniformes discrètes.

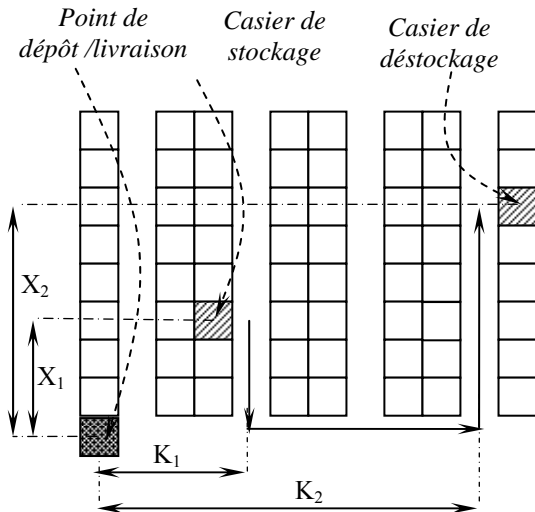


Figure 9. Temps de déplacement horizontal entre deux casiers

De la même manière que pour l'expression du simple cycle, une expression du double cycle peut être développée en approchant les distributions discrètes par des distributions continue et en calculant la distribution du temps moyen de déplacement entre deux casiers et

puis sa moyenne. Ceci est l'objet d'un travail en cours, que nous espérons présenter dans un future proche.

### 5. VALIDATION DE L'EXPRESSION MATHÉMATIQUE DU TEMPS DE SIMPLE CYCLE

Pour valider les l'expressions mathématiques proposées du temps de simple cycle, nous avons effectué une simulation dans laquelle nous avons comparé les résultats donnés par l'expression continue avec ceux donnés par l'expression discrète, et ceci pour une variété de configurations d'AS/RS multi-allées.

Les résultats de cette simulation sont illustrés sur le tableau 1. Elles ont aussi été schématisées sur le graphe de la figure 10.

Les résultats de la simulation montrent que l'équation continue donne des résultats très proches de l'équation discrète. La plus grande erreur relative s'élève à 7%. Cette erreur est importante pour les petits systèmes et devient très faible pour les grands systèmes. Ceci est prévisible puisque l'expression continue est une approximation continue de grandeurs discrètes.

Numéro de configuration	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Le nombre de casiers N	200	200	400	400	1000	1000	40000	40000	100000	100000
Le nombre de racks M	2	8	4	10	4	4	4	10	100	100
Le nombre de casiers en ligne $N_L$	10	5	10	4	5	10	100	50	10	20
Le nombre de casiers en Colonne $N_H$	10	5	10	10	50	25	100	80	100	50
Le temps de simple cycle donné par l'expression discrète	6.7	7.6	7.77	9.19	24.79	13.33	67.45	47.31	51.81	31.57
Le temps de simple cycle donné par l'expression continue	6.35	7.05	7.31	8.57	24.62	13.06	67.1	46.97	51.57	31.09
Erreur %	5.224	7.237	5.920	6.746	0.6858	2.026	0.5189	0.7187	0.4632	1.520

Tableau 1. Comparaison entre les résultats donnés par l'expression continue du temps de simple cycle et ceux donnés par l'expression discrète.

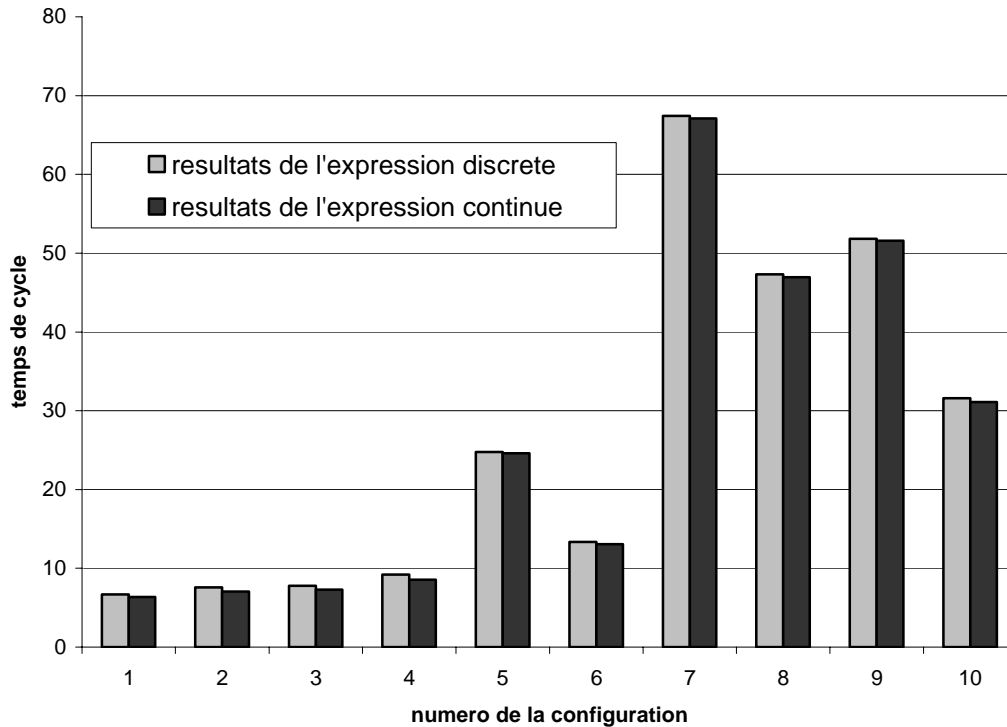


Figure 10. Comparaison des résultats de l'équation continue et l'équation discrète du temps de simple cycle

## 6. CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail, nous avons présenté des expressions mathématiques discrètes modélisant les temps de simple et de double cycle d'un AS/RS multi-allées. Ces expressions exactes peuvent être utilisées pour la validation d'autres modèles de ce même système. Nous avons ensuite présenté une expression analytique continue modélisant le temps de simple cycle d'un AS/RS multi-allée et nous avons donné une première idée pour développer une expression mathématique modélisant le temps de double cycle pour le même système. Cette procédure du calcul de temps de cycle peut être appliquée à n'importe quelle configuration d'AS/RS. Les résultats donnés par l'équation analytique continue ont été validés par l'expression exacte discrète.

## REFERENCES

Hwang H, Ko C.S. 1988, A study on multi-aisle system served by a single storage/retrieval machine. *Int J Prod Res* 26(11): 1727–1737

Tone Lerher, Matjaz Sraml, Janez Kramberger, Iztok Potrc, Matej Borovinsek and Blaz Zmazek. 2004 Analytical travel time models for multi aisle automated storage and retrieval systems. *Int J Adv Manuf Technol*.

Bozer, Y. A. et White J. A. 1984. Travel time for automated storage/retrieval systems. *IIE Transactions*, 16(4), 329-338.

Han, M.H., McGinnis, L.F., Shieh, J. S., and White, J.A., 1987, On sequencing retrievals in an automated storage/retrieval system. *IIE Transactions*, 19, 56-66.

Hausman, W.H., Schwarz, L. B., and Graves, S. C., 1976, Optimal storage assignment in automatic warehousing systems. *Management Science*, 22 (6), 629- 638.

Sari. Z, Saygin. C et Ghouali. N, 2004 Travel-time models for flow-rack automated storage and retrieval systems, *Int J Adv Manuf Technol*, 25: 979–987.

Sari. Z, 2003 Modélisation, analyse et évaluation des performances d'un AS/RS à convoyeur gravitationnel, thèse de doctorat, université Abou-bekr Belkaïd Tlemcen, Algérie.

Sari. Z 1998 Expressions analytiques discrètes de simple et double cycle d'un AS/RS multi-allées. Rapport interne, LAT, Université Abou-Bekr Belkaïd, Tlemcen, Algérie.