

MODELISATION ET ANALYSE DE LA CIRCULATION DE VEHICULES PAR RESEAUX DE PETRI LOTS

I. DEMONGODIN, Z. HZAMI

LSIS

Campus Saint Jérôme

Avenue Escadrille Normandie Niemen

13397 Marseille Cedex 20

isabel.demongodin@lsis.org, zakaria.hzami@lsis.org

RESUME : *Cet article présente une approche de modélisation et de conception de circulation de véhicules par le formalisme réseaux de Petri lots, outil permettant à l'origine de décrire un comportement très détaillé de la circulation des produits sur des convoyeurs à accumulation. L'idée développée dans ce papier est d'étudier la dynamique de circulation de véhicules par des aspects fluidiques et événementiels afin de déterminer et d'évaluer le contrôle de congestion de ces systèmes de transports. En adoptant une adéquate discrétisation spatiale et une représentation macroscopique / microscopique de ces systèmes, un ensemble de modèles élémentaires de circulation sont proposés (section simple sens, section double sens, intersection convergente et/ou divergente, etc.). Par composition de ces modèles élémentaires de réseaux de Petri lots, le modèle global de flux de véhicules associé au modèle de commande des intersections est naturellement établi. Les techniques d'analyse liées aux réseaux de Petri lots (simulation, graphe d'évolution, etc.) permettent d'interpréter en termes de performance les propriétés du système modélisé. Finalement, les modèles élémentaires proposés dans cet article fournissent un cadre de modélisation hybride, modulaire et générique dédié à la représentation du flux de véhicules et à l'analyse de la congestion dans les réseaux de trafic urbains et routiers.*

MOTS-CLES : *modélisation hybride, réseaux de Petri lots, analyse, flux, congestion, trafic*

1. INTRODUCTION

Le contrôle de congestion, la régulation, l'optimisation, la modélisation et l'analyse des flux de véhicules constituent une problématique majeure du trafic urbain et routier (Papageorgiou, 1999). L'usage de plusieurs formes d'interactions entre diverses entités utilisant une infrastructure commune engendre facilement des goulots d'étranglement à chaque fois que la demande dépasse la capacité de l'infrastructure (Hoogendoorn et Bovy, 2001). L'apparition d'inquiétudes envers l'environnement, les limites économiques et les ressources physiques, sont les raisons majeures pour lesquelles l'expansion de l'infrastructure du transport disponible ne peut plus être la seule réponse à l'augmentation du besoin de mobilité. Le contrôle de la congestion, c'est-à-dire la maximisation du flux de véhicules par des actions temps – réel, est donc devenu l'une des problématiques les plus délicates à aborder dans le domaine du trafic urbain et routier (Papageorgiou *et al.* 2003). Pour analyser ce problème de congestion, une grande variété de modèles, de méthodes et d'architectures a déjà été proposée. Parmi la classe d'outils qu'offrent les modèles de systèmes à événements discrets et de systèmes dynamiques hybrides, les réseaux de Petri hybrides (Le Bail *et al.*, 1991), s'avèrent bien adaptés à la modélisation et à

l'analyse des performances et du contrôle des systèmes à flux. Cette classe de réseaux allie les avantages d'une modélisation discrète pour représenter la commande à travers l'utilisation des réseaux de Petri discrets temporisés, et ceux de la modélisation continue par l'utilisation des réseaux de Petri continus pour représenter les flux. Plusieurs auteurs utilisent cet outil hybride afin de modéliser et analyser les systèmes de transports. Outre les aspects discrets de ce modèle, les réseaux de Petri continus à vitesse constante, utilisés par Di Febbraro et Sacco (2004) ont montré leur puissance de modélisation sur le trafic urbain de la ville de Turin en Italie. En prenant une première extension de ce modèle, Tolba *et al.* (2005) proposent l'utilisation des réseaux de Petri continus à vitesse variable afin de représenter les phénomènes de congestion. Or, les réseaux de Petri Lots (David et Alla, 2001) sont venus étendre la classe de ces modèles hybrides par la définition d'un nouveau type de nœud, le nœud lot. Ils permettent de par leur formalisation et leur dynamique hybride (à événements discrets et à temps continus) de représenter très finement les éléments de transfert avec possibilité d'accumulation des entités (Demongodin, 2001). La notion de lot introduite dans ces modèles, c'est-à-dire une entité ayant des caractéristiques continues telles que densité, longueur et position, a déjà permis de représenter les systèmes de production à haute

cadence comportant des éléments de transfert à accumulation (par exemple les convoyeurs). Depuis sa première définition, ce modèle a été repris et étendu par différents auteurs : Wang et Zhou (2004) définissent les réseaux de Petri lots stochastiques, (Kaakai *et al.*, 2005) utilisent le modèle lot pour la modélisation et l'évaluation des pôles d'échanges multimodaux, etc. L'intérêt grandissant de la communauté vis-à-vis de ce modèle hybride et le soucis de modéliser finement le comportement des véhicules afin d'étudier le contrôle de congestion, nous a finalement incité à étudier la représentation macroscopique / microscopique des systèmes de transport. En adoptant une adéquate discrétisation spatiale, cet article présente un ensemble de modèles élémentaires de circulation de véhicules (section simple sens, section double sens, intersection convergente et/ou divergente, etc.) basé sur le modèle réseaux de Petri lots (RdPLots). Par composition de ces modèles élémentaires en fonction de la typologie du système de transport, le modèle global de flux de véhicules associé au modèle de commande des intersections est naturellement établi. Les techniques d'analyse liées aux RdPLots permettent d'interpréter en termes de performance les propriétés du système modélisé. Ainsi, les modèles élémentaires proposés dans cet article fournissent un cadre de modélisation hybride, modulaire et générique dédié à la représentation du flux de véhicules et à l'analyse de la congestion dans les réseaux de trafic urbains et routiers.

Ce papier est organisé comme suit : les sections 2 et 3 introduisent respectivement quelques rappels sur les modèles de circulation de véhicules et le formalisme des réseaux de Petri Lots (RdPLots) ; la section 4 présente la modélisation par RdPLots de systèmes de transport à travers ses différentes structures élémentaires. Finalement, deux exemples illustratifs exposent la technique d'assemblage des modèles et l'analyse temporelle par l'établissement du graphique d'évolution.

2. MODELES DE CIRCULATION

Les modèles de circulation des véhicules peuvent être classifiés suivant le niveau de détail accordé à la représentation. Parmi ces modèles nous retrouvons le modèle macroscopique qui dérive directement de l'analogie entre l'écoulement de véhicules et celui de médias continus (fluides et gaz), rapportant ainsi le modèle d'écoulement à un nombre limité d'équations (Hoogendoorn et Bovy, 2001).

2.1. Variables comportementales de la circulation

Les variables indépendantes d'un modèle de circulation sont : la position x et le temps t . Pour introduire les variables dépendantes du flux de la circulation, on considère généralement une portion de route $[x, x+dx]$ dite *section*. La majorité des modèles macroscopiques de la circulation décrivent la dynamique de :

- la densité $d = d(x, t)$: nombre de véhicules prévu sur une section $[x, x+dx]$ par unité de longueur à l'instant t .

- le flux $f = f(x, t)$: nombre de véhicules prévu traversant x durant $[t, t + dt]$ par unité de temps.
- la vitesse $v = v(x, t)$: vitesse prévue de véhicules.

2.2. Lois de flux de la circulation

Le flux de la circulation est caractérisé par une représentation continue, une loi de conservation et un diagramme fondamental.

La représentation continue traduit dans l'espace et le temps l'aspect continu des variables : le flux $f(x, t)$, la densité $d(x, t)$ et la vitesse $v(x, t)$ définie par :

$$v(x, t) = \frac{f(x, t)}{d(x, t)}$$

La loi de conservation désigne la variation du nombre de véhicules sur la section $[x_1, x_2]$ durant une période $[t_1, t_2]$ et s'exprime comme la différence entre le nombre de véhicules entrant en x_1 et celui la quittant en x_2 durant la même période. Formellement, la loi de conservation est donnée par :

$$\frac{\partial d(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = 0$$

Quant au diagramme fondamental, il s'agit d'une relation phénoménologique (issue de la théorie liée à l'hydrodynamique) qui traduit la relation entre le flux et la densité par une fonction F :

$$f(x, t) = F(d(x, t))$$

Parmi l'ensemble des relations proposées (qui font toujours à l'heure actuel un sujet de recherche prisé), nous nous sommes basés sur celle définie par May et Keller (1967) :

$$F(d(x, t)) = v_i d(x, t) \left(1 - \left(\frac{d(x, t)}{d_{max}} \right)^r \right)^s$$

où d_{max} est la densité maximale de la section, v_i est la vitesse maximale sur la section (vitesse d'entraînement) et r, s sont des paramètres réels positifs.

Cette équation est caractérisée d'une part par une densité critique d_{cr} pour laquelle la dérivée s'annule et d'autre part par le flux maximal correspondant à la densité critique (voir figure 1, ci-dessous).

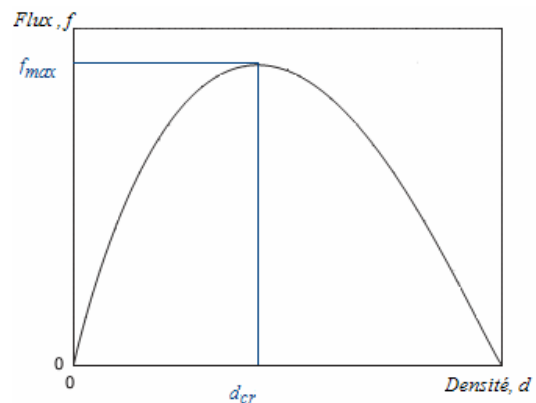


Figure 1. Exemple de diagramme fondamental

3. RESEAUX DE PETRI LOTS

Le réseau de Petri lots introduit dans le formalisme de base du réseau de Petri hybride défini par David et Alla, une nouvelle notion appelée lot. En d'autres termes, l'entité lot est caractérisée par un ensemble d'éléments qui circulent à travers un système. Formellement on définit un lot cohérent interne, $LCI_i(t) = (s_i(t), d_i(t), x_i(t))$, à un instant donné t , comme un groupe d'entités réparties sur une longueur s_i , avec une densité d_i , et dont la position du début est à la coordonnée x_i . Ces trois variables prennent leur valeur dans les réels positifs. Cette entité hybride dans son comportement a permis d'étendre le modèle RdPH par l'introduction d'un nouveau type de nœud (place lot et transition lot) pour former le réseau de Petri lots.

3.1. Formalisme du RdPLots

Un *réseau de Petri lot* (RdPLots) (Demongodin, 2001) est défini par $B = (R, f, c, Tempo, M_0)$ tel que :

- R est un réseau de Petri ; $R = (P, T, Pré, Post)$, avec P ensemble des places, T ensemble des transitions, $Pré$ la matrice d'incidence avant et $Post$ la matrice d'incidence arrière.
- $f: P \cup T \rightarrow \{D, C, L\}$, appelée fonction lot, indique pour chaque nœud s'il est discret, continu ou lot.
- $c: P \rightarrow IR^+ \times IR^+ \times IR^+$ avec $f(P) = L$;
 $P_i \rightarrow \{V_i, d_{maxi}, S_i\}$
est la fonction caractéristique qui associe à chaque place lot trois valeurs continues et constantes : une vitesse d'entraînement, une densité maximale et une longueur.
- $Tempo$ est l'application qui associe à chaque transition une valeur temporelle.
- M_0 est le marquage initial.

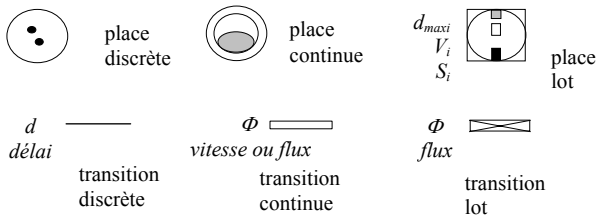


Figure 2. Nœuds d'un réseau de Petri lots

D'une part, la notion de temps dans ce modèle est représentée sur les transitions par l'application *Tempo*. Plus précisément, un délai d (unité de temps) est associé à chaque transition discrète, tandis qu'un flux maximal d'écoulement Φ (nombre d'entités / unité de temps) est associé à chaque transition continue et transition lot (pendant la dynamique du modèle, un flux instantané $\varphi(t)$ est aussi associé à ces transitions. Ce flux est constant entre deux événements) (Voir (Demongodin, 2001) pour le calcul des flux instantanés d'un RdPLots). D'autre part, à toute place lot est associée en interne une formalisation hybride. Ce multimodèle continu à commutation est géré par deux régimes de fonctionnement :

le régime libre qui correspond à un système d'équations linéaires et le régime accumulé régi par un système d'équations non linéaires. Le marquage $M(t)$ est défini, à un instant donné t , par un nombre entier pour une place discrète, un réel positif pour une place continue et à travers un ensemble ordonné de lots cohérents internes pour une place lot.

On appelle *lot de sortie*, noté $LCIS$, le lot dont sa coordonnée, x , est égale à la longueur de la place lot (lot $LCIS_1$ de la figure 3). On dira qu'un lot est *totalemtent accumulé* si sa densité est égale à la densité maximale de la place lot.

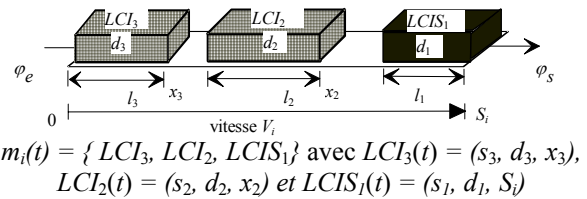


Figure 3. Marquage de la place lot P_i et lots cohérents internes.

3.2. Dynamique des lots et du RdPLots

Suivant le régime de la place lot P_i , le système d'équations qui gouverne l'évolution de l'élément de transfert est modifié, passant du régime libre au régime accumulé selon l'existence et la nature d'un lot de sortie. Un lot est défini dans un *état libre* si ses éléments circulent librement à la vitesse d'entraînement ; un lot est dans un *état accumulé* si ses éléments avancent en fonction du flux de sortie de la place lot et ne circulent plus à la vitesse d'entraînement ; une place lot est en *régime libre* si tous ses lots sont en régime libre ; une place lot est en régime d'accumulation si son lot de sortie est en état accumulé ou totalement accumulé.

A chaque place lot, un flux d'entrée $\varphi_e(t)$ et un flux de sortie $\varphi_s(t)$, correspondant respectivement au flux instantané de sa transition lot amont et de sa transition lot aval peuvent lui être associés. La validation de ces transitions permet la création ou la sortie de lots dans les places connectées. Trois types de lots évoluent donc à l'intérieur d'une place : le lot en création, le lot qui n'est ni en création ni en sortie de la place et le lot de sortie (voir figure 3), resp. lot LCI_3 , lot LCI_2 , lot $LCIS_1$).

Pour une place lot P_i ($c(P_i) = \{V_i, d_{maxi}, S_i\}$) en régime libre et entre deux événements datés à t_0 et à t_1 , un lot $LCI_i(t) = (s_i(t), d_i(t), x_i(t))$ à ses variables d'état régies par :

- pour le lot en création :

$$\dot{d}_i(t) = 0 \text{ et } \dot{s}_i(t) = \dot{x}_i(t) = V_i.$$

sous les conditions initiales :

$$d_i(t_0) = \frac{\varphi_e(t_0)}{V_i} ; s_i(t_0) = x_i(t_0) = 0.$$

- pour un lot qui circule :

$$\dot{d}_i(t) = \dot{s}_i(t) = 0 \text{ et } \dot{x}_i(t) = V_i.$$

sous les conditions initiales :

$$d_i(t_0), s_i(t_0) \text{ et } x_i(t_0).$$

- pour le lot de sortie :

$$\dot{d}_i(t) = 0, \dot{s}_i(t) = -V_i \text{ et } \dot{x}_i(t) = 0.$$

sous les conditions initiales :

$$d_i(t_0), s_i(t_0) \text{ et } x_i(t_0) = S_i$$

Dans le cas du régime libre, un lot créé à la date t_0 , se déplace dans la place lot à la vitesse V_i en gardant la même valeur de densité. Il parvient à la sortie après avoir parcouru la longueur de la place et il peut alors, si la transition en aval est validée, sortir en continu. Pour sortir librement, sans variation de sa densité, il est donc supposé dans le modèle que le flux $\phi_s(t)$ soit supérieur ou égal au flux du lot de sortie, i.e. $\phi_s(t) \geq d_i(t).V_i$. Finalement, le lot créé est rajouté au marquage de la place lot et lorsqu'un lot est totalement sorti ($s_i(t) = 0$ et $x_i(t) = S_i$) il est retiré du marquage de la place lot.

Si le lot ne peut pas sortir librement, il s'accumule de manière linéaire jusqu'à atteindre la densité maximale de la place et la variation de sa longueur devient alors fonction du flux de sortie.

La dynamique d'un RdPLots, quant à elle, est gouvernée par les règles d'évolution du RdP hybride pour les nœuds discrets et continus. Comme la partie discrète est modélisée par un RdP discret T-temporisé, une politique de pré-sélection est choisie, en d'autres termes la notion de marques réservées apparaît. Le marquage des places discrètes et continues est donc décomposé en deux types de marquages, le marquage réservé M^r et le marquage non réservé M^n . Seul le marquage non réservé permet de valider les transitions. Pour les places lots, les règles d'évolution suivent la formalisation hybride d'évolution des lots. Plus particulièrement, la progression et les propriétés instantanées (suppression, fusion et éclatement) des lots modifient l'état global du système et génèrent des événements susceptibles de faire changer le modèle d'évolution. En régime libre, cinq événements doivent être pris en compte dans la dynamique du RdPLots :

- l'arrivée d'un lot en sortie, notée $LCI(t) = LCIS(t)$ avec $x(t) = S$;
- la destruction d'un lot, $LCIS(t) = \emptyset$ avec $s_i(t) = 0$;
- le franchissement d'une transition discrète, T_j ;
- le marquage non réservé d'une place continue qui devient nul, $m_i^n(t) = 0$;
- la validation d'une transition discrète, $m_i^n(t) = a$.

En régime accumulé, deux autres événements sont considérés : rencontre de deux lots et totale accumulation d'un lot.

3.3. Méthodes d'analyse du RdPLots

Les RdPLots autorisent une analyse quantitative, via la simulation, des systèmes de transfert à temps variable, dont la rapidité d'exécution ne dépend pas du temps réel pendant lequel le système est analysé (pas d'avancement

temporel fonction d'une horloge), mais seulement du nombre d'événements significatifs qui s'y passent (évolution purement événementielle). L'analyse des systèmes modélisés par des réseaux de Petri lots peut être complétée par une analyse algébrique (bornitude, vivacité) via le calcul des invariants ou encore par l'analyse du graphe d'évolution afin d'en déduire les performances du système (temps de cycle, états transitoires et permanents (ou stables), etc.).

Outre les techniques issues de l'algèbre linéaire pour le calcul des invariants et la détermination des propriétés de bornitude et vivacité, un autre moyen d'analyse de la dynamique du système passe par la construction du graphe d'évolution. Le nœud de ce graphe (voir figure 4) correspond à un état invariant, défini par la constance des marquages des places discrètes, des marques réservées des places discrètes et continues qui se trouvent en amont de transitions discrètes et des flux instantanés des transitions. Les arcs orientés de ce graphe d'évolution sont étiquetés avec les événements qui procurent le changement de l'état global et par la durée de l'état.

Partie discrète	Partie continue	Partie lot	
M^D (total)	M^C au début	M^L au début	$LCI_n = [s_n, d_n, x_n]$
M^D réservé	ϕ^C M^C réservé	ϕ^L R	

M^D : marquage des places discrètes ; M^C : marquage des places continues ; M^L : marquage des places lots.

V^C : flux associés aux transitions continues ; ϕ^L : flux associés aux transitions lots ;

R : régime des places lots ($r_i = A$ ou L).

LCI_n : caractéristiques des lots cohérents internes composant le marquage des places lots

Figure 4. Représentation d'un état invariant d'un RdPLots

4. MODELES ELEMENTAIRES RDPLOTS DE CIRCULATION

Cette section propose une modélisation des systèmes de transport basée sur les RdPLots. Cette modélisation nécessite la division d'une route en plusieurs sections.

4.1. Modèles de sections

Ce cadre de modélisation repose sur une discrétisation spatiale des paramètres : cette discrétisation consiste à diviser chaque portion de route en N sections $[x_{i-1}, x_i]$ de longueur $(l_i)_{i=1..N}$, ayant des propriétés intrinsèques. Plus précisément, la route sera divisée en sections lorsque la densité maximale autorisée de véhicules change (due par exemple à une route à trois voies qui passe à deux voies) ou lorsque la vitesse maximale autorisée varie (par exemple une route limitée à 90km/h puis à 50km/h, sans que sa structure ne change). A partir de cette première approche de modélisation basée sur la topologie du système physique, plusieurs configurations peuvent se présenter.

4.1.1 Cas de section à sens unique

Le modèle physique adopté pour une section est est :

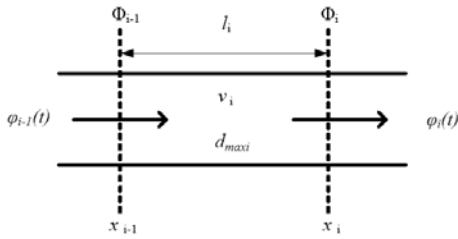


Figure 5. Modèle physique d'une section à sens unique

avec :

- l_i : longueur de la section.
- v_i : vitesse d'entraînement de la section.
- d_{maxi} : densité maximale de la section.
- Φ_i (resp. Φ_{i-1}) désigne le flux maximal de sortie (resp. d'entrée) de la section.
- $\varphi_i(t)$ (resp. $\varphi_{i-1}(t)$) représente en fonction du temps, le flux sortant (resp. entrant) de la section i .
- x_i et x_{i-1} désignent la position.

La capacité maximale d'accueil d'une section sera donnée par : $C_{maxi} = d_{maxi} \cdot l_i$.

Ainsi, une section définie par $S_i = \{l_i, v_i, C_{maxi}, \Phi_e, \Phi_s\}$ peut être modélisée par le modèle RdPLot suivant :

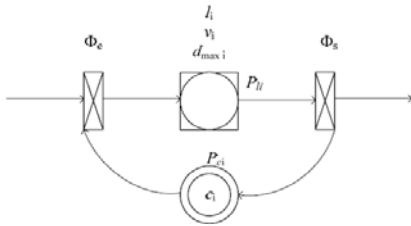


Figure 6. Modèle RdPLots d'une section à sens unique

La longueur et la capacité maximale en véhicules de la section sont des paramètres fixes. Ainsi, il est possible d'affecter pour toute section une densité maximale, $d_{maxi} = C_{maxi}/l_i$. Cette densité, exprimée en véhicules/unité de longueur, représente une accumulation totale de véhicules et est indépendante de la vitesse d'entraînement.

4.1.2 Cas de section à double sens

Dans le cas d'une section ayant deux voies, la capacité totale est partagée entre les deux voies (à priori on choisit un partage équitable). Physiquement, cette section peut être représentée comme suit:



Figure 7. Modèle physique d'une section à double sens

Ainsi une section double sens peut être représentée par le RdPLots de la figure 8.

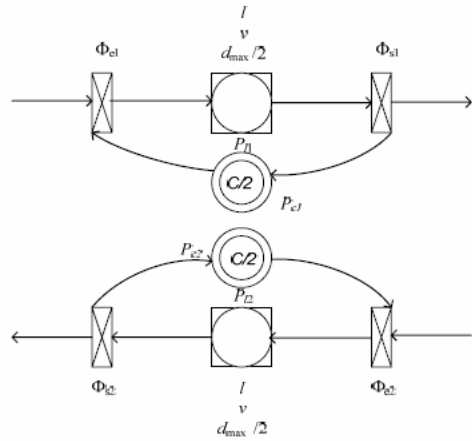


Figure 8. Modèle RdPLots d'une section à double sens

4.1.3 Modèle de deux sections consécutives

Considérons un ensemble de sections qui se suivent, chaque section a des caractéristiques intrinsèques (longueur, vitesse, densité). Soient S_i et S_{i+1} deux sections consécutives définies par : $S_i = \{l_i, v_i, C_{maxi}, \Phi_{ei}, \Phi_{si}\}$ et $S_{i+1} = \{l_{(i+1)}, v_{(i+1)}, C_{max(i+1)}, \Phi_{e(i+1)}, \Phi_{s(i+1)}\}$.

Lors de la modélisation, une contrainte à respecter concerne le point suivant : le flux sortant de la section amont ne doit pas être supérieur au flux entrant dans la seconde aval. Autrement dit, le flux de franchissement de la transition lot commune aux deux sous modèles (transition lot de jonction créée par fusion de deux modèles de sections sens unique) est défini par le minimum des flux maximaux sortant de la section S_i et entrant dans la section $S_{(i+1)}$, soit : $\Phi = \min(\Phi_{si}, \Phi_{e(i+1)})$.

Un exemple de modélisation de trois sections consécutives est fourni et étudié au paragraphe 5.1 de cet article.

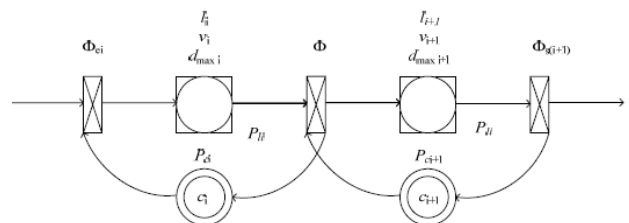


Figure 9. Modèle RdPLots de jonction de 2 sections

4.2. Modèles d'intersection

Considérons maintenant un réseau de transport comportant des structures plus complexes comme la convergence ou la divergence de sections, c'est-à-dire des parties communes de route. Soit une section S_j commune à plusieurs sections en sortie et/ou en entrée, section définie par une longueur L_j et une capacité C_j (voir figure 10).

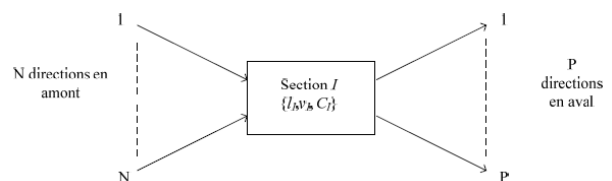


Figure 10. Partie commune à plusieurs sections

Une partie commune peut être modélisée soit par :

- une section indépendante possédant une longueur, une densité et une vitesse d'entraînement.
- le partage de cette partie entre les différentes sections de sortie de manière relative aux particularités du réseau.

En effet, à l'approche d'intersection et à la sortie, les vitesses autorisées sont réduites (resp. augmentées) pour respecter une vitesse limite dans la portion de l'intersection (exemple : 90km/h ; puis 50km/h avant l'intersection, pendant et après ; puis a nouveau 90km/h).

Dans le dernier cas, c'est-à-dire en utilisant une approche de partage, la capacité et la longueur de la section commune S_i devront être partagées entre les différentes sections sortantes de manière égale, à priori. Cette approche permet de minimiser la taille du modèle global étant donné qu'il n'y a pas d'ajout de places et de transitions mais que les caractéristiques de la partie commune sont considérés dans les paramètres associés à chacune des sections de sortie.

Considérons les P sections de sortie caractérisées par $S_i = \{l_i, v_i, C_i\}$ pour $i = 1$ à P . Sous l'hypothèse que toutes les sections de sortie ainsi que la section commune ont la même vitesse, en partageant la partie commune entre ces différentes sections et moyennant une discrétisation des formes géométriques, chaque section de sortie S_i ($i = 1$ à P) aura de nouveaux paramètres $S_i = \{l'_i, v_i, C'_i\}$ définis comme suit :

- $l'_i = l_i + (l_i/P)$
- $C'_i = C_i + (C_i/P)$

Pour le calcul des flux d'entrée et de sortie des sections, la topologie du réseau doit être prise en compte. Deux cas sont maintenant étudiés : la convergence et la divergence.

4.2.2 Cas de convergence

Considérons le modèle physique de convergence reporté sur la figure 11 en considérant deux sections d'entrée, $S_1 = \{l_1, v_1, C_{max1}, \Phi_{e1}, \Phi_{s1}\}$ et $S_2 = \{l_2, v_2, C_{max2}, \Phi_{e2}, \Phi_{s2}\}$, et une section de sortie $S_3 = \{l_3, v_3, C_{max3}, \Phi_{e3}, \Phi_{s3}\}$.

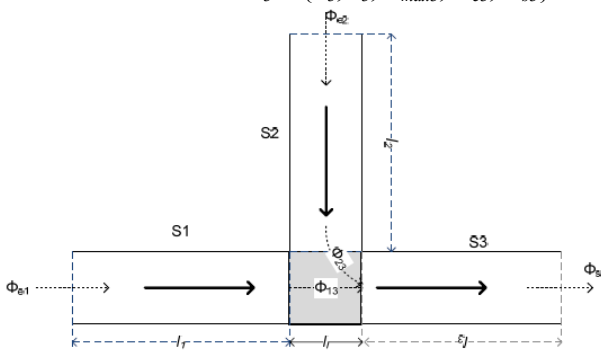


Figure 11. Modèle physique de convergence

La zone grisée de la figure 11 représente la partie commune. Etant donné qu'il y a une unique section de sortie, cette partie commune sera naturellement fusionnée avec la section 3, d'où :

- $l'_3 = l_3 + l_j$
- $C'_{max3} = C_{max3} + C_{max1}$

Nous pouvons donc associer à la convergence le RdPLots de la figure 12, sous les contraintes :

$$\Phi_{23} = \min(\Phi_{s2}, \Phi_{e3})$$

$$\Phi_{13} = \min(\Phi_{s1}, \Phi_{e3})$$

Φ_{ei} et Φ_{si} désignent respectivement les flux maximaux d'entrée et de sortie de la section S_i .

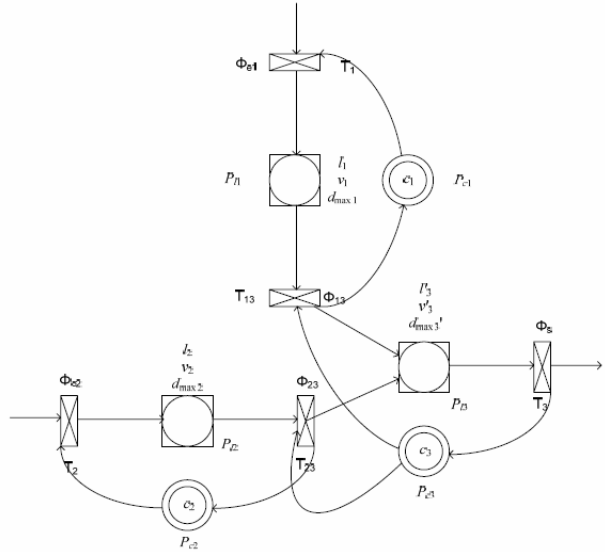


Figure 12. Modèle RdPLots d'une convergence

4.2.3 Cas de divergence

Le modèle physique adopté pour la modélisation de cette structure est reporté sur la figure 13. Rappelons l'hypothèse que les deux sections de sortie et que la zone commune ont les mêmes vitesses ($v_2 = v_1 = v_3$).

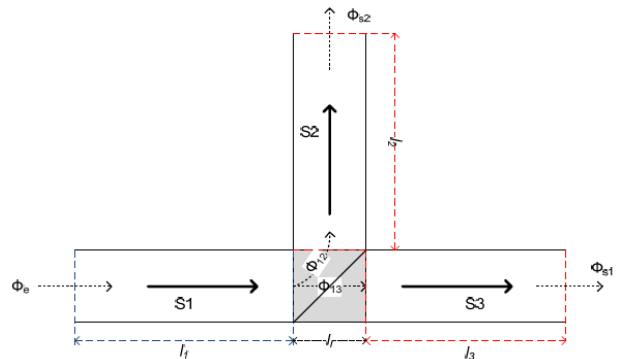


Figure 13. Modèle physique de divergence

La zone grisée désigne la partie commune aux deux sections de sortie, elle devra donc être partagée équitablement. Finalement, les nouveaux paramètres sont :

- $l'_2 = l_2 + l_j/2$; $C'_{max2} = C_{max2} + C_j/2$
- $l'_3 = l_3 + l_j/2$; $C'_{max3} = C_{max3} + C_j/2$

Si Φ_{ei} et Φ_{si} désignent respectivement les flux maximaux d'entrée et de sortie de la section S_i , le modèle RdPLots représentant la divergence est traduit sur la figure 14, sous les contraintes :

$$\Phi_{12} = \min(\Phi_{s1}, \Phi_{e2})$$

$$\Phi_{13} = \min(\Phi_{s1}, \Phi_{e3})$$

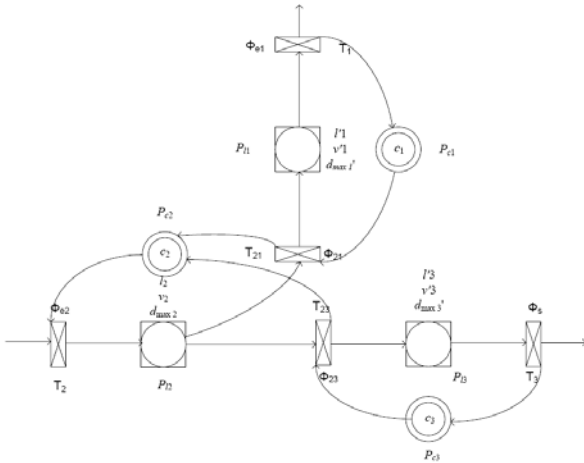


Figure 14. Modèle RdPLots d'une divergence

4.2.4 Exemple d'intersections : le rond point

Parmi les structures complexes que nous pouvons rencontrer sur les réseaux de transport, le rond point constitue une structure particulière formée de convergences et de divergences. Considérons par exemple, le modèle physique de rond point représenté sur la figure 15.

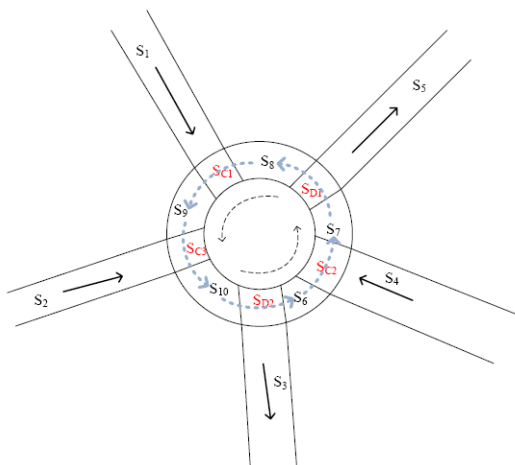


Figure 15. Modèle physique de rond point

En faisant abstraction de la forme géométrique circulaire du rond point, on peut le représenter par le modèle en sections de la figure 16. Ainsi cette structure comporte dix sections $\{S_1, \dots, S_{10}\}$ sens unique, trois sections communes $\{S_{c1}, S_{c2}, S_{c3}\}$ de convergence et deux sections de divergences $\{S_{d1}, S_{d2}\}$.

Sous l'hypothèse faite sur les vitesses (on suppose que la vitesse, notée v_r , est la même sur tout le rond point), à savoir : $v_3 = v_5 = v_r$, et sur les flux maximaux associés aux transitions lots de jonction (voir ci-dessous), le RdPLots de la figure 17 représente le modèle complet de cette structure d'intersection. Pour simplifier le modèle graphique, nous avons reporté les capacités maximales de chaque section suivant le concept du réseau de Petri à capacité limitée.

$$\begin{aligned} \Phi_{47} &= \min(\Phi_{e7}, \Phi_{s4}); & \Phi_{67} &= \min(\Phi_{e7}, \Phi_{s6}); \\ \Phi_{78} &= \min(\Phi_{s7}, \Phi_{e8}); & \Phi_{75} &= \min(\Phi_{s7}, \Phi_{e5}); \\ \Phi_{89} &= \min(\Phi_{e9}, \Phi_{s8}); & \Phi_{19} &= \min(\Phi_{e1}, \Phi_{s9}); \\ \Phi_{910} &= \min(\Phi_{e10}, \Phi_{s9}); & \Phi_{210} &= \min(\Phi_{e10}, \Phi_{s2}); \\ \Phi_{103} &= \min(\Phi_{e3}, \Phi_{s10}); & \Phi_{106} &= \min(\Phi_{e6}, \Phi_{s10}); \end{aligned}$$

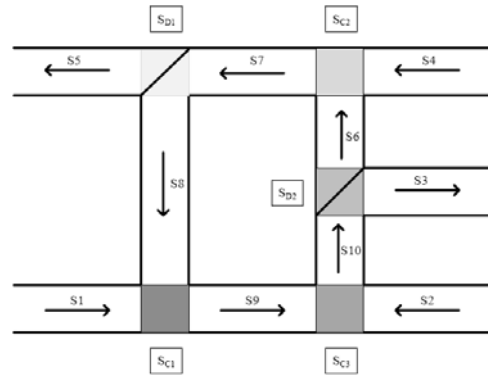


Figure 16. Décomposition du rond point en convergences et divergences de sections

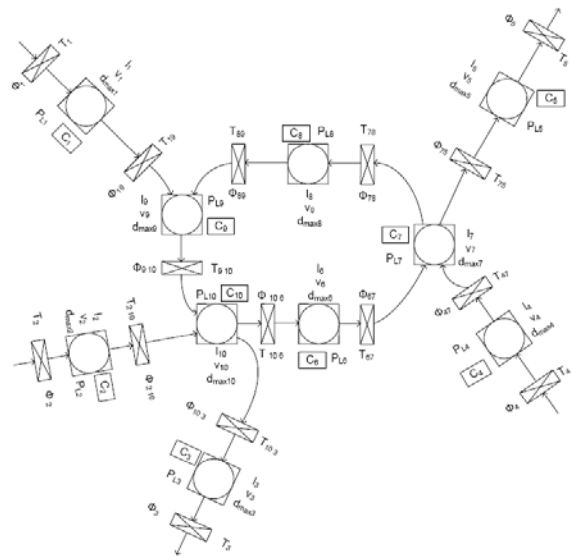


Figure 17. Modèle RdPLots du rond point

4.3. Modèles de contrôle

Afin de résoudre le problème de congestion dans les réseaux, il faut établir une stratégie de contrôle optimale menant à la minimisation de la durée totale passée par les véhicules sur ce réseau (Papageorgiou *et al.*, 2003). Bien que le contrôle optimal off-line peut être facilement formulé pour n'importe quelle portion de réseau routier, sa solution temps réel et sa réalisation présentent un certain nombre de difficultés. Dans ce cadre, nous nous sommes intéressés à deux types de contrôle temps réel :

- * contrôle par feux de signalisation dans le trafic urbain,
- * contrôle par les vitesses dans le trafic routier.

4.3.1 Contrôle par feux signalétiques

Les feux signalétiques représentent le principal contrôle dans les réseaux urbains. Ils ont été introduits à l'origine pour garantir la sécurité dans la gestion des différents flux de véhicules et de piétons. Néanmoins avec l'augmentation considérable du nombre de véhicules dans le trafic, on se rend compte que le contrôle mis en place pouvait mener (sous quelques conditions de sûreté) à des opérations plus au moins efficaces sur le réseau voir à des états de blocages. Aussi afin d'évaluer une stratégie

de contrôle, un feu de signalisation à deux états (vert – rouge ; arrêt – passage) peut être modélisé par la partie discrète T-temporisée du modèle RdPLots. Si l'on considère deux sections S_1 et S_2 dont les transitions de sortie sont respectivement notées T_{S1} et T_{S2} , une signalisation à deux états exclusifs en sortie des sections peut être représentée par la figure 18 où :

- P_1 (resp. P_2) désigne l'état de passage pour la section S_1 (resp. S_2) si le marquage est non nul.
- T_1 (resp. T_2) désigne le changement d'état de la signalisation, où la durée t_2 (resp. t_1) correspond à l'état de passage pour la section S_1 (resp. S_2).

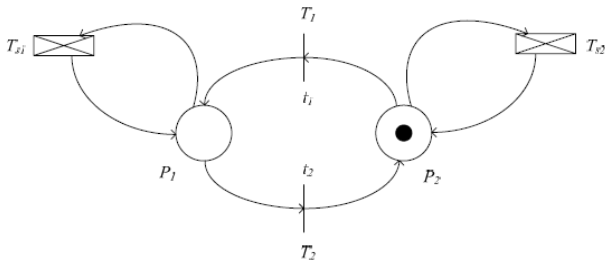


Figure 18. Contrôle discret de deux sections

A partir de cette modélisation, l'objectif d'un contrôle temps réel est de pouvoir faire varier la durée de signalisation en fonction de l'état réel du trafic (un exemple de contrôle par signalisation sera traité dans le paragraphe 5.2.) Pour ce faire, une première approche de synthèse de contrôle a été définie en utilisant le formalisme (max, plus) (voir (Garcia *et al.*, 2007)). Il est maintenant envisagé d'étendre ces résultats sur un modèle de type RdPLots.

4.3.2 Contrôle par les vitesses

Le principe du contrôle par les vitesses autorisées a été initialement défini aux Etats Unies, où sur chaque ligne de circulation, une vitesse est préconisée. En d'autres termes, suivant l'état du trafic (congestionné ou non), les vitesses des véhicules sur les routes sont régulées. Afin de représenter ce type de contrôle temps-réel sur les vitesses, il est nécessaire de faire varier les vitesses associées aux places lots ce qui entraîne par ailleurs une variation des flux maximaux des transitions lots. Aussi, sur la base des modèles proposés, il faut utiliser pour cela le formalisme des réseaux de Petri Lots commandés définis par Audry et Prunet (1994). Par ce concept et par la puissance de modélisation des phénomènes d'accumulation par le RdPLots, il est envisageable de réduire les vitesses en fonction du niveau du front d'accumulation des véhicules.

5. EXEMPLES

Deux exemples illustratifs sont traités dans cette partie : le cas de trois sections consécutives et celui d'une intersection contrôlée par feux signalétiques.

5.1. Trois sections consécutives

Inspiré de l'exemple issu de (Tolba *et al.*, 2005), considérons une portion de route décomposée en trois sections consécutives sens unique comme le montre la figure suivante.

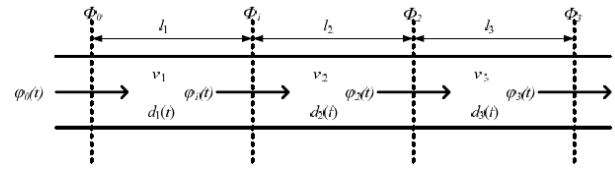


Figure 19. Modèle physique de 3 sections consécutives

Par composition des sous modèles de sections sens unique présentés au paragraphe 4.1, le modèle global est fourni dans la figure 20.

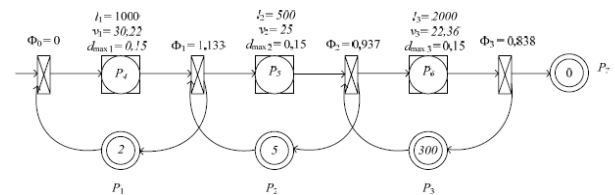


Figure 20. Modèle RdPLots de 3 sections consécutives

Initialement, la première section contient 148 véhicules, la seconde contient 70 et la troisième est vide. Le flux d'entrée de l'ensemble est supposé nul.

Afin d'analyser les performances de ce système, le graphe d'évolution (figure 21) est établi (voir paragraphe 3.3 pour la définition de ce graphe).

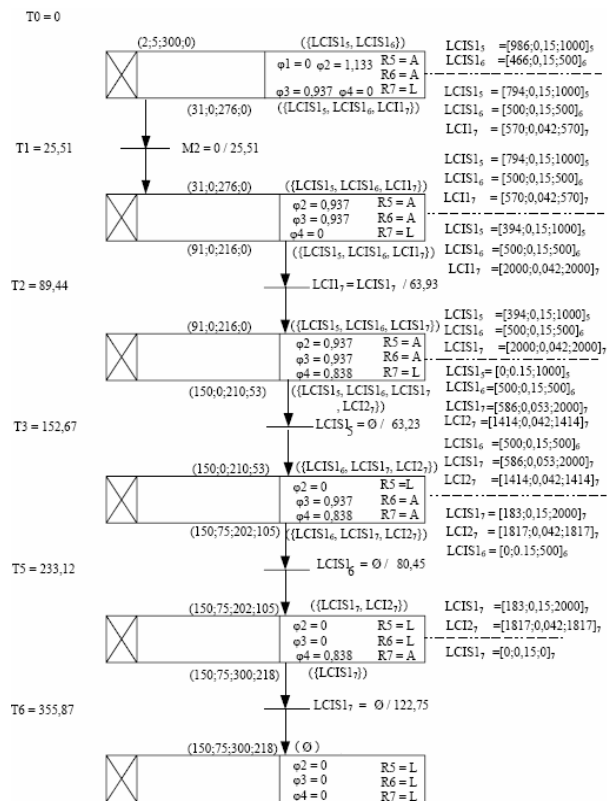
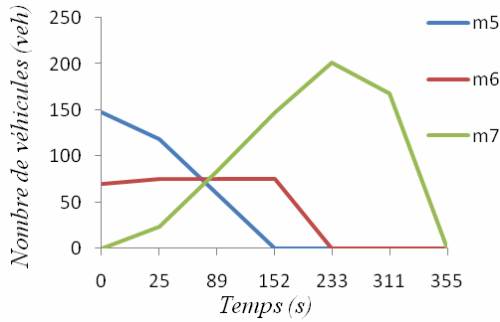
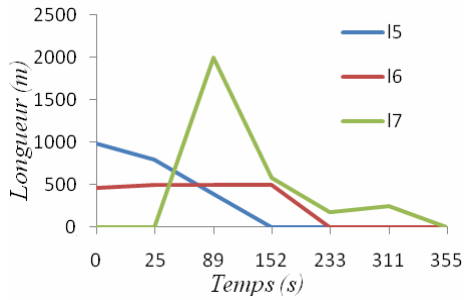


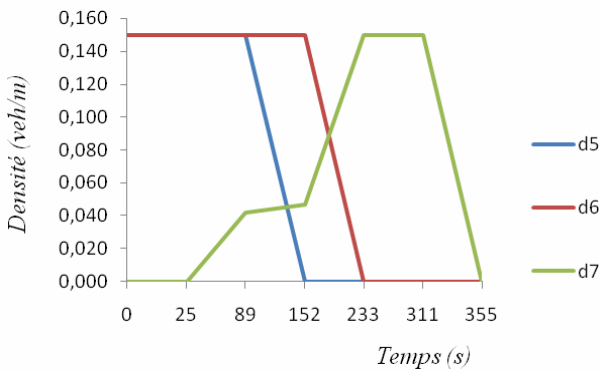
Figure 21. Graphe d'évolution du modèle 3 sections



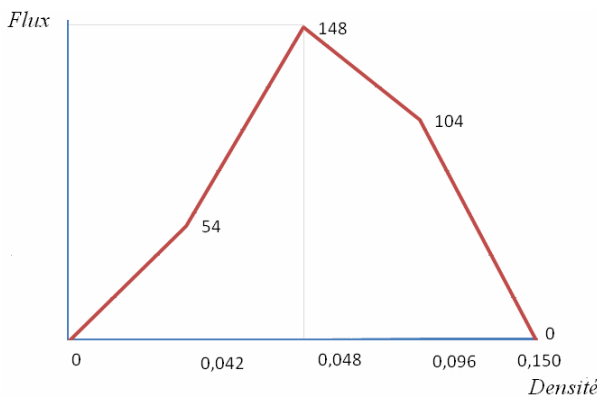
a) nombre de véhicules sur les sections



b) longueur d'accumulation sur les sections



c) densité de véhicules par section



d) diagramme fondamental relatif à la troisième section

Figure 22. Evolution des paramètres du modèle

A partir du graphe d'évolution (figure 21) différentes évolutions temporelles peuvent être représentées. La figure 22 présente l'évolution de :

- * nombre de véhicules à travers chaque section,
- * longueur d'accumulation à la sortie des sections,
- * densité de véhicules sur chaque section,

Ainsi, le nombre de véhicules sur la section 1 (m5) commence à tendre vers 0 (puisque le flux d'entrée de la section est supposé nul), celui de la section 2 (m6) atteint son maximum à la date $t = 25$ s et reste constant jusqu'à la destruction du lot du sortie de la section 1. A cet instant, le flux ϕ s'annule. Pour la section 3, le nombre de véhicules (m7) commence à augmenter jusqu'à atteindre son maximum à la $t = 233$ s correspondant à la destruction du lot de sortie de la section 2. Du point de vue densité des lots de sortie, on peut voir que la densité des lots sur la sortie des sections 1 et 2 commence par le maximum puisque les deux sections présentaient dès le début une accumulation sur la sortie, alors que l'accumulation sur la section 3 ne se produit qu'après la date $t = 233$ s. Pour la densité liée aux sections, nous avons défini une densité moyenne instantanée de la place lot par :

$$d_{moy}(t) = \frac{q_i(t)}{l}$$

où $q_i(t) = \sum l_p d_p$ représente la quantité de marques associées à la place lot i (Demongodin, 2001), l_p et d_p désignent respectivement la longueur et la densité des lots cohérents internes et l , la longueur de la place lot.

Moyennant cette densité, on parvient à établir le diagramme fondamental (voir figure 22 d).

Il est clair que les résultats donnés par le RdPLots sur cet exemple sont similaires à ceux établis par les réseaux de Petri continus à vitesses variables utilisés par Tolba et al. (2005). Néanmoins, la précision qu'offre les RdPLots en termes du niveau d'accumulation et de positions des lots de véhicules en temps réel ne peut être actuellement représenté par un modèle Petri continu.

5.2. Intersection contrôlée par feux signalétiques

On considère dans cette partie une intersection signalisée de deux sections, donnant sur une troisième (Júlvez J. and R. Boel, 2005). En d'autres termes, une structure de convergence signalisée telle que présentée sur la figure 23 est étudiée.

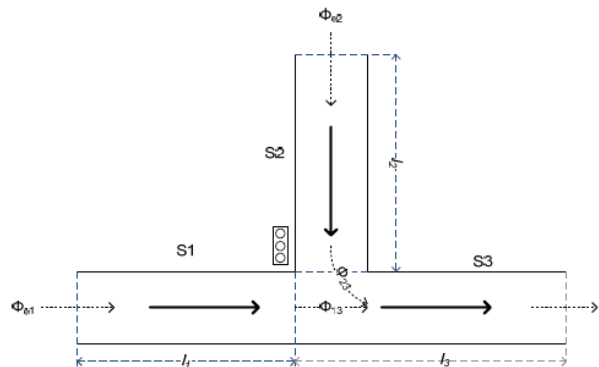


Figure 23. Modèle physique d'une intersection contrôlée

Par simplification, seules les sections d'entrée sont caractérisées dans le modèle RdPLots fourni à la figure 24.

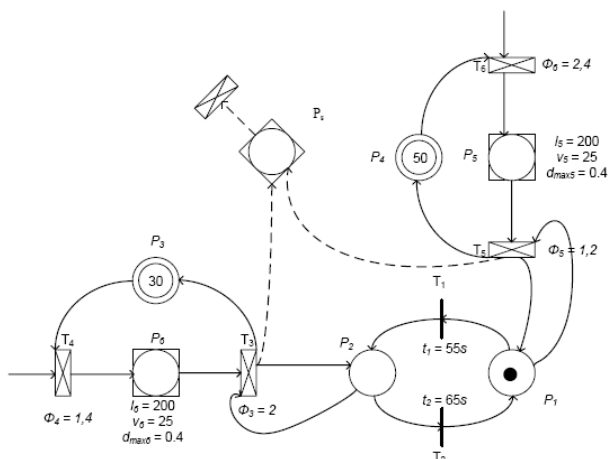


Figure 24. RdPLots d'une intersection contrôlée

Le graphe d'évolution de ce modèle est représenté ci-dessous.

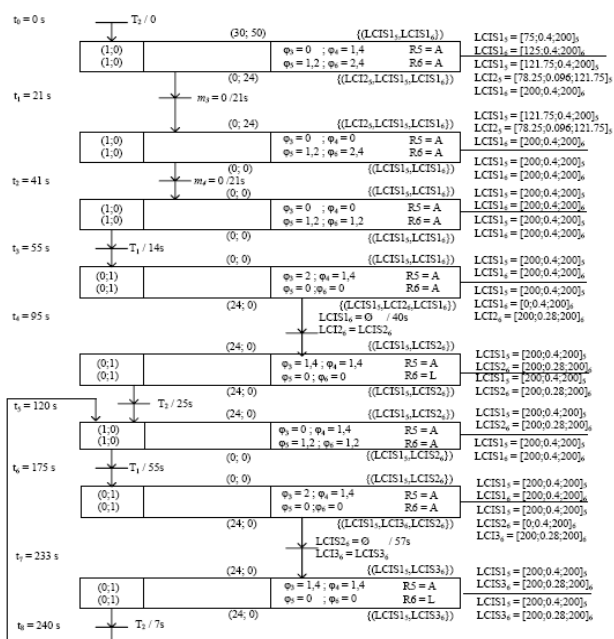


Figure 25. Graphe d'évolution - intersection contrôlée

Par l'analyse du graphe d'évolution, le système considéré passe par un régime transitoire d'une durée de 120 secondes avant d'atteindre son régime stationnaire ou cyclique. A partir de ces évolutions, nous adoptons actuellement l'approche de synthèse proposée dans (Garcia et al. 2007) afin d'établir un contrôle temps réel lié aux durées de signalisation.

6. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons présenté un cadre de modélisation des systèmes de transport via des réseaux de Petri lots. La modélisation de structures élémentaires et l'assemblage de ces sous - modèles permettent une approche modulaire et générique de modélisation hybride du trafic urbain et routier. De cette première approche de modélisation par réseaux de Petri lots, l'étude d'un contrôle fai-

sant varier en temps réel les vitesses autorisées en fonction de l'état des niveaux d'accumulation devrait permettre de résoudre voire d'absorber les phénomènes de congestion liés au trafic. D'autre part, l'extension des techniques de synthèse de contrôle basées sur l'algèbre des diodes et les RdPdiscrets, étendues aux RdPlots permettrait de définir un contrôle temps réel des feux de signalisation des réseaux urbain.

REFERENCES

- Audry N. and Prunet F., 1994. *Controlled Batches Petri nets*. Int. Conference on Systems, Man and Cybernetics, IEEE/SMC, Vancouver, Canada, pp.1849-1854
- David R. and Alla H., 2001. Réseaux de Petri hybrides. *Chapitre 6 de (Zaytoon, 2001)*, pp. 119-154.
- Demongodin I., 2001. Generalised Batches Petri Net: Hybrid model for high speed systems with variable delays. *J. of Discrete Event Systems*, vol.11, p.137-162.
- Di Febbraro A. and N. Sacco, 2004. On modelling urban transportation networks via hybrid Petri nets. *Department of Computer and Control Engineering, Polytechnic of Turin, Control Engineering Practise* 12, p. 1225-1239.
- Garcia T., Cury J., Kraus W. and Demongodin I. 2007. Traffic Light Coordination of Urban Corridors Using Max-Plus Algebra. *Int. Modeling and Simulation Multiconference*, Argentina, p. 103-108.
- Hoogendoorn S. P., Piet H.L Bovy, 2001. State-of-the-art of : Vehicular traffic flow modeling. *J. of Systems & Control Engineering*, vol. 215, p. 283-303.
- Júlvez J. and R. Boel, 2005. Modelling and controlling traffic behavior with continuous Petri Nets. *16 th IFAC World Congress*, Prague.
- Kaakai F., Hayat S. and El Moudni A., 2005. Quantitative assessment of travellers'connection times into a multimodal hub owing to batches Petri nets. *17th IMACS World Congress*, Paris, France.
- Lebail J., Alla H. and David R., 1991. *Hybrid Petri Nets*. European Control Conference, ECC'91, Grenoble, France, pp.1472-1477.
- Papageorgiou M., 1999. Handbook of transportation science. *Boston Kluwer Academic Publishers*, p. 233-267.
- Papageorgiou M., C. Diakaki, D. Vaya, K. Apostolos and Y.Wang, 2003. Review of road traffic control strategies. *Proc. of the IEEE*, vol. 91, n°.12, p. 2043-2067.
- Tolba C., D. Lefebvre, P. Thomas and A. El Moudni, 2005. Continuous and timed Petri nets for the macroscopic and microscopic traffic flow control. *Simulation Modelling Practice and Theory* vol. 13, p. 407-436.
- Wang Y. and C. Zhou, 2004. Fluid based simulation approach for high volume conveyor transportation systems. *Journal of systems science and systems engineering*, vol.13, n°3, p.297-317.