

# MODÉLISATION ROBUSTE DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE D'UN SYSTÈME NON LINÉAIRE FROTTANT

P. RAGOT, E. AUBRY, S. BERGER

JJ. SINOU

MIPS ENSISA  
12 rue des Frères Lumière  
68093 Mulhouse Cedex  
pascal.ragot@uha.fr

LTDS ECL  
36 avenue Guy de Collongue  
69134 Ecully  
jean-jacques.sinou@ec-lyon.fr

**RÉSUMÉ :** *Ce travail présente l'étude du comportement dynamique d'un système soumis à des instabilités de type Sprag-Slip générées par du frottement. La mise en équation de ce système conduit à un système d'équations différentielles non linéaire. Dans un premier temps, une approche déterministe du comportement est réalisée : la résolution classique de ces équations différentielles permet de déterminer le comportement dynamique du système étudié, ainsi que sa sensibilité aux différents paramètres. Dans un second temps, une analyse par intervalle permet de prendre en compte la dispersion du coefficient de frottement pour l'intégration des équations différentielles. L'objectif est d'obtenir une modélisation robuste du comportement dynamique de systèmes frottants.*

**MOTS-CLÉS :** *arithmétique des intervalles, système non linéaire, paramètres incertains, modélisation robuste, frottement, flottement*

## 1. INTRODUCTION

De nombreux travaux de recherche (Begout M., 1979, Chambrette P., 1990, Earles S. W. E., Lee C. K., 1976, Grenouillat R., Leblanc C., 2002, Spurr R. T., 1961-1962) se sont intéressés à l'étude du comportement dynamique de systèmes frottants tels que des systèmes de freinage, des essuie-glaces, ... Ces études ont montré que de tels systèmes peuvent être dans certaines conditions de fonctionnement soumis à des instabilités de type Sprag-Slip, qui peuvent dégrader fortement leurs performances. Ce type d'instabilités est dû à un couplage entre deux modes propres. Il a également été mis en évidence une grande sensibilité du comportement dynamique de ces systèmes aux paramètres de conception, ainsi qu'aux paramètres physiques, en particulier le coefficient de frottement.

Afin de dimensionner le plus correctement possible ces systèmes frottants, il est donc primordial de bien connaître leur comportement en terme de stabilité ainsi que leurs niveaux vibratoires selon les valeurs des paramètres de conception.

Dans ce contexte, les travaux présentés dans ce papier concernent l'étude du comportement d'un système double pendule frottant modélisant le comportement

d'une lame de balai d'essuyage soumise à des instabilités de type Sprag-Slip. Après une description et une mise en équation du modèle du système étudié, une approche déterministe permet de déterminer le comportement du système et les paramètres les plus influents. Ensuite, une approche robuste permet la prise en compte des incertitudes dans l'étude du comportement, à l'aide de l'arithmétique des intervalles (Moore R. E., 1966). Le coefficient de frottement admettant une dispersion importante, dans le cadre de cette étude, les incertitudes prises en compte sont celles de ce coefficient. Cette seconde approche est ainsi qualifiée d'approche robuste, dans le sens où le modèle et les résultats obtenus sont validés non pas uniquement pour un jeu déterministe de paramètres, mais également dans le cas où les paramètres admettent une dispersion.

## 2. DESCRIPTION DU SYSTÈME

Une modélisation par éléments finis de la lame d'un balai d'essuie-glaces a permis de déterminer ses quatre premiers modes propres. Ensuite, une observation avec une caméra rapide lors d'instabilités a permis de constater que les modes dominants de vibration de la lame étaient les deux premiers modes de flexion. Ainsi, le double pendule frottant représenté en fig-

ure 1 a été défini pour étudier les instabilités de type Sprag-Slip. Le modèle du système frottant étudié se compose d'une masse ponctuelle  $m$  et deux tiges indéformables de longueur respectives  $l_1$  et  $l_2$ , de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$ . Ces trois solides sont reliés les uns aux autres par des liaisons pivots parfaites, associées à une raideur angulaire  $k_1$  entre la masse  $m$  et la première tige 1, et une raideur  $k_2$  entre la tige 1 et la tige 2. Ces deux raideurs angulaires sont également associées à des amortissements,  $c_1$  entre la masse  $m$  et la tige 1, et  $c_2$  entre la tige 1 et la tige 2. La masse  $m$  est liée au bâti par deux ressorts de rappel, de raideur  $K$  et  $K_1$ . Une force d'appui  $F_o$  est appliquée sur la masse  $m$ . La tige 2 frotte sur une surface (S) en mouvement.

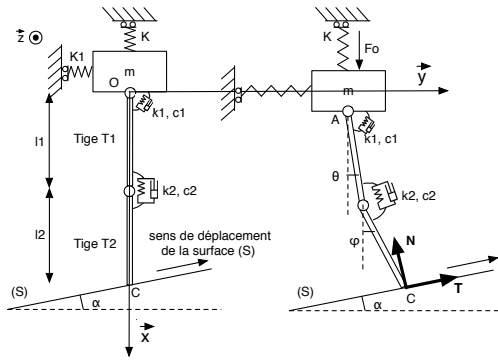


Figure 1. Double pendule frottant

Les déplacements de la masse  $m$  sont notés suivant l'axe vertical  $\vec{x}$  par la variable  $u$  et suivant l'axe horizontal  $\vec{y}$  par la variable  $v$ . Les hypothèses suivantes sont posées : il n'y a pas de décollement au point C, entre le double pendule et la surface de contact (S), et la tige glisse en permanence sur la surface de contact (S). Le contact est décrit par une loi de frottement simple, du type :  $T = \mu N$ , avec  $T$  la composante tangentielle et  $N$  la composante normale de la force de frottement de la surface (S) sur la tige  $T_2$  (loi de Coulomb) (Codfert V., 1997).

### 3. MODÉLISATION DU SYSTÈME, ANALYSE DÉTERMINISTE DU COMPORTEMENT

#### 3.1. Modélisation du système

Le principe des travaux virtuels (formalisme de Lagrange) permet d'obtenir un système de quatre équations non linéaires à cinq inconnues  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  et  $\phi$  et l'effort normal  $N$ .

$$\begin{aligned} &-(m+m_1+m_2)\ddot{u} + (m_1l_{g1}+m_2l_1)(\sin\theta)\ddot{\theta} \\ &+ (m_1l_{g1}+m_2l_1)(\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (m_2l_{g2}\sin\phi)\ddot{\phi} + (m_2l_{g2}\cos\phi)\dot{\phi}^2 \\ &-N + F_o - Ku + (m+m_1+m_2)g = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(m+m_1+m_2)\ddot{v} - (m_1l_{g1}+m_2l_1)(\cos\theta)\ddot{\theta} \\ &+ (m_1l_{g1}+m_2l_1)(\sin\theta)\dot{\theta}^2 - (m_2l_{g2})(\cos\phi)\ddot{\phi} \\ &+ (m_2l_{g2})(\sin\phi)\dot{\phi}^2 + \mu_a N - K_1v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(I_1+m_1lg_1^2+m_2l_1^2)\ddot{\theta} + (m_1l_{g1}+m_2l_1)(\sin\theta)\ddot{u} \\ &- (m_1l_{g1}+m_2l_1)(\cos\theta)\ddot{v} - (m_2l_1l_{g2})\cos(\theta-\phi)\ddot{\phi} \\ &- (m_2l_1l_{g2})\sin(\theta-\phi)\dot{\phi}^2 + Nl_1\sin\theta + \mu_a Nl_1\cos\theta - k_1\theta \\ &- k_2(\theta-\phi) - c_1\dot{\theta} + c_2(\dot{\phi}-\dot{\theta}) - (m_1l_{g1}+m_2l_1)g\sin\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(I_2+m_2lg_2^2)\ddot{\phi} + (m_2l_{g2})(\sin\phi)\ddot{u} - (m_2l_{g2})(\cos\phi)\ddot{v} \\ &- (m_2l_1l_{g2})\cos(\theta-\phi)\ddot{\theta} + (m_2l_1l_{g2})\sin(\theta-\phi)\dot{\theta}^2 + Nl_2\sin\phi \\ &+ \mu_a Nl_2\cos\phi + k_2(\theta-\phi) - c_2(\dot{\phi}-\dot{\theta}) - m_2gl_{g2}\sin\phi = 0 \end{aligned}$$

L'hypothèse du contact permanent au point C entre le double pendule et la surface de frottement se traduit par une relation géométrique, ce qui permet d'obtenir un système différentiel non linéaire de 5 équations et 5 inconnues.

$$u = -\tan\alpha(v + l_1\sin\theta + l_2\sin\phi) - l_1\cos\theta - l_2\cos\phi + l_1 + l_2$$

Après simplification, le modèle peut s'écrire sous la forme d'un système de trois équations différentielles non linéaire du second ordre à 3 inconnues :  $v$ ,  $\theta$  et  $\phi$ . Puis, à l'aide du changement de variables :

$$z = \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

ce système peut être écrit sous la forme d'une équation différentielle matricielle du premier ordre, les matrices étant de dimension 6 (détail des matrices en annexe) :

$$M_{CL}(z)\dot{z} = A(z)z + B(z)F_o + G(z) \quad (1)$$

Les matrices  $M_{CL}$  et  $A$  sont des matrices carrées de taille  $6 \times 6$ . Les matrices  $B$  et  $G$  sont des vecteurs à 6 composantes. Trois parties ont été isolées dans cette équation différentielle, afin de pouvoir traiter

plus facilement chaque aspect : la matrice G contient tous les termes non linéaires, avec en particulier tous les termes quadratiques, la matrice A ne contient que les termes linéaires, et l'ensemble B\*Fo représente la partie commande du système. Ainsi isolé, il est plus facile d'étudier l'influence du paramètre de contrôle Fo sur le comportement du système. Cette écriture différentielle du premier ordre permet l'utilisation des outils proposés par le logiciel Matlab, en particulier les solveurs d'équations différentielles comme ODE45.

### 3.2. Analyse déterministe du comportement

#### 3.2.1 Introduction

Le modèle établi au paragraphe précédent permet d'analyser le comportement déterministe du double pendule. Pour ce faire, trois études sont réalisées. La première étude, une étude stationnaire non linéaire, a pour but de déterminer les positions d'équilibre du système. La seconde étude, une étude dynamique linéaire, permet de déterminer la stabilité de ces différentes positions d'équilibre (stable ou asymptotiquement stable, instable de type divergent ou bien instable de type flottement). La troisième étude, une étude dynamique non linéaire, permet de déterminer les niveaux vibratoires (cycles limites) dans le cas d'un équilibre instable de type flottement. Enfin, une étude paramétrique permet de mettre en évidence la grande sensibilité du comportement du système aux paramètres de conception et au coefficient de frottement.

#### 3.2.2 Analyse stationnaire non linéaire

Le but de cette première étude est de déterminer les positions d'équilibre du système. Même en régime stationnaire, le système différentiel (équation 1) présente de nombreuses non-linéarités, en particulier des fonctions trigonométriques qui peuvent en plus être en facteur de dérivées au carré de variables d'état. La résolution ne peut donc pas être formelle, mais seulement numérique. Ainsi, un algorithme de type Newton-Raphson a été mis en place (figure 2) afin de déterminer les solutions  $q_o = (v_o, \theta_o, \phi_o)^T$  et être certain d'obtenir toutes les solutions. Pour un même jeu de paramètres, du fait des non-linéarités, le système peut avoir une ou plusieurs solutions.

#### 3.2.3 Analyse dynamique linéaire

Après avoir déterminé les positions d'équilibre, l'étude dynamique linéaire permet de déterminer la

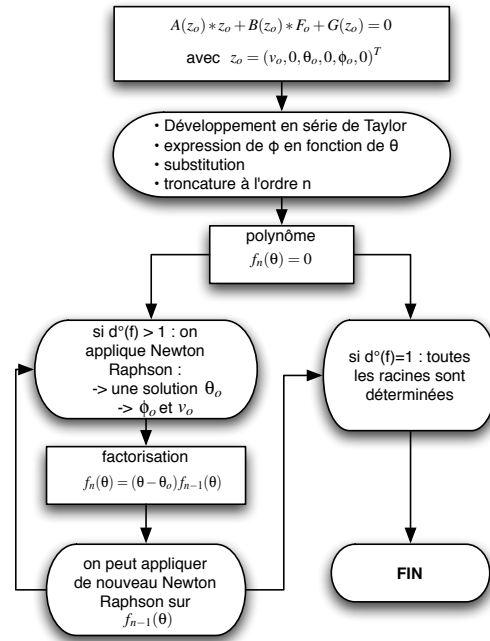


Figure 2. Recherche de toutes les positions d'équilibre

stabilité de ces positions (stable ou asymptotiquement stable, instable de type divergent ou instable de type flottement). Pour cela, le système est linéarisé autour d'une position d'équilibre  $q_o$  (équation 2), et l'étude des pôles du système (équation 3) permet de déterminer la stabilité de cette position d'équilibre.

$$q(t) = q_o + q_1(t) = \begin{pmatrix} v_o + v_1(t) \\ \theta_o + \theta_1(t) \\ \phi_o + \phi_1(t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$M\ddot{q}_1(t) + C\dot{q}_1(t) + Kq_1(t) = 0 \quad (3)$$

Les parties réelles des pôles permettent de déterminer la stabilité de la position d'équilibre (stable ou instable).

Si toutes les valeurs propres possèdent une partie réelle négative, la solution s'approche alors de la position d'équilibre lorsque t augmente et la solution est asymptotiquement stable. Si les valeurs propres possèdent des parties réelles négatives ou nulles et si les racines imaginaires pures apparaissent sous forme de paires complexes conjuguées et se combinent pour donner une solution oscillatoire autour d'une position d'équilibre, alors la solution linéaire est stable (ou asymptotiquement stable). Enfin, s'il existe au moins une valeur propre dont la partie réelle est positive, dans ce cas, la solution s'éloigne de la position

d'équilibre quand  $t$  augmente. La position est donc instable.

Les parties imaginaires des pôles donnent en plus une information sur la pulsation des modes propres, ainsi que sur le type d'instabilités (divergent ou flottement). Dans le cas où la partie imaginaire d'au moins un pôle dont la partie réelle est positive devient nulle, c'est-à-dire quand ce pôle devient un réel strictement positif, l'instabilité est de type divergent. Dans le cas où les pôles ayant des parties réelles positives ont des parties imaginaires non nulles, alors l'instabilité est de type flottement. Cette instabilité est due à une coalescence entre deux modes.

### 3.2.4 Etude paramétrique

A partir des modèles stationnaire et de stabilité, le comportement du système peut être étudié pour différents jeux de paramètres. Afin de déterminer la sensibilité du comportement du système aux paramètres, des études paramétriques se révèlent indispensables.

Les différents résultats de cette étude montrent l'évolution des positions d'équilibre  $\theta$  et  $\phi$  en fonction des différents paramètres. Selon la valeur du coefficient de frottement  $\mu$  par exemple, le système peut admettre une ou trois positions d'équilibre (figures 3, 4 et 5). Ces différents graphes mettent en évidence des bifurcations. L'angle d'attaque  $\alpha$  est fixé à 0.1 rad, et les valeurs des raideurs angulaires  $k_1$  et  $k_2$  correspondent aux valeurs de notre maquette afin de réaliser des validations expérimentales. Des résultats équivalents peuvent être obtenus pour d'autres jeux de paramètres. Ainsi, pour un même jeu de paramètres, le système peut se trouver dans plusieurs configurations géométriques différentes. Ces études mettent également en avant plusieurs aspects du comportement, en particulier la forte non linéarité du comportement, le nombre de position d'équilibre qui varie suivant les paramètres, et la stabilité de ces positions d'équilibre.

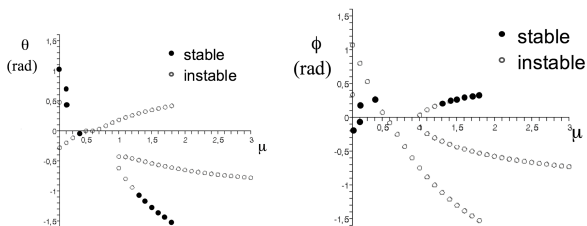


Figure 3.  $\theta$  et  $\phi$  en fonction de  $\mu$  pour une raideur angulaire  $k_2 = 0.5N$

En plus d'avoir une influence sur le nombre de po-

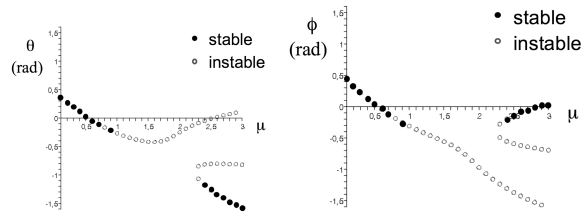


Figure 4.  $\theta$  et  $\phi$  en fonction de  $\mu$  pour une raideur angulaire  $k_2 = 0.6N$

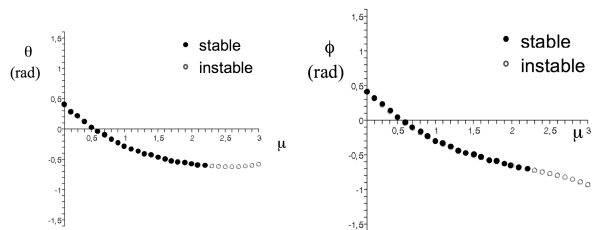


Figure 5.  $\theta$  et  $\phi$  en fonction de  $\mu$  pour une raideur angulaire  $k_2 = 0.7N$

sitions d'équilibre, le coefficient de frottement  $\mu$  influe très fortement sur la stabilité de ces positions d'équilibre. Ainsi, sur la figure 4, pour un coefficient de frottement variant très légèrement entre 0,8 et 1,1, les positions d'équilibre passent d'une configuration stable à instable (divergente), puis de nouveau à un équilibre stable et pour finir à un équilibre instable (de type flottement).

De plus, il convient de noter qu'une variation continue d'un paramètre peut entraîner une discontinuité dans l'évolution des positions d'équilibre (figure 4). Pour  $\mu$  initialisé à 0, l'angle  $\theta$  est de -0.3 rad. Si  $\mu$  augmente, l'angle  $\theta$  va évoluer jusque 0.4 rad pour  $\mu=1.7$ . Ensuite, si  $\mu$  continue d'augmenter, l'évolution de l'angle  $\theta$  va présenter une discontinuité pour atteindre la valeur de -0.5rad. Il est intéressant de remarquer que le sens de variation de  $\mu$  influe sur le comportement du système : si  $\mu$  varie de 3 à 0 (et non plus de 0 à 3), alors la discontinuité en  $\theta$  a lieu pour  $\mu=1$  au lieu de 1.7 auparavant. L'angle  $\phi$  admet également des discontinuités.

Le coefficient d'amortissement introduit au niveau des liaisons pivots peut influencer sur la stabilité des positions d'équilibre. En effet, dans certains cas, l'ajout d'amortissement peut rendre instable une position d'équilibre initialement stable.

### 3.2.5 Analyse dynamique non linéaire

Cette troisième étude permet d'étudier le comportement dynamique du système autour d'une de ses

positions d'équilibre, et en particulier dans le cas du flottement de quantifier les niveaux vibratoires. L'intégration numérique de l'équation différentielle matricielle 1 permet d'obtenir l'évolution des variables d'état en fonction du temps

L'analyse des plans de phase permet de déterminer l'amplitude des niveaux vibratoires dans le cas d'une instabilité de type flottement, comme représenté en figure 6. Initialement positionné avec une vitesse nulle dans le voisinage d'une de ces positions d'équilibre, le système atteint après une période transitoire un cycle limite. Autrement dit, en régime établi, le système flotte dans le voisinage de la position d'équilibre. La position d'équilibre étudiée est instable, car l'étude des pôles du système montre qu'au moins un des pôles possède une partie réelle strictement positive. Cependant, le cycle limite correspondant est stable.

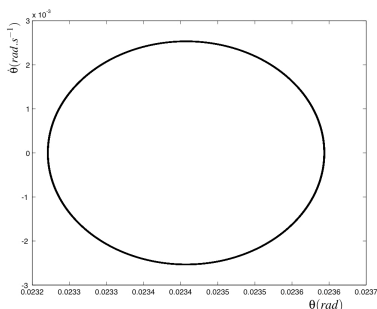


Figure 6. Plan de phase de  $\theta$ , flottement

Les résultats obtenus par cette analyse dynamique non linéaire permettent également de confirmer les résultats des deux études précédentes (positions d'équilibre et les stabilités associées). En effet, dans le cas d'une position d'équilibre identifiée comme instable de type divergent par les deux premières analyses, cette troisième analyse permet d'obtenir le plan de phase pour l'angle  $\theta$  représenté en figure 7. Un plan de phase équivalent est obtenu pour l'angle  $\phi$ .

La figure 6 confirme bien l'instabilité de type divergent de cette position d'équilibre. En effet, initialement positionné avec une vitesse nulle au voisinage de la position d'équilibre (représentée par le point A sur la figure 7), le système diverge. Les résultats de ces différentes simulations numériques sont en cours de validation expérimentale à l'aide d'une maquette.

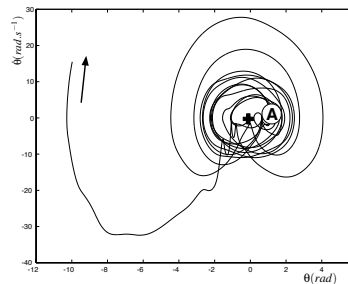


Figure 7. Plan de phase de  $\theta$ , équilibre divergent

## 4. MODÉLISATION ROBUSTE DU COMPORTEMENT

### 4.1. Introduction et objectifs

Les études précédentes pour déterminer le comportement du double pendule frottant ont été réalisées à partir d'un modèle déterministe, c'est-à-dire ne prenant pas en compte les incertitudes des différents paramètres. Cependant, ces incertitudes affectent de façon très significative le comportement de ce système, comme le montrent les études de sensibilités. Nous allons nous intéresser plus particulièrement au coefficient de frottement. En effet, une très légère dispersion du coefficient de frottement peut modifier de façon très importante le comportement du système, ou les niveaux vibratoires mis en jeu. De plus, ce coefficient est celui dont la dispersion est la moins maîtrisée et la plus délicate à prendre en compte, le coefficient de frottement dépendant de nombreux paramètres non maîtrisés, comme la température, le degré de salissure des matériaux, l'usure dans le temps, ... . Les incertitudes peuvent au mieux être bornées, mais aucune information n'est disponible sur l'évolution du coefficient de frottement entre ces bornes. Le but de cette modélisation robuste est de prendre en compte cette dispersion du coefficient de frottement dans l'étude du comportement dynamique du système, afin d'obtenir une enveloppe pour les cycles limites et ainsi garantir que les niveaux vibratoires lors du flottement ne dépassent pas certaines valeurs critiques qui pourraient par exemple dégrader les performances du système.

### 4.2. Choix d'une méthode de modélisation robuste

Différentes approches sont envisageables pour prendre en compte la dispersion du coefficient de frotte-

ment dans l'étude du comportement du double pendule frottant. L'une des approches les plus classiques est une approche probabiliste avec des tirages aléatoires de Monte Carlo. Cependant, cette méthode est très coûteuse en temps de calcul, et n'est donc pas envisageable pour un système industriel. De plus, dans le cas d'un système d'essuyage, aucune densité de probabilité n'est connue pour décrire la dispersion du coefficient de frottement. La dispersion de ce coefficient ne peut qu'être bornée, mais sans avoir la moindre connaissance de l'évolution du coefficient de frottement entre ces bornes. Ainsi, il est naturel d'utiliser non pas les méthodes probabilistes ou le formalisme flou, mais l'arithmétique des intervalles (Moore R. E., 1966) pour prendre en compte l'incertitude du coefficient de frottement. L'arithmétique des intervalles est mise en oeuvre dans de nombreux travaux récents (Cherrier E., 2003, Ragot J., 2005) et en particulier dans les travaux prenant en compte la dispersion du coefficient de frottement dans des instabilités de type Stick-Slip (Rauh A., 2006).

### 4.3. Outils utilisés

Le logiciel Matlab ne permet nativement que de manipuler des paramètres déterministes. La toolbox Intlab<sup>1</sup> permet de manipuler des intervalles directement dans le logiciel Matlab. Seulement, cette toolbox ne permet d'utiliser des intervalles qu'avec des fonctions basiques (addition, cosinus, sinus, ...) mais ne permet pas de profiter des solveurs d'équations différentielles (ODE45, ...), qui ne sont pas compatibles avec le calcul par intervalles. Il est donc nécessaire de programmer un intégrateur numérique capable d'utiliser des paramètres incertains représentés par des intervalles. Dans un premier temps, l'algorithme d'intégration choisi est celui d'Euler.

Les premiers résultats obtenus sont représentés en figure 8. Ces graphes présentent l'évolution des bornes supérieures et inférieures pour les angles  $\theta$  et  $\phi$  en fonction du temps, tout en tenant compte de la dispersion du coefficient de frottement. Cette dispersion du coefficient de frottement est de  $\pm 10\%$ .

Contrairement à un cas déterministe, le calcul par intervalle ne permet pas de connaître la valeur exacte de  $\theta$  (ou des autres variables) à un instant donné. Il est par contre possible de garantir avec certitude que l'angle  $\theta$  est forcément compris dans l'intervalle donné, tout en tenant compte de l'incertitude des différents paramètres. Cependant, les intervalles

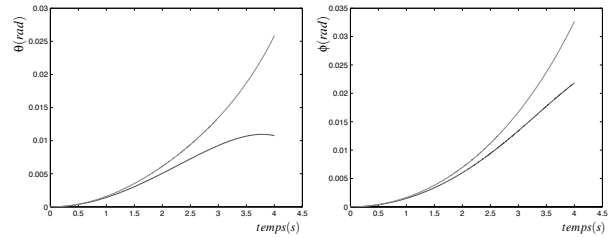


Figure 8. Bornes de l'intervalle pour les angles  $\theta$  (gauche) et  $\phi$  (droite) en fonction du temps

déterminés, s'ils englobent bien le comportement réel du double pendule, surestiment ce comportement, à cause des règles de calcul de l'arithmétique des intervalles.

### 4.4. Problèmes de surestimation et améliorations proposées

L'arithmétique des intervalles permet de prendre en compte les incertitudes des paramètres pour déterminer avec certitude une enveloppe du comportement d'un système. Cependant, cette enveloppe peut surestimer de façon importante la solution réelle. Les surestimations peuvent avoir plusieurs causes, comme l'effet d'enveloppement (wrapping effect), le pessimisme dû aux occurrences multiples d'un même paramètre incertain. Différentes améliorations ont été mises en place afin de réduire la surestimation de la solution.

L'effet d'enveloppement est lié à l'utilisation même des intervalles. En effet, en dimension 2 par exemple, il n'est possible d'envelopper la solution réelle qu'avec des boîtes rectangulaires. L'espace des solutions étant très rarement d'une forme rectangulaire, la solution réelle est forcément surestimée. De plus, cet effet d'enveloppement est accentué lorsque la solution est formée de plusieurs zones disjointes, l'enveloppe devant alors englober toutes ces zones. L'une des solutions les plus courantes consiste à réaliser un sous pavage, c'est-à-dire utiliser plusieurs intervalles au lieu d'un seul pour décrire la dispersion des paramètres incertains. Cependant, pour être efficace, le sous pavage nécessite de connaître certaines caractéristiques de la solution recherchée, afin d'adapter au mieux le nombre de sous pavés, ainsi que la taille de chacun des pavés. Dans le cadre de cette étude, nous n'avons aucune connaissance a priori sur la solution, il n'est pas possible de mettre efficacement en oeuvre une solution basée sur le sous pavage.

<sup>1</sup><http://www.ti3.tu-harburg.de/rump/intlab/>

Le pessimisme provient du fait que l'arithmétique des intervalles considère comme indépendantes les différentes occurrences d'un même paramètre incertain. Ainsi, dans le cas d'un coefficient  $c_1$  modélisé par l'intervalle  $[1, 2]$ , la soustraction  $c_1 - c_1 = [1, 2] - [1, 2]$  ne donne pas un intervalle nul, mais l'intervalle  $[-1, 1]$ . L'opération réalisée correspond en fait à n'importe quelle valeur de l'intervalle  $[1, 2]$  moins n'importe quelle valeur de ce même intervalle. Avec un intervalle d'amplitude 1 au départ, une simple soustraction conduit à un intervalle d'amplitude 2. Ce pessimisme du aux occurrences multiples d'une même incertitude entraîne une surestimation de la solution réelle.

Il est possible d'optimiser l'écriture des équations, en factorisant le plus possible les paramètres incertains. Les termes dépendant des paramètres incertains peuvent de plus être optimisés en réalisant des études de fonctions pour ces termes. Ainsi, les valeurs des intervalles pour les différents coefficients intervenant dans le système différentiel (1) sont améliorées de façon très significatives. L'amplitude de l'intervalle du coefficient  $p_1(\mu)$  par exemple peut être diminuée d'un facteur compris entre 5 et 10 suivant les cas étudiés.

En plus d'optimiser l'amplitude des intervalles à chaque instant, utiliser un algorithme d'intégration adapté permet de réduire le nombre d'itérations, et donc l'accumulation des surestimations. L'algorithme d'Euler pour réaliser les intégrations numériques permet d'obtenir un premier résultat, mais nécessite un pas d'intégration très fin pour obtenir des résultats avec une précision suffisante. Ceci conduit donc à réaliser un grand nombre d'opérations sur les intervalles, et donc accentuer la surestimation de la solution à cause de l'accumulation des occurrences multiples des incertitudes. Une solution est d'utiliser une méthode d'intégration plus performante, comme celle de Runge Kutta. Cet algorithme est plus complexe à mettre en place dans le cas d'un calcul par intervalle, mais il ne nécessite pas un pas aussi fin que la méthode d'Euler pour obtenir un résultat avec la même précision donnée. Ainsi, un pas dix fois plus grand que celui de la méthode d'Euler permet d'obtenir la même précision dans les résultats. Le nombre réduit d'opérations sur les intervalles contribue à diminuer les problèmes liés au pessimisme.

#### 4.5. Résultats

Ce paragraphe présente les résultats de plusieurs simulations du comportement dynamique du système, avec une incertitude de  $\pm 10\%$  sur le coefficient de

frottement.

Les améliorations proposées ont été testées, afin de quantifier leur apport dans la précision des résultats. Dans cette étude, seul le coefficient de frottement est un paramètre incertain (et donc représenté par un intervalle). Tous les autres paramètres du modèle sont des réels. Le coefficient de frottement étant un intervalle, les variables d'état du système le sont également.

Le tableau 1 présente les caractéristiques des études réalisées, à savoir l'algorithme d'intégration choisi, ainsi que l'optimisation des coefficients et des variables via des études de fonction. Les temps de calcul nécessaires sont également indiqués. Les tableaux 2 et 3 donnent l'évolution de l'amplitude pour l'angle  $\phi$  et la vitesse  $\dot{\phi}$  à différents instants, pour les différentes études réalisées. La première étude, réalisée uniquement à l'aide de la toolbox Intlab, est considérée comme l'étude de référence, les amplitudes des intervalles pour l'angle  $\phi$  et la vitesse  $\dot{\phi}$  sont donc de 100%. Les lignes 2, 3 et 4 des tableaux indiquent la valeur de ce même intervalle respectivement pour les études 2, 3 et 4, c'est-à-dire en tenant compte des différentes améliorations. Au bout de 4 secondes et avec la quatrième étude par exemple, l'amplitude de l'intervalle de  $\phi$  ne représente plus que 70% de la valeur de référence (63% pour l'amplitude de l'intervalle de  $\dot{\phi}$ ). La surestimation de la solution est donc réduite de près de 30% pour l'intervalle de  $\phi$ , et de près de 40% pour l'intervalle de  $\dot{\phi}$ .

	Intégration		Optimisation		temps (sec)
	Euler	RK4	coefficient	variable	
Etude 1	X				197
Etude 2	X		X		201
Etude 3	X		X	X	1129
Etude 4		X	X	X	989

Tableau 1. Caractéristiques des études réalisées

Amplitude de $\phi$	1 sec	2 sec	3 sec	4 sec
Etude 1	100%	100%	100%	100%
Etude 2	99,6%	99,6%	99,6%	99,6%
Etude 3	96,9%	90,1%	80,9%	71,3%
Etude 4	95,2%	89,2%	80,2%	70,7%

Tableau 2. Amplitude de l'intervalle  $\phi$  suivant les études réalisées

Amplitude de $\dot{\phi}$	1 sec	2 sec	3 sec	4 sec
Etude 1	100%	100%	100%	100%
Etude 2	99,6%	99,6%	99,6%	99,6%
Etude 3	94,7%	84%	72,9%	63,6%
Etude 4	93,6%	83,3%	72,3%	62,8%

Tableau 3. Amplitude de l'intervalle  $\dot{\phi}$  suivant les études réalisées

#### 4.6. Validation avec des tirages de Monte Carlo

Une analyse probabiliste, via des tirages aléatoires de Monte Carlo permet de valider les résultats obtenus. Comme aucune loi de probabilité n'est connue pour caractériser la dispersion du coefficient de frottement, les tirages de Monte Carlo sont réalisés suivant une loi de distribution uniforme.

Les graphes de la figure 9 représentent la superposition de l'évolution des angles  $\theta$  et  $\phi$  en fonction du temps, pour les différents tirages aléatoires de Monte Carlo, avec les bornes inférieures et supérieures du comportement, obtenues avec l'arithmétique des intervalles. Une dizaine de milliers de tirages aléatoires ont été simulés, mais seuls quelques tirages sont représentés sur la figure, pour une question de lisibilité. Il est important de noter que le temps de calcul nécessaire pour effectuer les simulations de Monte Carlo est largement supérieur à celui nécessaire pour l'approche par intervalle où une seule simulation suffit. Un facteur compris entre 10 et 50 au niveau du temps suivant les simulations est à l'avantage de l'arithmétique des intervalles. Enfin, il convient de noter que contrairement aux méthodes probabilistes, le résultat obtenu par l'arithmétique des intervalles est garanti à 100%.

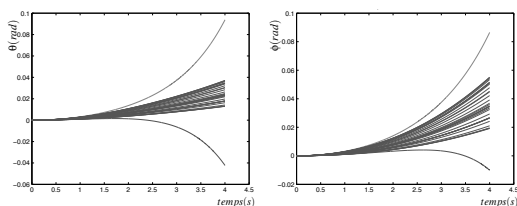


Figure 9. Comparaison des tirages de Monte Carlo avec les intervalles, pour les angles  $\theta$  et  $\phi$

Tous les tirages de Monte Carlo sont bien inclus dans l'enveloppe représentée par l'intervalle. Cependant, malgré les optimisations apportées, la surestimation de la solution réelle avec des intervalles reste significative, et ne permet pas de réaliser une analyse robuste du comportement dynamique du système sur

un temps assez long pour obtenir une enveloppe des cycles limites.

## 5. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Le comportement d'un système frottant, modélisé par un double pendule a pu être étudié, tout en tenant compte des incertitudes sur la loi de frottement. Pour cela, une approche robuste via l'arithmétique des intervalles a été mise en place. L'utilisation de la toolbox Intlab avec le logiciel Matlab permet d'obtenir des résultats présentant une surestimation importante. La précision de ces résultats a ensuite été améliorée via différentes méthodes, telles qu'un choix adapté d'un algorithme d'intégration numérique ou bien encore une optimisation du calcul des intervalles. Les résultats obtenus ont été validés à l'aide d'une simulation numérique avec des tirages aléatoires des Monte Carlo.

Les solutions apportées ne permettent pas d'étudier de façon robuste des cycles limites, pour lesquels le comportement du système doit avoir atteint son régime établi. Cependant, l'étude de phénomènes transitoires en tenant compte des incertitudes est envisageable. Un gain de temps est obtenu pour le calcul par intervalles par rapport aux tirages de Monte Carlo. Ce gain de temps peut sans doute être encore amélioré en utilisant des intégrations numériques à pas variable. En effet, dans le cadre des tirages de Monte Carlo, les intégrations sont réalisées à l'aide du très performant solveur ODE45 du logiciel Matlab. Avec l'arithmétique des intervalles, les intégrations sont réalisées par des méthodes à pas fixe (Euler ou Runge Kutta). De plus, l'utilisation d'une méthode d'intégration numérique à pas variable et/ou multiple peut également améliorer la précision des résultats en diminuant le nombre d'intégrations total. Cependant, la mise en place d'une telle méthode d'intégration numérique n'est pas sans poser des difficultés dans le cadre d'un calcul par intervalle.

De plus, une maquette est en cours de finalisation afin de confronter simulations numériques et résultats expérimentaux.

## REFERENCES

Begout M., 1979. Les problèmes liés au frottement élastomère-verre dans l'automobile, Mémoire de thèse, Université Paul Sabatier de Toulouse.

Chambrette P., 1990. Stabilité des systèmes dynamiques avec frottement sec : application au crissement des freins à disque, Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Cherrier E., Boutayeb M., Ragot J., 2003. Evaluation des bornes de l'état d'un système incertain, approche par intervalles, Journal Européen des systèmes automatisés

Codfert V., 1997. Modélisation globale d'un système d'essuyage, Mémoire de thèse, Université des Sciences et Technologies de Lille.

Earles S. W. E., Lee C. K., 1976. Instabilities arising from the frictional interaction of a pin-disk system resulting in noise generation, Trans ASME J Engng md, 98 Series B, n°1, pp81-86.

Grenouillat R., Leblanc C., 2002. Simulation of chatter vibrations for wiper systems, Society of Automotive Engineers.

Moore R.E., 1966. Interval analysis, Prentice-Hall

Ragot J., 2005. Data validation and diagnosis using interval analysis, IAR & ACD, ENSISA - Mulhouse, 16-18 novembre 2005

Rauh A., Kletting M., Aschemann H., Hofer E. P., 2006. Interval methods for simulation of dynamical systems with state-dependent switching characteristics, International Conference on Control Applications, Munich, 4-6 octobre 2006

Spurr R. T., 1961-1962. A theory of brake squeals, Proc Auto Div, Instn. Mech Eng., n°1, pp33-40.

## ANNEXES

Le double pendule frottant a été modélisé sous la forme d'une équation différentielle matricielle du premier ordre  $M_{CL}\dot{z} = A(z)z + B(z)F_o + G(z)$  Les termes de cette équation différentielle sont :

$$M_{CL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p_2 \sin(z_3 + \gamma_1) & 0 & p_3 \sin(z_5 + \gamma_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_1 \cos(z_3 - \gamma_3) & 0 & q_3 \cos(2z_3 - \gamma_5) + b_3 & 0 & q_7 \sin(z_5 - \alpha) \sin(z_3 + \gamma_7) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_1 \cos(z_5 - \gamma_9) & 0 & r_3 \sin(z_5 + \gamma_4) \sin(z_3 + \gamma_{10}) \\ & & & -r_4 \cos(z_3) \cos(z_5 - \alpha) & 0 & r_5 \cos(2z_5 - \gamma_{11}) + b_7 \end{bmatrix}$$

$$A(z) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -q_2 \sin(z_3 + \gamma_4) & 0 & k_1 + k_2 & 0 & -k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -r_2 \sin(z_5 + \gamma_4) & 0 & -k_2 & 0 & +k_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ -p_6 \\ 0 \\ -q_6 \sin(z_3 + \gamma_4) \\ 0 \\ -r_7 \sin(z_5 + \gamma_4) \end{bmatrix}$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ g_1(z) \\ 0 \\ g_2(z) \\ 0 \\ g_3(z) \end{bmatrix}$$

avec

$$g_1(z) = -\dot{\theta}^2 p_2 \cos(\theta + \gamma_1) - \dot{\phi}^2 p_3 \cos(\phi + \gamma_2) - p_4 (l_1 \cos(\theta - \alpha) + l_2 \cos(\phi - \alpha)) - p_5$$

$$g_2(z) = -\dot{\theta}^2 (q_4 \cos(2\theta - \gamma_6) + b_4) - \dot{\phi}^2 (q_9 \cos(\phi - \alpha) \sin(\theta + \gamma_8) + q_8 \cos \theta \sin(\phi + \gamma_4)) - q_5 \sin(\theta + \gamma_4) (l_1 \cos(\theta - \alpha) + l_2 \cos(\phi - \alpha) + q_{10})$$

$$g_3(z) = -\dot{\theta}^2 (r_3 \sin(\phi + \gamma_4) \cos(\theta + \gamma_{10}) + r_4 \sin \theta \cos(\phi - \alpha) - \dot{\phi}^2 (-r_5 \sin(2\phi - \gamma_{11}) + b_8) - r_6 \sin(\phi + \gamma_4) (l_1 \cos(\theta - \alpha) + l_2 \cos(\phi - \alpha) + r_8)$$