

## TAUX DE PRODUCTION D'UNE LIGNE AVEC STOCKS TAMPONS ET MACHINES A DEUX MODES DE DEFAILLANCES

Ahmed-Tidjani Belmansour, Mustapha Nourelfath

Université LAVAL

Centre Interuniversitaire de Recherche sur les Réseaux d'Entreprise, la Logistique et le Transport (CIRRELT)

Département de génie mécanique, Faculté des sciences et de génie  
Québec, Canada, G1K 7P4

ahmed-tidjani.belmansour.1@ulaval.ca, Mustapha.Nourelfath@gmc.ulaval.ca

**RÉSUMÉ :** *Une méthode analytique pour évaluer les performances d'une ligne de production, dont les machines peuvent avoir deux modes de défaillances, est proposée. Les machines sont réparables et séparées par des stocks intermédiaires. Le modèle continu est utilisé pour décrire le débit d'une machine, ainsi que le niveau d'un stock. Chaque mode de défaillance est caractérisé par ses propres temps de bon fonctionnement et de réparation. Ces temps sont des variables aléatoires exponentiellement distribués. La méthode procède par agrégation de machines. Elle consiste à évaluer les paramètres d'une machine équivalente à deux modes de défaillances pouvant se substituer à un ensemble constitué d'un stock et des deux machines qui l'encadrent. Ainsi, une machine équivalente à la ligne complète est évaluée de proche en proche. Cette méthode tient compte de l'environnement dans lequel se trouve le système afin d'obtenir une évaluation plus précise du taux de production. Afin de valider l'approche, les résultats obtenus sont comparés avec des résultats de simulation.*

**MOTS-CLÉS :** *taux de production, modes de défaillances, machines non fiables, stocks intermédiaires, modèle continu, agrégation*

### 1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons au développement d'un modèle analytique pour l'évaluation de performances de lignes de production série constituées de plusieurs machines pouvant avoir deux modes de défaillances et séparées par des stocks intermédiaires. Ces stocks sont généralement requis pour découpler les postes de travail et améliorer ainsi la disponibilité et le taux de production de la ligne. La majorité des publications portant sur l'évaluation analytique des performances des lignes de production considèrent que les machines ont un seul mode de défaillance. Il existe relativement très peu de travaux dans la littérature qui proposent des méthodes analytiques pour l'évaluation du taux de production d'une ligne dont les machines peuvent avoir plus d'un seul mode de défaillance (ou panne). La motivation de départ pour cette étude était le fait que dans les lignes de production, chaque station est normalement composée de différents dispositifs coopérant entre eux afin d'accomplir une tâche désignée. La fiabilité de chacun de ces dispositifs est différente ainsi que la manière dont ils sont réparés une fois en panne. Le modèle considéré ici est le modèle continu et les défaillances sont supposées dépendantes de l'opération. Bien que plus difficile à étudier analytiquement, le cas à plusieurs modes de défaillances est néanmoins plus proche de la réalité. Il permet une évaluation de performances plus précise que celle obtenue en considérant un seul mode de

défaillance par machine. Le travail réalisé dans le cadre de cet article est basé d'une part sur ce fait; et d'autre part sur le fait que l'on ne retrouve pas dans la littérature une application de la technique d'agrégation dans le cas de plusieurs modes de défaillances.

Dans (Belmansour et Nourelfath, 2007), nous avons proposé une méthode de type agrégation pour l'évaluation du taux de production pour des lignes de production série constituées de stocks intermédiaires et de machines pouvant avoir chacune deux modes de défaillances. Cette méthode consiste à remplacer chaque ensemble de deux machines et un stock intermédiaire par une machine dite équivalente. Ainsi, de proche en proche, on définit une machine équivalente à la ligne. Cette méthode, que nous appellerons modèle 1, est une extension de la technique d'agrégation initialement introduite par (Terracol et David, 1987) afin de tenir compte des deux modes de défaillances. Pour l'évaluation du taux de production d'un ensemble de deux machines et un stock intermédiaire, nous utilisons la méthode de (Levantesi et al, 1999) qui est basée sur la résolution d'équations de type Chapman-Kolmogorov à partir d'un graphe de Markov à  $N+1$  états ( $N$  modes de défaillances et un mode de fonctionnement). Dans notre cas, nous considérons deux modes de défaillances ( $N = 2$ ).

Cependant, lors de la définition de la machine équivalente à un ensemble de deux machines et un stock intermédiaire, on considère cet ensemble en isolation et on ne tient pas compte des interactions qui peuvent avoir lieu

avec son environnement (les autres stocks et machines de la ligne). Or, tel que montré à la section 2, la non prise en compte de cet environnement conduit à une évaluation « pessimiste » du taux de production de la ligne (et par conséquent des erreurs élevées) lorsque certaines machines de la ligne considérée sont souvent en panne.

Dans cet article, nous proposons un nouveau modèle (dit modèle 2) reprenant le modèle 1 dans (Belmansour et Nourelfath, 2007) et dans lequel nous tenons compte de la production supplémentaire liée à la prise en compte de l'environnement. Ce modèle est une extension de celui dit aussi modèle 2 dans l'article de (Terracol et David, 1987). Nous validons notre modèle par simulation et nous comparons les résultats par rapport au modèle 1 et au modèle à deux états dans lequel un seul mode de défaillance est considéré.

## 2. PRISE EN COMPTE DE L'ENVIRONNEMENT

Considérant la figure ci-dessous, nous constatons que le comportement du dipôle  $M_{12}$  n'est pas indépendant de ce qui est en aval (c'est-à-dire  $S_2$  et  $M_3$ ). Dans le cas du modèle 1, une hypothèse implicite et pessimiste est faite : on suppose que lorsque  $S_2$  est plein et que  $M_3$  est en panne,  $M_{12}$  est bloqué, ce qui n'est que partiellement vrai. En effet, s'il est vrai que  $M_{12}$  ne débite plus vers l'aval du fait que  $M_3$  soit bloquée, ce n'est pas forcément le cas de  $M_1$  qui peut continuer à produire tant que  $S_1$  n'est pas plein. Cette quantité est appelée production supplémentaire et conduit à un taux de production supérieur à celui évalué à l'aide du modèle 1. Dans le modèle 2, nous allons prendre en considération cette production supplémentaire.

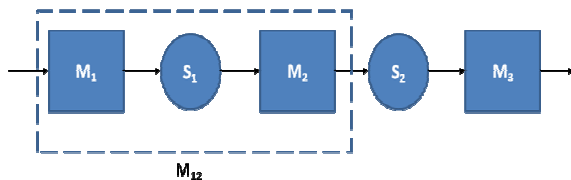


Figure 1. Le dipôle dans son environnement

## 3. PRODUCTION SUPPLÉMENTAIRE

La production supplémentaire dans le cas du modèle 2 s'exprime par la relation suivante :

$$PR_2 = PR_1 + PR_S \quad (1)$$

où :

- $PR_2$  est la production calculée par le modèle 2 ;
- $PR_1$  est la production calculée par le modèle 1 ;
- $PR_S$  est la production supplémentaire à évaluer.

On exprime  $PR_S$  par la relation suivante :

$$PR_S = I \times p_u \quad (2)$$

où :

- $I$  est la production injectée par  $M_1$  dans  $S_1$  lorsque  $S_2$  est plein et  $M_3$  en panne ;
- $p_u$  est la probabilité que cette injection se répercute effectivement sur la production de la ligne.

## 4. NOTATIONS UTILISÉES

Avant de passer à l'évaluation de  $I$  et de  $p_u$ , nous allons présenter les notations utilisées pour permettre la compréhension de cet article.

### 4.1. Caractérisation d'une machine

Une machine  $M_i$  est caractérisée par les paramètres suivants :

- $U_i$  : cadence de production ;
- $\lambda_{1i}$  : taux de panne en mode 1 ;
- $\mu_{1i}$  : taux de réparation en mode 1 ;
- $\lambda_{2i}$  : taux de panne en mode 2 ;
- $\mu_{2i}$  : taux de réparation en mode 2.

Une machine a trois états possibles illustré par la figure 2 :

- État F : la machine est opérationnelle avec une cadence de production  $U_i$  ;
- État P1: la machine est en panne suite à une défaillance de mode 1 ;
- État P2: la machine est en panne suite à une défaillance de mode 2.

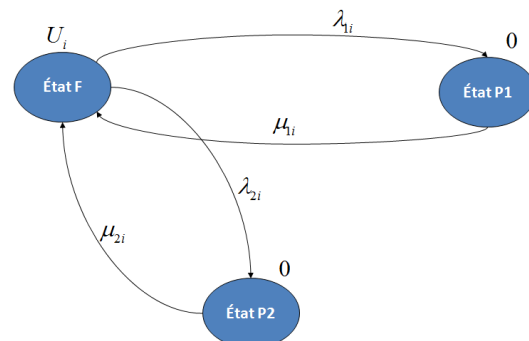


Figure 2. Graphe de Markov d'une machine  $M_i$

### 4.2. Caractérisation d'une ligne de deux machines et un stock intermédiaire

Une telle ligne est caractérisée par le triplet  $E = (x, \alpha_1, \alpha_2)$  où :

- $x$  représente le niveau du stock intermédiaire et varie entre 0 et  $N$  ;

- $\alpha_i$  représente l'état de la machine  $M_i$  et peut prendre l'une des valeurs suivantes :  $F$ ,  $P1$  ou  $P2$ .

Le système est dit « synchrone » si  $U_1 = U_2$ . Il est dit « poussé » si  $U_1 > U_2$  et « tiré » si  $U_1 < U_2$ .

### 4.3. Probabilités des différents états

On note par  $p_i$  la probabilité que le système soit dans l'état  $E_i$ . Ces probabilités sont calculées à partir du modèle de (Levantesi et al, 1999) et leurs expressions peuvent être trouvées dans (Belmansour, 2007).

## 5. ÉVALUATION DE $p_u$

L'injection se répercutera sur la production de la ligne dans le cas où elle se produit à un moment où, sans cette injection, la prochaine borne atteinte sera 0. Dans le cas où la prochaine borne atteinte sera  $N$ , cette injection est inutile car elle ne fera qu'accélérer le blocage de  $M_1$ .

Ainsi, on estime  $p_u$  par la probabilité que la prochaine borne atteinte soit 0.

### 5.1. Cas synchrone

D'après le graphe de transitions du système synchrone (Figure 3), on obtient :

$$p_u = \frac{p_5\tau_2 + p_4\tau_1}{p_5\tau_2 + p_4\tau_1 + p_2\tau_3 + p_3\tau_4} \quad (3)$$

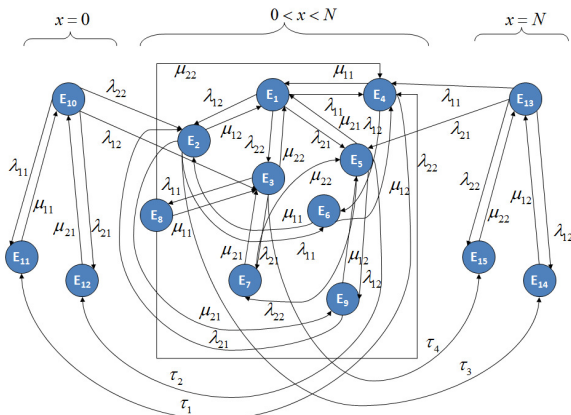


Figure 3. Graphe de transitions du système synchrone

### 5.2. Cas poussé

D'après le graphe de transitions du système poussé (Figure 4), on obtient :

$$p_u = \frac{p_5\tau_2 + p_4\tau_1}{p_5\tau_2 + p_4\tau_1 + p_2\tau_3 + p_3\tau_4} \quad (4)$$

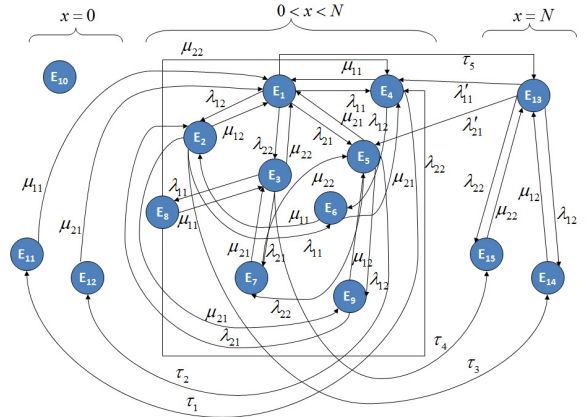


Figure 4. Graphe de transitions du système poussé

### 5.3. Cas tiré

D'après le graphe de transitions du système tiré (Figure 5), on obtient :

$$p_u = \frac{p_5\tau_2 + p_4\tau_1 + p_1\tau_6}{p_5\tau_2 + p_4\tau_1 + p_2\tau_3 + p_3\tau_4 + p_1\tau_6} \quad (5)$$

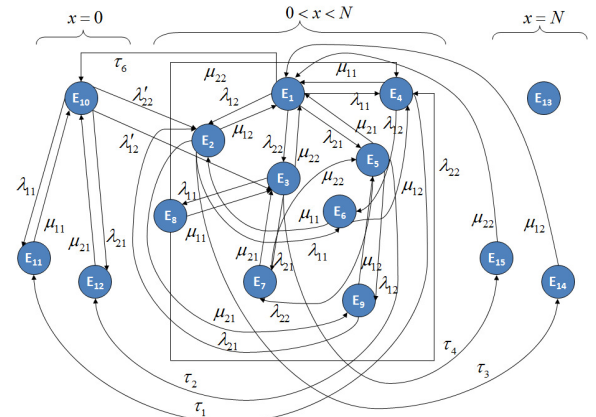


Figure 5. Graphe de transitions du système tiré

Nous incluons ici le terme  $p_1\tau_6$  car on peut passer de l'état  $E_1 = (x, F, F)$  vers l'état  $E_{10} = (0, F, F)$  avec un taux de transition  $\tau_6$ . Cette transition vient du fait que l'on considère le cas où  $S_1$  se vide puisque le débit de  $M_2$  est supérieur à celui de  $M_1$ , autrement dit  $M_2$  consomme plus rapidement que ne produit  $M_1$ .

## 6. ÉVALUATION DE $I$

Nous constatons que  $I$  dépend :

- du niveau de  $S_1$  au moment où  $S_2$  est plein et bloque  $M_2$  ;
- de la durée pendant laquelle  $M_1$  est opérationnelle pendant le blocage ;
- du nombre de fois où un tel blocage survient.

Il en ressort de ces constatations les deux hypothèses suivantes :

- *Hypothèse 1*: L'état de  $M_1$  reste le même durant toute la période du blocage par  $S_2$  ;
- *Hypothèse 2*: L'état de  $M_1$  peut changer durant la période du blocage par  $S_2$ .

## 6.1. Cas synchrone

### 6.1.1. Hypothèse 1

Dans ce cas, on a une injection si  $M_{12} = (M_1, S_1, M_2)$  se trouve dans l'état  $E_1 = (x, F, F)$  ou dans l'état  $E_{10} = (0, F, F)$ . On exclut les états  $E_4 = (x, P1, F)$ ,  $E_5 = (x, P2, F)$  et  $E_{13} = (N, F, F)$  pour les raisons suivantes :

- $E_4$  et  $E_5$  : pour ces deux états,  $M_1$  est en panne et comme dans notre hypothèse  $M_1$  ne change pas d'état durant toute la période de blocage, il n'y aura donc pas d'injection ;
- $E_{13}$  : pour cet état,  $S_1$  est plein et donc pas d'injection possible.

La fin du blocage correspond à la réparation de  $M_3$  dont le taux est  $\mu_3$  et que l'on détermine à partir de l'expression suivante :

$$\frac{1}{\mu_3} = \left( \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13} + \lambda_{23}} \times \frac{1}{\mu_{13}} \right) + \left( \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13} + \lambda_{23}} \times \frac{1}{\mu_{23}} \right) \quad (6)$$

Ainsi, la durée moyenne du blocage est  $1/\mu_3$  et sa fonction de distribution est  $\mu_3 e^{-\mu_3 t}$ .

$$I = \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_1 \right) + \left( \frac{p_{10}}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_{10} \right) \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \times U_1 \quad (7)$$

où :

- $D_1$  est la durée moyenne jusqu'à réparation de  $M_3$  ou remplissage de  $S_1$  sachant  $E_1$  ;
- $D_{10}$  est la durée moyenne jusqu'à réparation de  $M_3$  ou remplissage de  $S_1$  sachant  $E_{10}$  ;
- $U_1$  désigne la vitesse de remplissage de  $S_1$ .

Le calcul des différents  $D_i$  sera présenté à la section 7.

Le taux de blocage par  $S_2$  dans le cas du dipôle  $(M_{12}, S_2, M_3)$  est défini par le nombre de fois où ce dernier passe soit par l'état  $E_{14} = (N, F, P1)$  soit par l'état  $E_{15} = (N, F, P2)$  par unité de temps et est donné par :  $\mu_{12}^{123} p_{14}^{123} + \mu_{22}^{123} p_{15}^{123}$  où l'exposant 123 désigne le dipôle  $(M_{12}, S_2, M_3)$ .

### 6.1.2. Hypothèse 2

Dans ce cas, on considère que  $M_{12}$  peut se trouver dans l'état  $E_4 = (x, P1, F)$  ou dans l'état  $E_5 = (x, P2, F)$  mais pas dans l'état  $E_{13} = (N, F, F)$  car dans ce cas,  $M_1$  est déjà bloquée. On tient également compte de la disponibilité de  $M_1$ . On obtient alors :

$$I = \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_1 \right) + \left( \frac{p_{10}}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_{10} \right) + \left( \frac{p_4}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_4 \right) + \left( \frac{p_5}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_5 \right) \right] \times \left[ U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}} \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \quad (8)$$

car dans ce cas la vitesse de remplissage de  $S_1$  n'est pas

$$U_1 \text{ mais } U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}.$$

## 6.2. Cas poussé

### 6.2.1. Hypothèse 1

On a une injection si  $M_{12} = (M_1, S_1, M_2)$  se trouve dans l'état  $E_1 = (x, F, F)$ . On exclut l'état  $E_{10} = (0, F, F)$  car impossible dans le cas du système poussé. On exclut aussi les états  $E_4 = (x, P1, F)$ ,  $E_5 = (x, P2, F)$  et  $E_{13} = (N, F, F)$  pour les mêmes raisons que dans le cas synchrone.

$$I = \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_1 \right) \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \times U_1 \quad (9)$$

Le ralentissement de  $M_1$  par  $M_2$  se produit lorsque le dipôle  $M_{12}$  se trouve dans l'état  $E_{13} = (N, F, F)$  mais cet état est exclu car  $S_1$  est plein et il n'y a donc pas d'injection possible.

### 6.2.2. Hypothèse 2

On considère que  $M_{12}$  peut se trouver dans l'état  $E_4 = (x, P1, F)$  ou dans l'état  $E_5 = (x, P2, F)$  mais pas dans l'état  $E_{13} = (N, F, F)$  car dans ce cas,  $M_1$  est déjà bloquée. On tient également compte de la disponibilité de  $M_1$ . On obtient alors :

$$I = \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{13}} \times D_1 \right) + \left( \frac{p_4}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{13}} \times D_4 \right) + \left( \frac{p_5}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{13}} \times D_5 \right) \right] \times \left[ U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}} \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \quad (10)$$

car dans ce cas la vitesse de remplissage de  $S_1$  n'est pas  $U_1$  mais  $U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}$ .

Ici aussi, le ralentissement de  $M_1$  par  $M_2$  n'apparaît pas car l'état  $E_{13} = (N, F, F)$  est exclu pour la même raison que pour l'hypothèse 1.

### 6.3. Cas tiré

#### 6.3.1. Hypothèse 1

On a une injection si  $M_{12} = (M_1, S_1, M_2)$  se trouve dans l'état  $E_1 = (x, F, F)$  ou dans l'état  $E_{10} = (0, F, F)$ . On exclut l'état  $E_{13} = (N, F, F)$  car impossible dans le cas du système tiré. On exclut également les états  $E_4 = (x, P1, F)$  et  $E_5 = (x, P2, F)$  pour les mêmes raisons que dans le cas synchrone.

$$I = \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_1 \right) + \left( \frac{p_{10}}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_{10} \right) \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \times U_1 \quad (11)$$

Le ralentissement de  $M_2$  par  $M_1$  se produit à l'état  $E_{10} = (0, F, F)$  car  $S_1$  est vide et donc  $M_2$  est ralentie. Dans ce cas, on devrait avoir l'expression suivante :

$$I = \left[ \left[ U_1 \times \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_1 \right) \right] + \left[ U_1^{ralentie} \times \left( \frac{p_{10}}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10} + p_{13}} \times D_{10} \right) \right] \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \quad (12)$$

mais comme c'est  $M_2$  qui est ralentie (et non  $M_1$ ), on a  $U_1^{ralentie} = U_1$  d'où l'expression précédente.

#### 6.3.2. Hypothèse 2

On considère que  $M_{12}$  peut se trouver dans l'état  $E_4 = (x, P1, F)$  ou dans l'état  $E_5 = (x, P2, F)$ . On tient

également compte de la disponibilité de  $M_1$ . On obtient alors :

$$I = \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_1 \right) + \left( \frac{p_4}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_4 \right) + \left( \frac{p_5}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_5 \right) + \left( \frac{p_{10}}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_{10} \right) \right] \times \left[ U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}} \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \quad (12)$$

car dans ce cas aussi, la vitesse de remplissage de  $S_1$  n'est pas  $U_1$  mais  $U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}$ .

Comme pour l'hypothèse 1, le ralentissement de  $M_2$  par  $M_1$  se produit lorsque le dipôle  $M_{12}$  se trouve dans l'état  $E_{10} = (0, F, F)$ . Dans ce cas, on devrait avoir l'expression suivante :

$$I = \left[ \left[ \left[ U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}} \right] \times \left[ \left( \frac{p_1}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_1 \right) + \left( \frac{p_4}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_4 \right) + \left( \frac{p_5}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_5 \right) \right] \right] + \left[ \left[ U_1^{ralentie} \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}^{ralentie}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}^{ralentie}}{\mu_{21}}} \right] \times \left( \frac{p_{10}}{p_1 + p_4 + p_5 + p_{10}} \times D_{10} \right) \right] \right] \times (\text{taux moyen de blocage par } S_2) \quad (13)$$

mais comme c'est  $M_2$  qui est ralentie (et non  $M_1$ ), on a  $U_1^{ralentie} = U_1$ ,  $\lambda_{11}^{ralentie} = \lambda_{11}$  et  $\lambda_{21}^{ralentie} = \lambda_{21}$  d'où l'expression précédente.

## 7. CALCUL DES $D_i$

Il nous reste à présent à trouver l'expression de  $D_1$ ,  $D_4$ ,  $D_5$  et  $D_{10}$  dans le cas des hypothèses 1 et 2.

### 7.1. Calcul de $D_1$

$D_1$  est la durée moyenne jusqu'à réparation de  $M_3$  ou remplissage de  $S_1$  sachant que l'on se trouve dans l'état  $E_1 = (x, F, F)$ .

#### 7.1.1. Hypothèse 1

a) Remplissage de  $S_1$

Soit  $p(R_1)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1'$  la durée moyenne de remplissage due à ce cas.

Si le stock a un niveau  $x$ , cette durée est :

$$\delta = \frac{N-x}{U_1} \quad (14)$$

et on obtient alors :

$$\frac{\partial D_1'}{\partial x} = \delta \times f_x \times p(R_1) \quad (15)$$

où  $f_x$  représente la densité de probabilité de  $x$  sur l'état  $E_1 = (x, F, F)$ .

$p(R_1)$  représente donc la probabilité que la réparation de  $M_3$  intervienne après  $\delta$ .

Sachant que la loi de distribution des durées de blocage est :  $\mu_3 e^{-\mu_3 t}$  avec :

$$\frac{1}{\mu_3} = \left( \frac{\lambda_{13}}{\lambda_{13} + \lambda_{23}} \times \frac{1}{\mu_{13}} \right) + \left( \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{13} + \lambda_{23}} \times \frac{1}{\mu_{23}} \right)$$

on obtient :

$$p(R_1) = \int_{\delta}^{\infty} \mu_3 e^{-\mu_3 t} \partial t = e^{-\mu_3 \delta} \quad (16)$$

Nous disposons à présent des expressions de  $\delta$  et de  $p(R_1)$ .  $f_x$  étant connue (car calculée lors de la définition du modèle 1) nous pouvons donc calculer  $\frac{\partial D_1'}{\partial x}$ .

b) Réparation de  $M_3$

Soit  $p(R_3)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1''$  la durée moyenne de réparation due à ce cas.

$$\text{On obtient alors : } p(R_3) = 1 - p(R_1) = 1 - e^{-\mu_3 \delta} \quad (17)$$

La durée du blocage par  $S_2$  est donc inférieure à  $\delta$ . La durée moyenne du blocage dans ce cas est :

$$\delta_1 \times p(R_3) = \int_0^{\delta} t \mu_3 e^{-\mu_3 t} = \frac{1 - (1 + \mu_3 \delta) e^{-\mu_3 \delta}}{\mu_3} \quad (18)$$

Ainsi :

$$\frac{\partial D_1''}{\partial x} = \delta_1 \times f_x \times p(R_3) \quad (19)$$

c) Addition des deux cas

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} = \frac{\partial D_1'}{\partial x} + \frac{\partial D_1''}{\partial x} \Rightarrow D_1 = \int_0^N \frac{\partial D_1}{\partial x} dx \quad (20)$$

### 7.1.2. Hypothèse 2

a) Remplissage de  $S_1$

Soit  $p(R_1)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1'$  la durée moyenne de remplissage due à ce cas.

Si le stock a un niveau  $x$ , cette durée est :

$$\delta = \frac{N-x}{U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}} \quad (21)$$

puisqu'en tenant compte de la disponibilité de  $M_1$ , la vitesse de remplissage de  $S_1$  n'est plus  $U_1$  mais bien

$$U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}$$

$p(R_1)$  représente donc la probabilité que la réparation de  $M_3$  intervienne après  $\delta$  ce qui implique que :

$$p(R_1) = \int_{\delta}^{\infty} \mu_3 e^{-\mu_3 t} \partial t = e^{-\mu_3 \delta}$$

Connaissant les expressions de  $\delta$ , de  $p(R_1)$  et de  $f_x$ , nous pouvons calculer  $\frac{\partial D_1'}{\partial x}$ .

b) Réparation de  $M_3$

Soit  $p(R_3)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1''$  la durée moyenne de réparation due à ce cas.

$$\text{Dans ce cas, on a : } p(R_3) = 1 - p(R_1) = 1 - e^{-\mu_3 \delta}$$

La durée du blocage par  $S_2$  est donc inférieure à  $\delta$ . La durée moyenne du blocage dans ce cas est :

$$\delta_1 \times p(R_3) = \int_0^{\delta} t \mu_3 e^{-\mu_3 t} = \frac{1 - (1 + \mu_3 \delta) e^{-\mu_3 \delta}}{\mu_3}$$

Ainsi :  $\frac{\partial D_1''}{\partial x} = \delta_1 \times f_x \times p(R_3)$

c) Addition des deux cas

$$\frac{\partial D_1}{\partial x} = \frac{\partial D_1'}{\partial x} + \frac{\partial D_1''}{\partial x} \Rightarrow D_1 = \int_0^N \frac{\partial D_1}{\partial x} dx$$

## 7.2. Calcul de $D_{10}$

$D_{10}$  est la durée moyenne jusqu'à réparation de  $M_3$  ou remplissage de  $S_1$  sachant  $E_{10} = (0, F, F)$ .

### 7.2.1. Hypothèse 1

a) Remplissage de  $S_1$

Soit  $p(R_1)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1'$  la durée moyenne de remplissage due à ce cas.

Le stock est vide ( $x=0$ ), cette durée est donc :

$$\delta = \frac{N}{U_1} \quad (22)$$

et on obtient alors :

$$\frac{\partial D_{10}'}{\partial x} = \delta \times f_x \times p(R_1)$$

où  $f_x$  représente la densité de probabilité de  $x$  sur l'état  $E_{10} = (0, F, F)$ .

$p(R_1)$  représente donc la probabilité que la réparation de  $M_3$  intervienne après  $\delta$ , donc :

$$p(R_1) = \int_{\delta}^{\infty} \mu_3 e^{-\mu_3 t} dt = e^{-\mu_3 \delta}$$

Disposant des expressions de  $\delta$  et de  $p(R_1)$  et  $f_x$  étant connue car calculée lors de la définition du modèle 1, nous pouvons calculer  $\frac{\partial D_{10}'}{\partial x}$ .

b) Réparation de  $M_3$

Soit  $p(R_3)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1''$  la durée moyenne de réparation due à ce cas.

Dans ce cas, on a :  $p(R_3) = 1 - p(R_1) = 1 - e^{-\mu_3 \delta}$ .

La durée du blocage par  $S_2$  est donc inférieure à  $\delta$ . La durée moyenne du blocage dans ce cas est :

$$\delta_{10} \times p(R_3) = \int_0^{\delta} t \mu_3 e^{-\mu_3 t} dt = \frac{1 - (1 + \mu_3 \delta) e^{-\mu_3 \delta}}{\mu_3}$$

Ainsi :  $\frac{\partial D_{10}''}{\partial x} = \delta_{10} \times f_x \times p(R_3)$

c) Addition des deux cas

$$\frac{\partial D_{10}}{\partial x} = \frac{\partial D_{10}'}{\partial x} + \frac{\partial D_{10}''}{\partial x} \Rightarrow D_{10} = \int_0^N \frac{\partial D_{10}}{\partial x} dx$$

### 7.2.2. Hypothèse 2

a) Remplissage de  $S_1$

Soit  $p(R_1)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_1'$  la durée moyenne de remplissage due à ce cas.

Le stock est vide ( $x=0$ ), cette durée est donc :

$$\delta = \frac{N}{U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}}$$

car on tient compte de la disponibilité de  $M_1$ . On obtient alors :

$$\frac{\partial D_{10}'}{\partial x} = \delta \times f_x \times p(R_1)$$

où  $f_x$  représente la densité de probabilité de  $x$  sur l'état  $E_{10} = (0, F, F)$ .

$p(R_1)$  représente donc la probabilité que la réparation de  $M_3$  intervienne après  $\delta$ , donc :

$$p(R_1) = \int_{\delta}^{\infty} \mu_3 e^{-\mu_3 t} dt = e^{-\mu_3 \delta}$$

Connaissant les expressions de  $\delta$ , de  $p(R_1)$  et de  $f_x$ , nous pouvons à présent calculer  $\frac{\partial D_{10}'}{\partial x}$ .

b) Réparation de  $M_3$

Soit  $p(R_3)$  la probabilité que cet évènement se produise en premier et  $D_{10}''$  la durée moyenne de réparation due à ce cas.

Dans ce cas, on a :  $p(R_3) = 1 - p(R_1) = 1 - e^{-\mu_3 \delta}$ .

La durée du blocage par  $S_2$  est donc inférieure à  $\delta$ . La durée moyenne de ce blocage dans ce cas est :

$$\delta_{10} \times p(R_3) = \int_0^{\delta} t \mu_3 e^{-\mu_3 t} dt = \frac{1 - (1 + \mu_3 \delta) e^{-\mu_3 \delta}}{\mu_3}$$

Ainsi :  $\frac{\partial D_{10}''}{\partial x} = \delta_{10} \times f_x \times p(R_3)$

c) Addition des deux cas

$$\frac{\partial D_{10}}{\partial x} = \frac{\partial D_{10}'}{\partial x} + \frac{\partial D_{10}''}{\partial x} \Rightarrow D_{10} = \int_0^N \frac{\partial D_{10}}{\partial x} dx$$

### 7.3. Calcul de $D_4$

#### 7.3.1. Hypothèse 1

$D_4$  est la durée moyenne jusqu'à réparation de  $M_3$  ou remplissage de  $S_1$  sachant  $E_4 = (x, P1, F)$ .

$D_4$  n'intervient que dans le cadre de l'hypothèse 2. Il n'y a donc pas de calculs relatifs à  $D_4$  dans le cadre de l'hypothèse 1.

#### 7.3.2. Hypothèse 2

a) Remplissage de  $S_1$

Étant donné que  $M_1$  est en panne, la durée moyenne de remplissage de  $S_1$  sachant  $E_4 = (x, P1, F)$  est nulle.

b) Réparation de  $M_3$

Si  $M_1$  était opérationnelle, la durée de remplissage de  $S_1$  serait :

$$\delta = \frac{N - x}{U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}}$$

puisque l'on tient compte de la disponibilité de  $M_1$ .

La durée moyenne du blocage par  $S_2$  est donc inférieure à  $\delta$  :

$$\delta_4 = \int_0^{\delta} t \mu_3 e^{-\mu_3 t} dt = \frac{1 - (1 + \mu_3 \delta) e^{-\mu_3 \delta}}{\mu_3} \quad (22)$$

Ainsi, la durée moyenne de réparation dans ce cas s'exprime par :

$$\frac{\partial D_4''}{\partial x} = \delta_4 \times f_x \quad (23)$$

où  $f_x$  représente la densité de probabilité de  $x$  sur l'état  $E_4 = (x, P1, F)$ .

c) Addition des deux cas

$$\frac{\partial D_4}{\partial x} = \frac{\partial D_4'}{\partial x} + \frac{\partial D_4''}{\partial x} = \frac{\partial D_4''}{\partial x} \Rightarrow D_4 = \int_0^N \frac{\partial D_4''}{\partial x} dx \quad (24)$$

### 7.4. Calcul de $D_5$

#### 7.4.1. Hypothèse 1

$D_5$  est la durée moyenne jusqu'à réparation de  $M_3$  ou remplissage de  $S_1$  sachant  $E_5 = (x, P2, F)$ .

$D_5$  n'intervient que dans le cadre de l'hypothèse 2. Il n'y a donc pas de calculs relatifs à  $D_5$  dans le cadre de l'hypothèse 1.

#### 7.4.2. Hypothèse 2

a) Remplissage de  $S_1$

Étant donné que  $M_1$  est en panne, la durée moyenne de remplissage de  $S_1$  sachant  $E_5 = (x, P2, F)$  est nulle.

b) Réparation de  $M_3$

Si  $M_1$  était opérationnelle, la durée de remplissage de  $S_1$  serait :

$$\delta = \frac{N - x}{U_1 \times \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} + \frac{\lambda_{21}}{\mu_{21}}}}$$

puisque l'on tient compte de la disponibilité de  $M_1$ .

La durée moyenne du blocage par  $S_2$  est donc inférieure à  $\delta$  :

$$\delta_5 = \int_0^{\delta} t \mu_3 e^{-\mu_3 t} dt = \frac{1 - (1 + \mu_3 \delta) e^{-\mu_3 \delta}}{\mu_3} \quad (25)$$

Ainsi, la durée moyenne de réparation dans ce cas s'exprime par :

$$\frac{\partial D_5''}{\partial x} = \delta_5 \times f_x \quad (26)$$

où  $f_x$  représente la densité de probabilité de  $x$  sur l'état  $E_5 = (x, P2, F)$ .

c) Addition des deux cas

$$\frac{\partial D_5}{\partial x} = \frac{\partial D_5'}{\partial x} + \frac{\partial D_5''}{\partial x} = \frac{\partial D_5''}{\partial x} \Rightarrow D_5 = \int_0^N \frac{\partial D_5''}{\partial x} dx \quad (27)$$

### 7.5. Remarque importante

Le fait que le régime soit synchrone, poussé ou tiré n'influence en rien sur les expressions des différents  $D_i$ . Les expressions présentées ci-haut sont valides quel que soit le régime considéré.

## 8. NOUVELLES CARACTÉRISTIQUES DE $M_{12}$

Étant donné que le dipôle  $M_{12}$  est « moins en panne » que prévu, on doit réajuster les taux de panne.

Considérons tout d'abord le cas de l'agrégation amont : à partir du modèle 1, on connaît les paramètres de ce dipôle :  $C^u = (U^u, \lambda_1^u, \mu_1^u, \lambda_2^u, \mu_2^u)$ .

On définit  $\overline{C^u} = (U^u, \lambda^u, \mu^u)$  à l'aide des deux expressions suivantes (Levantesi et al, 2002) :

$$\begin{cases} \lambda^u = \lambda_1^u + \lambda_2^u \\ \frac{1}{\mu^u} = \left( \frac{\lambda_1^u}{\lambda_1^u + \lambda_2^u} \times \frac{1}{\mu_1^u} \right) + \left( \frac{\lambda_2^u}{\lambda_1^u + \lambda_2^u} \times \frac{1}{\mu_2^u} \right) \end{cases} \quad (28)$$

On calcule ensuite  $\lambda_*^u$  à partir de l'expression :

$$PR_2 = U^u \times \frac{\mu^u}{\lambda_*^u + \mu^u} \Rightarrow \lambda_*^u = \frac{\mu^u \times U^u}{PR_2} - \mu^u \quad (29)$$

On sait que  $\lambda_*^u = \lambda_{1*}^u + \lambda_{2*}^u$ , ce qui implique que :

$$\begin{cases} \lambda_{1*}^u = v_1 \times \lambda_*^u \\ \lambda_{2*}^u = v_2 \times \lambda_*^u \end{cases} \quad \text{avec : } v_1 + v_2 = 1 \quad (30)$$

On pose  $v_1 = \frac{\lambda_1^u}{\lambda^u}$  et  $v_2 = \frac{\lambda_2^u}{\lambda^u}$  et on détermine  $\lambda_{1*}^u$  et  $\lambda_{2*}^u$  nous permettant ainsi de définir les nouveaux paramètres du dipôle  $M_{12}$  dans le cas de l'agrégation amont :  $C_*^u = (U^u, \lambda_{1*}^u, \mu_1^u, \lambda_{2*}^u, \mu_2^u)$ .

Dans le cas de l'agrégation aval, on réajuste les taux de panne de la même manière :

On définit  $\overline{C^d} = (U^d, \lambda^d, \mu^d)$  à l'aide des deux expressions suivantes (Levantesi et al, 2002) :

$$\begin{cases} \lambda^d = \lambda_1^d + \lambda_2^d \\ \frac{1}{\mu^d} = \left( \frac{\lambda_1^d}{\lambda_1^d + \lambda_2^d} \times \frac{1}{\mu_1^d} \right) + \left( \frac{\lambda_2^d}{\lambda_1^d + \lambda_2^d} \times \frac{1}{\mu_2^d} \right) \end{cases} \quad (31)$$

On calcule  $\lambda_*^d$  à partir de l'expression :

$$PR_2 = U^d \times \frac{\mu^d}{\lambda_*^d + \mu^d} \Rightarrow \lambda_*^d = \frac{\mu^d \times U^d}{PR_2} - \mu^d \quad (32)$$

Sachant que  $\lambda_*^d = \lambda_{1*}^d + \lambda_{2*}^d$ , on a :

$$\begin{cases} \lambda_{1*}^d = v_1 \times \lambda_*^d \\ \lambda_{2*}^d = v_2 \times \lambda_*^d \end{cases} \quad \text{avec : } v_1 + v_2 = 1 \quad (33)$$

On pose  $v_1 = \frac{\lambda_1^d}{\lambda^d}$  et  $v_2 = \frac{\lambda_2^d}{\lambda^d}$  et on détermine  $\lambda_{1*}^d$  et  $\lambda_{2*}^d$

nous permettant ainsi de définir les nouveaux paramètres du dipôle  $M_{12}$  dans le cas de l'agrégation aval :  $C_*^d = (U^d, \lambda_{1*}^d, \mu_1^d, \lambda_{2*}^d, \mu_2^d)$ .

## 9. UTILISATION DU MODÈLE 2

Pour une ligne à  $n$  machines et  $(n-1)$  stocks intermédiaires, on définit tout d'abord, à l'aide du modèle 1, la machine  $M_{3n}$  équivalente à la sous-ligne  $(M_3, S_3, \dots, M_n)$  par agrégation aval.

On définit ensuite la machine  $M_{12}$  équivalente au dipôle  $(M_1, S_1, M_2)$  à l'aide du modèle 2 en prenant  $(M_{12}, S_2, M_{3n})$  dans la figure 1.

Ensuite, on définit la machine  $M_{123}$  équivalente au dipôle  $(M_{12}, S_2, M_3)$  à l'aide du modèle 2 en prenant  $(M_{123}, S_3, M_{4n})$  dans la figure 1 et ainsi de suite jusqu'à obtenir la machine équivalente à toute la ligne à l'aide du modèle 2.

Nous faisons remarquer qu'en définissant la machine  $M_{3n}$ , on a également défini les machines  $M_{4n}, M_{5n}, \dots, M_{n-1n}$ .

## 10. VALIDATION PAR SIMULATION

Le modèle proposé dans cet article a été validé par simulation. Les paramètres des machines ont été générés aléatoirement et proviennent de (Levantesi et al, 2003) et de (Nahas et al, 2007). Ces données peuvent être retrouvées dans (Belmansour, 2007).

Nous avons considéré 6 exemples de lignes de production série composées de 5, 10 et 15 machines. Chaque exemple a été simulé par 10 répliques d'une durée de 6000 heures chacune. Les résultats obtenus sont

reportés dans le tableau 1 ci-dessous. Les notations utilisées dans ce tableau sont les suivantes :

- *Exemple* : indique le numéro de l'exemple ;
- *1MdP* : représente la valeur analytique trouvée par la technique d'agrégation à un seul mode de défaillance sans prise en compte de l'environnement des machines;
- *2MdP modèle 1* : représente la valeur analytique trouvée par la technique d'agrégation à deux modes de défaillances sans prise en compte de l'environnement des machines ;
- *2MdP modèle 2* : représente la valeur analytique trouvée par la technique d'agrégation à deux modes de défaillances avec prise en compte de l'environnement des machines ;
- *Simulation* : la simulation se fait toujours dans le cas de deux modes de défaillances car ce cas est celui qui reflète au mieux la réalité.

Exemple	Agrégation			Simulation	Erreur par rapport à la simulation		
	1MdP	2MdP modèle 1	2MdP modèle 2		1MdP	2MdP modèle 1	2MdP modèle 2
1	0,49454	0,50730	0,562	0,55152	-10,33 %	-8,01 %	1,90 %
2	0,440	0,45550	0,51470	0,499	-11,82 %	-8,71 %	3,00 %
3	0,559614	0,568464	0,604056	0,6104	-8,32 %	-6,87 %	-1,03 %
4	0,559610	0,568457	0,6280	0,640	-12,56 %	-11,17 %	-1,87 %
5	0,804	0,797	0,795	0,794	1,25%	0,37 %	0,12 %
6	2,361	2,298	2,306	2,315	1,98 %	-0,73 %	-0,38 %

Tableau 1. Résultats de simulation et comparaisons

À partir de ces résultats, on peut voir entre autres que le fait de ne pas tenir compte de la production supplémentaire engendre des erreurs non négligeables surtout lorsque certaines machines de la ligne sont souvent en panne (exemples 1 à 4) c'est-à-dire lorsque leur taux de panne est plus élevé que leur taux de réparation. De plus ces résultats illustrent la précision de notre modèle 2 par rapport au modèle 1 et au cas d'un seul MdD.

## 11. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé un modèle analytique pour l'évaluation de performances de lignes de production série avec machines non fiables à deux modes de défaillances et de stocks intermédiaires de capacités finies. Le modèle proposé ici permet de tenir compte de l'environnement des machines lors du processus d'agrégation contrairement à notre précédent modèle décrit dans (Belmansour et Nourelfath, 2007). La prise en compte explicite des différents modes de défaillances des machines de la ligne étudiée permet une évaluation du taux de production plus précise qu'en groupant ces modes en un seul mode de défaillance moyen. D'autre part, la prise en compte de la production supplémentaire due à l'environnement des machines permet d'obtenir une évaluation encore plus précise du taux de production de la ligne tel que le montrent les résultats de simulation. La précision de l'évaluation des performances des lignes de production étant d'une importance cruciale en industrie, la méthode proposée dans cet article constitue une alternative intéressante aux méthodes classiques considérant un seul mode de défaillance par machine. En perspective de ce travail, nous travaillons sur l'extension du

modèle proposé afin de tenir compte d'un nombre quelconque de modes de défaillances par machine. Les résultats de notre recherche sont applicables en plusieurs contextes industriels, par exemple en industrie automobile où l'évaluation analytique précise et l'optimisation du taux de production sont d'une grande importance.

## REFERENCES bibliographiques

- Belmansour A.T., 2007. Évaluation du taux de production d'une ligne avec stocks intermédiaires et machines à deux modes de défaillances par la technique d'agrégation, mémoire de maîtrise, Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue.
- Belmansour A.T., Nourelfath M., 2007. Évaluation du taux de production d'une ligne avec stocks intermédiaires et machines à deux modes de défaillances par la technique d'agrégation, 7e CIGI, 5-8 juin 2007, TR, Québec, Canada.
- Levantesi R., Matta A., Tolio T., 1999. Continuous two-machine line with multiple failure modes and finite buffer capacity, Atti IV CONVEGNO AITEM, Brescia, Italy, Septembre 13-15, 1999.
- Levantesi R., Matta A., Tolio T., 2002. Performance evaluation of production lines with random processing times, multiple failure modes and finite buffer capacity. Part I: the building block, preprint submitted to Elsevier.
- Levantesi R., Matta A., Tolio T., 2003. Performance evaluation of continuous production lines with machines having different processing times and multiple failure modes, *Perfor. Eval.*, 51, 247-268.
- Nahas N., Nourelfath M., Ait-Kadi D., 2007. Selecting machines and buffers in unreliable series-parallel production lines, *International Journal of Production Research*, (sous presse).
- Terracol C., David R., 1987. Performances d'une ligne composée de machines et de stocks intermédiaires, *R.A.I.R.O APII*, 21 (3), 239-262.