

COUPES VALIDES POUR LE PROBLÈME DE STRIP PACKING

Abdelghani Bekrar et Imed Kacem

UTT, ICD-LOSI CNRS FRE 2848
12, rue Marie Curie
10010 Troyes Cedex
abdelghani.bekrar@utt.fr, imed.kacem@utt.fr

RÉSUMÉ : *Le problème étudié consiste à placer un ensemble de pièces rectangulaires sur une bande de hauteur infinie. L'objectif est de minimiser la hauteur utilisée (problème de strip-packing). Nous adaptons un modèle linéaire et nous proposons un ensemble de coupes valides. Les résultats préliminaires sont encourageants.*

MOTS-CLÉS : *placement, strip-packing, méthodes par coupes.*

1 DESCRIPTION DU PROBLÈME

Le problème étudié peut être formulé comme suit. Nous avons un ensemble L de n pièces à placer sur une bande de largeur W et de hauteur infinie. Chaque pièce i ($1 \leq i \leq n$) est de largeur w_i et de hauteur h_i . L'objectif est de placer ces n pièces en minimisant la hauteur consommée de la bande. Le chevauchement des pièces est interdit. La rotation des pièces est également interdite (c'est-à-dire que les pièces sont orientées et que cette orientation doit être respectée). Ce problème est connu sous le nom *Two-Dimensions Strip Packing Problem* (2SP).

2 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES MIXTES AVEC INTRODUCTION DE COUPES

Cette méthode est basée sur un modèle linéaire adapté en variables mixtes. A cause du nombre important de ses contraintes et de ses variables, il est impossible de résoudre efficacement ce modèle avec un solveur commercial comme le solveur Cplex. La performance de la relaxation linéaire de ce modèle (sans contrainte d'intégrité) est très faible. C'est pourquoi, nous avons ajouté une famille de coupes valides à ce modèle.

Le modèle que nous avons utilisé est celui de Pisinger et Sigurd [6], basé sur la technique de Onodera et al et Chen et al et décrit comme suit :

min H

$$l_{i,j} + l_{j,i} + b_{i,j} + b_{j,i} \geq 1 \quad \forall i, j \in L, i < j$$

$$x_i - x_j + Wl_{i,j} \leq W - w_i \quad \forall i, j \in L$$

$$y_i - y_j + \bar{H}b_{i,j} \leq \bar{H} - h_i \quad \forall i, j \in L$$

$$0 \leq x_i \leq W - w_i \quad \forall i \in L$$

$$0 \leq y_i \leq \bar{H} - h_i \quad \forall i \in L$$

$$l_{i,j}, b_{i,j} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in L$$

$$x_i, y_i \in IR \quad \forall i \in L$$

Dans ce modèle x_i et y_i désignent les coordonnées de la $i^{\text{ème}}$ pièce, $l_{i,j}$ est une variable binaire égale à 1 si la pièce i est placée complètement à gauche de la pièce j (et 0 sinon) et $b_{i,j}$ est une variable binaire égale à 1 si la pièce i est placée en dessous de la pièce j (et 0 sinon).

Les coupes valides sont rajoutées au modèle relaxé en remplaçant les contraintes d'intégrité par $0 \leq l_{i,j} \leq 1$ et $0 \leq b_{i,j} \leq 1$. Par la suite, nous proposons une série de coupes valides dont le but est d'augmenter la borne inférieure du 2SP :

2.1 Coupe faisant le lien avec le problème d'ordonnancement sur machines parallèles sur les y_i

Cette borne est inspirée du principe utilisé dans (Kacem, 2007 [4]) associant des poids fictifs à des jobs à ordonnancer et calculant le flowtime pondéré correspondant. Dans le cas du problème étudié, nous considérons que les pièces sont des ensembles de jobs (c'est-à-dire que chaque pièce i est un ensemble de w_i jobs de durée h_i) à ordonnancer sur W machines identiques. La variable $(y_i + h_i)$ représente donc la date de fin d'exécution de la pièce i (donc de tous les

jobs qui correspondent à cette pièce). Il est clair que tout placement réalisable peut aussi être vu comme un ordonnancement de ces jobs fictifs. A chaque pièce i , nous associons également un poids fictif γ_i . Nous déduisons donc la coupe suivante qui utilise aussi la borne d'Eastman pour le problème $Pm \parallel \sum w_i C_i$:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i w_i (y_i + h_i) \geq \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n \gamma_{[i]} \sum_{j=1}^{i-1} w_{[j]} h_{[j]} + \sum_{j=1}^{w_{[i]}} j h_{[i]} + \frac{W-1}{2W} \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i h_i$$

avec $[i]$ la $i^{\text{ème}}$ pièce lorsque l'ensemble L est trié dans l'ordre croissant des h_i/γ_i . Cette contrainte est valide pour tout vecteur $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ des poids fictifs. C'est pourquoi nous avons généré plusieurs contraintes de ce type.

2.2 Coupe faisant le lien avec le problème d'ordonnancement sur machines parallèles sur les x_i

Il s'agit du même principe. Nous considérons donc que les pièces sont des ensembles de jobs (c'est-à-dire, chaque pièce i est un ensemble de h_i jobs de durée w_i) à ordonnancer sur \bar{H} machines identiques. La variable $(x_i + w_i)$ représente donc la date de fin d'exécution de la pièce i (donc de tous les jobs qui correspondent à cette pièce). Il est clair que tout placement réalisable peut être aussi vu comme un ordonnancement de ces jobs fictifs. A chaque pièce i , nous associons également un poids fictif γ_i . Nous déduisons donc la coupe suivante qui utilise aussi la borne d'Eastman pour le problème $Pm \parallel \sum w_i C_i$:

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i h_i (x_i + w_i) \geq \frac{1}{\bar{H}} \sum_{i=1}^n \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^{i-1} w_{[j]} h_{[j]} + \sum_{j=1}^{h_{[i]}} j w_{[i]} \right) + \frac{\bar{H}-1}{2\bar{H}} \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i h_i$$

avec $[i]$ la $i^{\text{ème}}$ pièce lorsque l'ensemble L est trié dans l'ordre croissant des w_i/γ_i .

Cette contrainte est valide pour tout vecteur $\gamma = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq n}$ des poids fictifs. Pour cette raison nous avons généré plusieurs contraintes de ce type.

2.3 Coupe liant les y_i et H

En testant le modèle avec les coupes précédentes, nous avons remarqué que les solutions réelles obtenues ont tendance à mettre les pièces en haut et à

droite pour respecter de telles coupes. Pour éviter ce problème, nous avons pensé à majorer la somme pondérée des y_i . En appliquant le raisonnement utilisé dans la première coupe, nous pouvons trouver une coupe liant les y_i et H . En effet, en posant $y'_i = H - y_i$ et en utilisant une notation similaire à celle de la première coupe, nous pouvons remarquer la relation suivante en inversant l'échelle des y :

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i w_i y'_i \geq \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^{i-1} w_{[j]} h_{[j]} + \sum_{j=1}^{w_{[i]}} j h_{[i]} \right) + \frac{W-1}{2W} \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i h_i$$

ou bien, plus simplement :

$$H \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i y_i + \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^{i-1} w_{[j]} h_{[j]} + \sum_{j=1}^{w_{[i]}} j h_{[i]} \right) + \frac{W-1}{2W} \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i h_i$$

2.4 Coupe majorant une somme pondérée sur les x_i

Il s'agit d'une coupe analogue à la précédente. Elle est basée sur le changement de variable suivant $x'_i = W - x_i$. Elle est décrite par la relation suivante :

$$W \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i \geq \sum_{i=1}^n \gamma_i h_i x_i + \frac{1}{\bar{H}} \sum_{i=1}^n \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^{i-1} w_{[j]} h_{[j]} + \sum_{j=1}^{h_{[i]}} j w_{[i]} \right) + \frac{\bar{H}-1}{2\bar{H}} \sum_{i=1}^n \gamma_i w_i h_i$$

2.5 Coupe concernant les pièces larges

Pour l'ensemble des grandes pièces telles que chaque paire de pièces ne peuvent être placées côte à côte, nous pouvons les assimiler à des pièces de largeur W . En effet, soit $\mathcal{G} = \{i | \forall j \in \mathcal{G} \text{ et } j \neq i, \text{ on a } w_i + w_j > W\}$. Les contraintes suivantes sont des coupes valides :

$$l_{i,j} + l_{j,i} = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{G} \text{ et } j \neq i \quad (1)$$

$$b_{i,j} + b_{j,i} = 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{G} \text{ et } j \neq i \quad (2)$$

Soient $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq |\mathcal{G}|}$ des poids fictifs. $[i]_{1 \leq i \leq |\mathcal{G}|}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ pièce de l'ensemble \mathcal{G} lorsqu'il est trié dans l'ordre croissant de h_i/γ_i . La relation suivante définit donc une coupe valide :

$$\sum_{i \in \mathcal{G}} \gamma_i (y_i + h_i) \geq \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^i h_{[j]} \right) \quad (3)$$

Bien évidemment, la contrainte suivante est aussi une coupe valide :

$$H \sum_{i \in \mathcal{G}} \gamma_i \geq \sum_{i \in \mathcal{G}} \gamma_i y_i + \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}|} \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^i h_{[j]} \right) \quad (4)$$

2.6 Coupe concernant les pièces hautes

Il s'agit d'un raisonnement analogue à celui présenté dans la coupe précédente. Soit $\mathcal{G}' = \{i | \forall j \in \mathcal{G}' \text{ et } j \neq i, \text{ on a } h_i + h_j > \bar{H}\}$. Les contraintes suivantes sont des coupes valides :

$$l_{i,j} + l_{j,i} = 1 \quad \forall i, j \in \mathcal{G}' \text{ et } j \neq i \quad (5)$$

$$b_{i,j} + b_{j,i} = 0 \quad \forall i, j \in \mathcal{G}' \text{ et } j \neq i \quad (6)$$

Soient $(\gamma_i)_{1 \leq i \leq |\mathcal{G}'|}$ des poids fictifs. $[i]_{1 \leq i \leq |\mathcal{G}'|}$ désigne la $i^{\text{ème}}$ pièce de l'ensemble \mathcal{G}' lorsqu'il est trié dans l'ordre croissant de w_i/γ_i . La relation suivante définit donc une coupe valide :

$$\sum_{i \in \mathcal{G}'} \gamma_i (x_i + w_i) \geq \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}'|} \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^i w_{[j]} \right) \quad (7)$$

Bien évidemment, la contrainte suivante est aussi une coupe valide :

$$W \sum_{i \in \mathcal{G}'} \gamma_i \geq \sum_{i \in \mathcal{G}'} \gamma_i x_i + \sum_{i=1}^{|\mathcal{G}'|} \gamma_{[i]} \left(\sum_{j=1}^i w_{[j]} \right) \quad (8)$$

2.7 Coupes avec des poids fictifs identiques

Il est évident que toutes les coupes présentées sont valides pour le cas particulier où tous les poids fictifs sont égaux à 1. Toutefois, il est plus avantageux dans ce cas d'abandonner le calcul de la borne d'Eastman et d'appliquer la règle *SPT* (*Shortest Processing Time*) généralisée sur machines parallèles. Nous avons établi une procédure simple permettant d'appliquer cette règle à notre cas particulier dans lequel nous considérons des pièces au lieu des jobs.

2.8 Coupe évitant le chevauchement des pièces en bas de la plaque

Lorsque nous avons testé les coupes précédentes, nous avons remarqué que dans certaines solutions, plusieurs pièces se chevauchent en bas de la plaque ($y_i = 0$) alors que la somme des largeurs de ces pièces dépasse W . Nous avons donc introduit une coupe afin d'éviter cette situation qui viole les contraintes du problème initial. Soient \mathcal{S} la solution réelle violée et $\mathcal{V} = \{i | y_i = 0 \text{ dans } \mathcal{S}\}$. Nous avons $\sum_{i \in \mathcal{V}} w_i > W$. Nous appliquons une coupe du même type que la première coupe avec des poids fictifs égaux à 1 uniquement sur les pièces de cet ensemble \mathcal{V} . Bien évidemment, nous n'utilisons pas la borne d'Eastman dans le calcul de la borne, mais la procédure *SPT* généralisée que nous avons évoquée précédemment. Soit $SPT(\mathcal{V})$ la valeur de cette borne calculée pour l'ensemble \mathcal{V} . La contrainte suivante est une coupe valide :

$$\sum_{i \in \mathcal{V}} w_i (y_i + h_i) \geq SPT(\mathcal{V}) \quad (9)$$

En suivant la même approche, nous pouvons facilement remarquer que cette coupe peut être immédiatement généralisée pour les pièces en haut de la plaque, sur le bord gauche et sur le bord droit de la plaque.

2.9 Coupe évitant le chevauchement avec les pièces placées en bas de la plaque

Après l'application de la famille de coupes précédentes aux pièces sur le bas de la plaque, l'ensemble \mathcal{V} ayant $y_i = 0$ respecte la relation $\sum_{i \in \mathcal{V}} w_i \leq W$. Toutefois, des pièces peuvent toujours se chevaucher avec les pièces de \mathcal{V} sans être sur le niveau bas de la plaque dans la nouvelle solution réelle \mathcal{S}' . Soit $\mathcal{U} = \{i | y_i \neq 0 \text{ et } i \text{ est en chevauchement avec une pièce } j \text{ de } \mathcal{V} \text{ ayant } y_j = 0 \text{ dans } \mathcal{S}'\}$. Pour ce cas, nous proposons une contrainte adaptée pour éviter le problème. Nous associons un poids fictif infini M à chaque pièce de \mathcal{V} ayant $y_j = 0$ et un poids fictif égal à 1 à toute pièce de \mathcal{U} . Le problème d'ordonnancement respectif peut être résolu (ou bien une borne inférieure peut être facilement obtenue) en plaçant toutes les pièces de \mathcal{V} en bas de la plaque et en ordonnant les pièces de \mathcal{U} par la procédure *SPT* généralisée.

3 QUELQUES RÉSULTATS COMPARATIFS

Quelques résultats expérimentaux sont présentés dans les tableaux suivants. Dans le premier tableau nous avons testé les instances de Hifi [3]. Les tests sur les autres instances de la littérature sont donnés

dans le tableau 2. Les variables suivantes sont évaluées pour chaque instance (NOM représente le nom de l'instance) :

- L_{BKCS} : borne inférieure de (Bekrar et al., 2006)[1] qui améliore la borne proposée par Martello et al., (2003)[5].
- L_{CP} : borne inférieure donnée par la méthode des coupes.
- OPT : valeur optimale.

Pour la tableau 2, au lieu de considérer la solution optimale, on considère la borne supérieure calculée par l'heuristique $BSHF$ proposée dans [1]. Comme

TAB. 1 – Résultats sur les instances de Hifi

Name	n	W	L_{BKCS}	L_{CP}	OPT
SCP1	10	5	13	13	13
SCP2	11	4	40	40	40
SCP3	15	6	14	14	14
SCP4	11	6	19	19	20
SCP5	8	20	20	20	20
SCP6	7	30	38	38	38
SCP7	8	15	12	13	14
SCP8	12	15	17	17	17
SCP9	12	27	68	68	68
SCP10	8	50	78	79	80
SCP11	10	27	47	47	48
SCP12	18	81	34	34	34
SCP13	7	70	42	43	50
SCP14	10	100	60	60	69
SCP15	14	45	34	34	34
SCP16	14	6	32	33	33
SCP17	9	42	39	39	39
SCP18	10	70	89	91	100
SCP19	12	5	26	26	26
SCP20	10	15	19	20	20
SCP21	11	30	135	135	140
SCP22	22	90	34	34	39
SCP23	12	15	33	33	34
SCP24	10	50	103	103	109
SCP25	15	25	35	35	36

on peut le constater dans ces deux tableau, l'introduction des coupes dans le modèle linéaire donne toujours les meilleures bornes. Ainsi, pour les instances de Hifi, on a pu améliorer six instances. Pour les autres instances de la littérature, 11 instances parmi les 38 ont été améliorées. Ce qui représente 26% d'amélioration en moyenne.

4 CONCLUSION

Cette approche a été testée expérimentalement à l'aide du solveur Cplex avec Concert Technology. Notons que nos tests ont été réalisés en ajoutant ou en supprimant des coupes classiques de la littérature

TAB. 2 – Résultats sur des instances de la littérature

Nom	n	W	L_{BKCS}	L_{CP}	$BSHF$
ht1	16	20	20	20	20
ht2	17	20	20	20	23
ht3	16	20	20	20	25
ht4	25	40	15	15	17
ht5	25	40	15	15	17
ht6	25	40	15	15	15
ht7	28	60	30	30	33
ht8	29	60	30	31	36
ht9	28	60	30	30	30
cgcut1	16	10	23	23	25
cgcut2	23	70	63	64	82
cgcut3	62	70	636	637	728
gcut1	10	250	655	1016	1016
gcut2	20	250	1133	1133	1349
gcut3	30	250	1803	1803	1810
gcut4	50	250	2934	2934	3214
ngcut1	10	10	20	21	23
ngcut2	17	10	28	30	33
ngcut3	21	10	28	28	34
ngcut4	7	10	17	17	23
ngcut5	14	10	36	36	37
ngcut6	15	10	29	30	36
ngcut7	8	20	20	20	21
ngcut8	13	20	32	32	44
ngcut9	18	20	49	49	64
ngcut10	13	30	58	58	84
ngcut11	15	30	50	50	52
ngcut12	22	30	77	86	87
beng1	20	25	30	30	35
beng2	40	25	57	59	60
beng3	60	25	84	85	89
beng4	80	25	107	108	112
beng5	100	25	134	134	138
beng6	40	40	36	37	39
beng7	80	40	67	67	72
beng8	120	40	101	101	108
beng9	160	40	126	126	126
beng10	200	40	156	156	158

(Gomory,,). Les résultats préliminaires sont encourageants. Toutefois, la grande difficulté de cette méthode est son aspect empirique (quelles sont les contraintes à rajouter et celles à supprimer?). C'est pourquoi, nous pensons qu'une étude polyédrale de ce problème est une perspective très intéressante que nous comptons poursuivre.

REMERCIEMENTS

Ce travail a été financé par la Région Champagne-Ardenne et le Fond Social Européen.

Les auteurs remercient vivement M. Chengbin Chu (directeur du laboratoire d'optimisation des systèmes industriels (LOSI)) pour tout son aide et tous ses conseils.

REFERENCES

Bekrar et al., 2008. "An Improved Heuristic and an Exact Algorithm for the 2D Strip and Bin Packing Problem", International Journal of Production Design (IJPD), to appear.

Gilmore P. and Gomory R. 1965. "Multistage cutting stock problems of two and more dimensions", Operations Research (13),pp. 94-120.

Hifi M. 1998. "Exact algorithms for the guillotine strip cutting/packing problem", Computers & Operations Research, Volume 25, Issue 11, pp. 925-940.

Kacem I. 2007. Lower bounds for Tardiness Minimization on a Single Machine with Family Setup Times. International Journal of Operations Research. Vol 4, No 1, pp. 1-14 .

Martello et al., 2003. "An Exact Approach to the Strip Packing Problem", INFORMS Journal on Computing 15 (3), 310-319.

Pisinger D. and Sigurd M. 2005. "The two-dimensional bin packing problem with variable bin sizes and costs", Discrete Optimization, Volume 2, Issue 2, pp. 154-167.