

COMMANDE DE ZONES DE CONFLITS DANS UNE ALGÈBRE DE DIOÏDE

Olivier Boutin^{1,2}, Bertrand Cottenceau² et Anne L'Anton¹

¹Institut de Recherche en Communications
et Cybernétique de Nantes
IRCCyN - UMR CNRS 6597
Équipe Analyse et Commande des Systèmes
à Événements Discrets (ACSED)
1 rue de la Noë – BP 92101
44321 Nantes Cedex 03, France
<http://www.irccyn.ec-nantes.fr>

²Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés
LISA - EA 4014
Équipe Modèles et Systèmes Dynamiques (MSD)
62 avenue Notre Dame du Lac
49000 Angers, France
<http://www.istia.univ-angers.fr/LISA>

{olivier.boutin, anne.l-anton}@irccyn.ec-nantes.fr
bertrand.cottenceau@istia.univ-angers.fr

RÉSUMÉ : *Cet article traite du comportement de systèmes à événements discrets présentant des ressources partagées entre plusieurs sous-systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linéaires. C'est le cas par exemple de deux lignes de production parallèles nécessitant un même opérateur.*

La modélisation des partages de ressource par Réseaux de Petri (RdP) ne relève pas de la classe des graphes d'événements. Par conséquent la dynamique des systèmes considérés ne s'établit pas naturellement sur les algèbres de type $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$.

Nous proposons ici une règle d'affectation des ressources partagées telle que l'on puisse analyser la dynamique du système dans le meilleur et dans le pire cas. Le modèle du partage de ressource sous forme de RdP peut alors être transformé en un Graphes d'Événements Temporisé (GET) dont certains temps sont incertains. Ces incertitudes décrivent simplement des durées minimales et maximales d'attente de la ressource partagée. On propose donc, moyennant une politique d'affectation adaptée, de modéliser les partages de ressources par des systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ à temps incertains pour lesquels il est possible de décrire la relation de transfert sur un dioïde d'intervalles. On dispose alors d'un cadre de modélisation $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linéaire, bien que les systèmes considérés ne soient pas $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linéaires par essence, afin de réaliser des synthèses de lois de commande.

MOTS-CLÉS : *Systèmes à événements discrets, modélisation et commande, réseaux de Petri, algèbre des dioïdes, analyse par intervalles.*

1 INTRODUCTION

Les Systèmes à Événements Discrets (SED) constituent une classe très vaste de systèmes dynamiques, allant des réseaux de transport, de communication ou informatiques aux systèmes manufacturiers. Beaucoup de problèmes d'optimisation sont *non linéaires* dans l'arithmétique traditionnelle, mais le deviennent une fois considérés dans des dioïdes (Baccelli, Cohen, Olsder & Quadrat 1992, Heidergott, Olsder & van der Woude 2005). En particulier, certaines représentations linéaires au sein d'un dioïde peuvent décrire le comportement de Graphes d'Événements Temporisés (GET) (Cohen, Moller, Quadrat & Viot 1989).

Dans le contexte spécifique de la gestion de production, les GET permettent de modéliser de manière appropriée des phénomènes manufacturiers tels que les délais et les synchronisations (Trouillet & Benasser 2002, Amari, Demongodin & Loiseau 2004). Cependant, les phénomènes de *ressource partagée* ne peuvent pas être représentés par des GET, parce

qu'une place ne possède pas plus d'un arc entrant ou sortant dans cette classe de diagramme. Dans les *job-shops*, on doit couramment prendre des décisions concernant les chemins que doivent suivre les encours au niveau des embranchements. En pratique, ces derniers peuvent être considérés comme des ressources partagées car en général une politique d'utilisation par exclusion mutuelle leur est appliquée. Ceci revient à dire que l'utilisation des dioïdes « classiques » n'est pas possible quand on veut étudier des *job-shops* (Boutin, Cottenceau & L'Anton 2007).

D'autres modèles tels que les automates (par exemple les automates $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ (Gaubert 1995, Al Saba, Boimond & Lahaye 2006)) sont souvent plus adaptés à l'étude de tels systèmes. Cependant ils impliquent une politique d'affectation cyclique des ressources partagées, ce qui n'est pas le cas dans notre champ d'étude. À notre connaissance, il n'existe pas d'autres travaux traitant de ressources partagées dans des systèmes de production pour lesquels une modélisation linéaire dans une algèbre de dioïde a pu être obtenue.

Dans cet article, nous présentons une politique de gestion d'une ressource partagée, permettant de décrire un système incluant une telle ressource au travers d'incertitudes temporelles, sous forme d'intervalles. Cette politique est un compromis entre une affectation cyclique de la ressources aux processus concurrents et une gestion de type *First In First Out* (FIFO).

Pour cette politique, nous montrons qu'un problème de ressource partagée entre deux sous-systèmes peut être transformé en un problème comportant des délais incertains et des GET désynchronisés, au prix d'incertitudes temporelles quant à l'accès à la ressource et sur sa durée d'indisponibilité. Néanmoins, notons que ceci ne constitue pas une équivalence entre les deux représentations.

Les résultats de cette étude fournissent une méthode pour formellement étudier des *job-shops*¹ (et non seulement des *flow-shops*²) dans le dioïde des intervalles présenté dans (Lhommeau, Hardouin, Cottencau & Jaulin 2004). Les GET avec incertitudes temporelles peuvent être transposés en des équations linéaires dans ce dioïde. Ceci représente une alternative aux méthodes empiriques pour étudier les *job-shops*, et permet la synthèse de commande pour ces systèmes dans le but d'obtenir un comportement en juste-à-temps³. Cette commande est de plus obtenue par simple suite de calculs, comme elle est exprimée dans le même formalisme que le modèle du système lui-même.

Cette synthèse est faite de sorte à maintenir le système commandé dans un ensemble de comportements admissibles. Par calcul, on cherche donc à obtenir un système qui donne un résultat recherché. Comme les opérateurs \oplus et \otimes ne sont pas inversibles, il n'est en général pas possible d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde. Nous utilisons donc la théorie de la résiduation (Blyth & Janowitz 1972) qui permet de définir des « pseudos-inverses » d'applications isotones définies sur des ensembles ordonnés.

Dans la section suivante, nous introduisons les aspects théoriques nécessaires à la modélisation linéaire et à la commande de systèmes complexes, grâce aux dioïdes et à la théorie de la résiduation. Puis nous présentons l'analyse par intervalles appliquée aux dioïdes, afin de permettre la manipulation de données incertaines. Dans cette même section nous montrons comment illustrer graphiquement de tels problèmes grâce au formalisme privilégié pour la représentation des systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linéaires, les GET, et comment effectuer la synthèse de loi de commande d'un système incer-

tain. Ensuite nous décrivons comment nous traitons les problèmes d'exclusion mutuelle et la classe de systèmes correspondante. Enfin, dans la section 5, nous confrontons notre méthode sur un cas d'application de système de production comportant un convoyeur en forme de huit.

2 SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES

2.1 Éléments de la théorie des dioïdes

Nous rappelons dans cette section quelques aspects de la théorie des dioïdes. Le lecteur est invité à consulter (Baccelli et al. 1992) ou (Cohen et al. 1989) pour une présentation exhaustive.

Définition 1 (Dioïde) *Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} muni de deux opérations internes notées \oplus (la somme) et \otimes (le produit)⁴. Elles sont toutes deux associatives (c'est-à-dire $\forall(a, b, c) \in \mathcal{D}^3, (a \star b) \star c = a \star (b \star c)$)⁵ et admettent un élément neutre noté ε et e respectivement. De plus, la somme est commutative (c'est-à-dire $\forall(a, b) \in \mathcal{D}^2, a \oplus b = b \oplus a$) et idempotente (c'est-à-dire $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$). Le produit est distributif sur la somme (c'est-à-dire $\forall a, b, c \in \mathcal{D}^3, a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ et $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$) et l'élément ε est absorbant pour le produit (c'est-à-dire $\forall a \in \mathcal{D}, \varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$).*

Définition 2 (Relation d'ordre) *Une relation d'ordre \succcurlyeq peut être associée au dioïde \mathcal{D} selon l'équivalence $\forall(a, b) \in \mathcal{D}^2, a \succcurlyeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$.*

Les opérations \oplus et \otimes sont cohérentes avec la relation \succcurlyeq par l'implication suivante :

$\forall(a, b, c) \in \mathcal{D}^3$, si $a \succcurlyeq b$, alors $a \star c \succcurlyeq b \star c$ et $c \star a \succcurlyeq c \star b$.

Définition 3 (Complétude) *Un dioïde \mathcal{D} est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si le produit est distributif par rapport aux sommes infinies, c'est-à-dire si*

$$\forall a \in \mathcal{D} \text{ et } \forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}, a \otimes \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x \right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} a \otimes x.$$

Exemple 1 (Dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$) *L'ensemble $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni du maximum comme somme et de la somme classique (+) comme produit est un dioïde complet, généralement noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, dont $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$.*

L'ensemble $\overline{\mathbb{Z}}$ muni du minimum comme somme et du + comme produit est un dioïde complet, généralement noté $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, dont $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$.

Définition 4 (L'étoile de Kleene) *Soit \star l'opérateur défini par $a^\star = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} a^i$, avec $a^0 = e$.*

⁴le symbole \otimes pourra être omis quand aucune confusion ne sera possible avec le produit traditionnel

⁵ici et dans le reste de l'article, le symbole \star correspondra aussi bien à l'opération \oplus qu'à \otimes

¹tels des ateliers de fraisage ou de perçage où les produits suivent des cheminements multiples, propres à chacun d'entre eux, entre les différents postes de travail disponibles

²tels des lignes de production où tous les produits suivent un cheminement unique

³c'est-à-dire réaliser un objectif de production tout en diminuant les stocks intermédiaires

Cet opérateur est cohérent avec la relation d'ordre \succcurlyeq par l'implication suivante :

$\forall (a, b) \in \mathcal{D}^2$, si $a \succcurlyeq b$, alors $a^* \succcurlyeq b^*$.

De plus, $\forall (a, b) \in \mathcal{D}^2$, nous avons

$x(yx)^* = (xy)^*x$ et $(x^*)^* = x^*$.

Théorème 1 (Baccelli et al. 1992) Dans un dioïde complet, l'équation implicite $x = ax \oplus b$ admet $x = a^*b$ pour plus petite solution.

Définition 5 Si \mathcal{D} est un dioïde complet, alors \wedge est la loi associative commutative et idempotente vérifiant :

$$a \wedge b = \bigoplus \{x \mid a \succcurlyeq x \text{ et } b \succcurlyeq x\}$$

Théorème 2 Si \mathcal{D} est un dioïde, alors l'ensemble $\mathcal{D}^{n \times n}$ des matrices $n \times n$ ayant leur entrées dans \mathcal{D} est aussi un dioïde dont la somme et le produit sont définis par $\forall A, B \in \mathcal{D}^{n \times n}$, $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ et $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}$.

2.2 Théorie de la résiduation

Dans un souci d'inversion d'applications, impossible dans le cadre d'un dioïde, la théorie de la résiduation fournit, sous certaines conditions, les plus grandes solutions aux inégalités de type $b \succcurlyeq f(x)$, où f est une application isotone (c'est-à-dire $b \succcurlyeq a \Rightarrow f(b) \succcurlyeq f(a)$), définie sur des ensembles ordonnés (Blyth & Janowitz 1972).

Définition 6 (Résiduation) Une application isotone $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$, où \mathcal{D} et \mathcal{E} sont des ensembles ordonnés, est une application résiduable si $\forall y \in \mathcal{E}$, la borne supérieure du sous-ensemble $\{x \mid y \succcurlyeq f(x)\}$, notée $f^\sharp(y)$, existe et appartient à ce sous-ensemble. L'application f^\sharp est appelée la résiduée de f .

Théorème 3 (Baccelli et al. 1992) Considérons l'application $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ où \mathcal{D} et \mathcal{E} sont des dioïdes complets dont les plus petits éléments sont notés $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ et $\varepsilon_{\mathcal{E}}$. Alors f est résiduable si et seulement si $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{E}}$ et $f(\bigoplus_{x \in \mathcal{F}} x) = \bigoplus_{x \in \mathcal{F}} f(x)$ pour tout $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{D}$.

Corollaire 1 Les applications $L_a : x \mapsto ax$ et $R_a : x \mapsto xa$ définies sur le dioïde complet \mathcal{D} sont toutes les deux résiduables. Leurs résiduées sont généralement notées respectivement $L_a^\sharp = a \backslash x$ et $R_a^\sharp = x / a$ dans la littérature⁶.

⁶ainsi $a \backslash b$ est la plus grande solution de $b \succcurlyeq ax$

3 LES DIOÏDES ET L'ARITHMÉTIQUE DES INTERVALLES

3.1 L'analyse par intervalles

L'analyse par intervalles a été développée par des mathématiciens depuis les années 50 et 60 (voir par exemple (Moore 1966)) comme une approche pour encadrer les erreurs dans les calculs mathématiques par ordinateur, afin d'obtenir des résultats fiables.

Nous allons brièvement présenter comment l'arithmétique des intervalles peut être appliquée aux dioïdes. Nous recommandons la lecture de (Litvinov & Sobolevskiï 2001) et (Lhommeau et al. 2004) pour plus d'informations.

Définition 7 (Intervalle) Un intervalle (fermé) dans le dioïde \mathcal{D} est un ensemble de la forme $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}] = \{t \in \mathcal{D} \mid \bar{x} \succcurlyeq t \succcurlyeq \underline{x}\}$ où \underline{x} et \bar{x} appartenant au dioïde \mathcal{D} sont appelées respectivement borne inférieure et supérieure de l'intervalle \mathbf{x} .

Définition 8 (Dioïde d'intervalles) Un dioïde d'intervalles, noté $I(\mathcal{D})$, peut être défini à partir d'un dioïde \mathcal{D} s'il est muni des opérations algébriques $\overline{\oplus}$ et $\overline{\otimes}$ définies par $\mathbf{x} \overline{\star} \mathbf{y} = [\underline{x} \star \underline{y}, \bar{x} \star \bar{y}]$, $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$. Les intervalles $\varepsilon = [\varepsilon, \varepsilon]$ et $\mathbf{e} = [e, e]$ sont respectivement les éléments neutres des opérateurs $\overline{\oplus}$ et $\overline{\otimes}$.

Remarque 1 Comme $\bar{x} \star \bar{y} \succcurlyeq \underline{x} \star \underline{y}$ quand $\bar{x} \succcurlyeq \underline{x}$ et $\bar{y} \succcurlyeq \underline{y}$, alors $I(\mathcal{D})$ est fermé vis-à-vis des opérations $\overline{\oplus}$ et $\overline{\otimes}$.

Définition 9 Soit $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ un sous-ensemble infini de $I(\mathcal{D})$, la somme infinie des éléments de ce sous-ensemble est égale à :

$$\overline{\bigoplus_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha} = [\bigoplus_{\alpha} \underline{x}_\alpha, \bigoplus_{\alpha} \bar{x}_\alpha]$$

Définition 10 (Relation d'ordre) Un dioïde $I(\mathcal{D})$ peut être muni d'un ordre (partiel) naturel : $\mathbf{a} \succcurlyeq_{I(\mathcal{D})} \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{a} \overline{\oplus} \mathbf{b} \Leftrightarrow \bar{a} \succcurlyeq_{\mathcal{D}} \bar{b}$ et $\underline{a} \succcurlyeq_{\mathcal{D}} \underline{b}$

Théorème 4 (Litvinov & Sobolevskiï 2001) Un dioïde $I(\mathcal{D})$ est complet si le dioïde \mathcal{D} l'est.

Remarque 2 Notons que si \mathbf{x} et \mathbf{y} sont des intervalles dans $I(\mathcal{D})$, alors $\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Leftrightarrow \bar{y} \succcurlyeq \bar{x} \succcurlyeq \underline{x} \succcurlyeq \underline{y}$. En particulier, $\mathbf{x} = \mathbf{y} \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{y}$ et $\bar{x} = \bar{y}$.

Remarque 3 $I(\mathcal{D})$ étant fermé vis-à-vis des opérations $\overline{\oplus}$ et $\overline{\otimes}$, l'étoile de Kleene admet une extension naturelle dans les intervalles. Ainsi $\mathbf{x}^* = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{x}^i = [\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \underline{x}^i, \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \bar{x}^i] = [\underline{x}^*, \bar{x}^*]$ avec $\mathbf{x}^0 = \mathbf{e}$

Théorème 5 (Lhommeau et al. 2004) Soit un dioïde \mathcal{D} complet. L'application $\mathbf{L}_a : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$ est résiduable et sa résiduée est donnée par $\mathbf{L}_a^\sharp(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \backslash \mathbf{b} = [\underline{a} \backslash \underline{b} \wedge \overline{a} \backslash \overline{b}, \overline{a} \backslash \overline{b}]$. De même, l'application $\mathbf{R}_a : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \otimes \mathbf{a}$ est résiduable et sa résiduée est donnée par $\mathbf{R}_a^\sharp(\mathbf{b}) = \mathbf{a} / \mathbf{b} = [\underline{b} / \underline{a} \wedge \overline{b} / \overline{a}, \overline{b} / \overline{a}]$.

3.2 Les graphes d'événements temporisés avec incertitudes temporelles

À partir du formalisme des Réseaux de Petri (RdP) (Diaz 2001), nous allons introduire la notion de graphe d'événements temporisé.

Définition 11 (GET) Un graphe d'événements est un RdP dont les places ont exactement une transition amont et une transition aval.

Un graphe d'événements est dit temporisé si à chaque place est associé un temps, défini dans l'ensemble des entiers naturels.

Remarque 4 Les phénomènes de concurrence ne peuvent pas être représentés dans un graphe d'événements, puisqu'une place ayant de multiples arcs entrants et/ou sortants n'est pas autorisée (voir par exemple le diagramme de la figure 3, qui n'est pas un GET). Néanmoins, les GET modélisent de manière adéquate les synchronisations entre processus et les délais qui peuvent avoir lieu entre eux.

Un délai associé à une place exprime le temps minimal de séjour pour un jeton dans cette place. En appliquant une politique de franchissement « au plus tôt »⁷, les GET peuvent être considérés comme des SED dynamiques linéaires en utilisant des algèbres de dioïde (Cohen et al. 1989, Baccelli et al. 1992). En particulier, il est possible d'obtenir une représentation d'état linéaire dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, en associant pour chaque transition x un dateur $x(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{max}$, qui est une application croissante représentant la date du $k^{\text{ième}}$ tir de la transition x .

Les systèmes complexes que nous considérons possèdent des incertitudes temporelles en leur sein, qui peuvent être modélisées linéairement dans un dioïde d'intervalles (Lhommeau et al. 2004). Les relations linéaires formulées dans une telle algèbre peuvent être transposées sous forme de GET avec incertitudes temporelles et vice-versa. De fait, les intervalles utilisés comme délais représentent les temps de séjour obligatoires minimaux et maximaux pour un jeton dans la place qui lui est associée, avant de pouvoir contribuer au tir de la transition aval correspondante. Plus concrètement, on peut considérer que les délais incertains sont déterminés « dynamiquement » lorsqu'un

jeton arrive dans une place possédant un tel délai. Ainsi, on modélise des intervalles de comportement garantis compte tenu d'incertitudes temporelles. Il y a une différence de sémantique fondamentale entre les RdP temporels (que les temporisations soient situées sur les transitions (Merlin 1974) ou sur les places (Khansa 1997)) et les GET avec incertitudes temporelles que nous utilisons, car dans notre cadre d'étude un jeton ne meurt pas quand la borne supérieure de l'intervalle de temps de la place où il se situe est atteinte, à la différence des RdP temporels où les temps représentent une contrainte de fonctionnement.

Exemple 2 Le GET de la figure 1 peut représenter une cellule de production se comportant comme suit : trois éléments d'encours peuvent être usinés en même temps et cet usinage prend au minimum 2 et au maximum 5 unités de temps pour une pièce. Si le poste de travail n'est pas disponible, les encours restent dans le stock amont, appelé S_{amont} . Quand une opération est terminée, l'élément usiné correspondant est placé dans le stock aval, appelé S_{aval} ⁸, et le poste de travail peut opérer un autre élément d'encours juste après, ou seulement après une unité de temps.

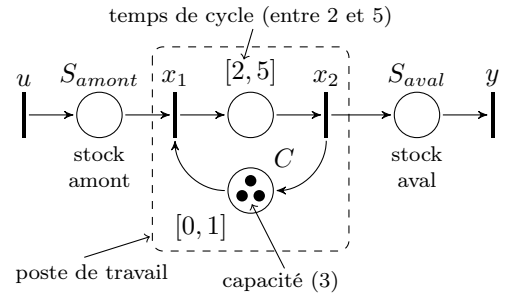


FIG. 1 – Diagramme d'un poste de travail

La transition x_1 est une synchronisation entre l'arrivée d'un produit sur le stock amont du poste de travail et la disponibilité de ce dernier. Elle ne sera tirée que si les deux places S_{amont} et C possèdent au moins un jeton et si le délai incertain de la place est écoulé. En utilisant les fonctions dateur associées aux transitions de ces GET, on obtient :

$$\begin{cases} x_1(k) &= \max(u(k), a + x_2(k-3)) \\ x_2(k) &= b + x_1(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{cases}$$

Où $a \in [0, 1]$ et $b \in [2, 5]$. Ce système se transpose en un système d'équations d'état linéaires dans le dioïde $I(\overline{\mathbb{Z}}_{max})$:

$$\begin{cases} x_1(k) &= u(k) \oplus [0, 1] \otimes x_2(k-3) \\ x_2(k) &= [2, 5] \otimes x_1(k) \\ y(k) &= x_2(k) \end{cases} \quad (1)$$

⁸ S_{amont} et S_{aval} possèdent tous les deux une capacité supposée infinie

⁷toute transition franchissable est immédiatement franchie

Un dateur peut aussi être représenté par sa transformée en γ , définie formellement par $\gamma x(k) = x(k-1)$. γ peut être considéré comme un opérateur de retard dans le domaine des événements. Ainsi les dateurs sont vus comme des séries formelles dont les coefficients sont dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et dont les exposants sont dans \mathbb{Z} , et dont la forme générale est $X(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k)\gamma^k$, dans le dioïde noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$.

Définition 12 (Causalité) Soit une série $s \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$. En posant $val(s) = \min\{k \in \mathbb{Z} \mid s(k) \neq \varepsilon\}$, s est causale si $s = \varepsilon$ ou si $\{val(s) \geq 0 \text{ et } s \succcurlyeq \gamma^{val(s)}\}$. L'ensemble des éléments causaux de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ possède une structure de dioïde complet et est noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}^+[\gamma]$.

Dans ce dioïde, les équations d'état linéaires sont de la forme du système canonique suivant :

$$\begin{cases} X(\gamma) = AX(\gamma) \oplus BU(\gamma) & (2) \\ Y(\gamma) = CX(\gamma) & (3) \end{cases}$$

Où $X \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^n$ représente le comportement des transitions internes, $U \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^p$ représente le comportement des transitions d'entrée, $Y \in (\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^q$ représente le comportement des transitions de sortie, et $A \in \mathbf{A} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{n \times n}$, $B \in \mathbf{B} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{n \times p}$ et $C \in \mathbf{C} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{q \times n}$ représentent les liens entre les transitions.

La classe des systèmes incertains que nous considérons sont des GET où l'on ne connaît que les bornes des délais temporels. Dès lors les incertitudes peuvent être décrites par des intervalles dont les bornes inférieures et supérieures sont connues et les matrices des équations (2) et (3) sont telles que $\mathbf{A} \in \mathbf{A} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbf{B} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{n \times p}$ et $\mathbf{C} \in \mathbf{C} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{q \times n}$. Chaque entrée des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} et \mathbf{C} est un intervalle dont les bornes sont dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}^+[\gamma]$. D'après le théorème 1, l'équation (2) a pour solution minimale $X = \mathbf{A}^* \mathbf{B} U$. Ainsi $Y = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} U$, et la fonction de transfert du système est $H = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \in \mathbf{H} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{q \times p}$, où \mathbf{H} représente l'intervalle dans lequel la fonction de transfert H va se situer, pour toutes les valeurs des paramètres incertains.

En conséquence, en introduisant le vecteur d'état $X(\gamma) = (x_1(\gamma) \ x_2(\gamma))^t$, le système (1) peut être décrit sur le dioïde $I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])$ par :

$$\begin{cases} X(\gamma) = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^3, 1\gamma^3] \\ [2, 5] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} [e, e] \\ [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} u(\gamma) \\ y(\gamma) = ([\varepsilon, \varepsilon] \ [e, e]) X(\gamma) \end{cases}$$

3.3 La synthèse de commande

En considérant des modèles de système possédant des incertitudes, il s'agit de réaliser la synthèse d'un correcteur capable de contrôler de tels systèmes possédant des variations, dont les limites sont connues.

Pour ce faire, nous utilisons des correcteurs de type retour de sortie (Cottenceau, Hardouin, Boimond & Ferrier 1999), permettant la commande d'un système en boucle fermée. La figure 2 présente le principe d'une telle commande, où \mathbf{H} est la fonction de transfert du système incertain et F est la fonction de transfert du correcteur.

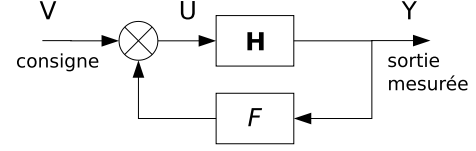


FIG. 2 – La commande de type retour de sortie.

Soient p et q respectivement le nombre d'entrées et de sorties du système H . En reprenant la formulation des équations (2) et (3), on trouve $U = V \oplus FY$ et la sortie du système s'écrit alors $Y = H(V \oplus FY)$. D'après le théorème 1, la relation de transfert du système en boucle fermée est égale à :

$$Y = (HF)^* HV$$

où $H \in \mathbf{H}$ est le transfert incertain du système.

Nous cherchons ici à imposer un comportement donné au système, par le biais du contrôleur. Le problème de commande avec modèle de référence peut se formuler de la façon suivante : « étant donné un système dont le transfert est H et un modèle de référence G_{ref} , existe-t-il un plus grand retour de sortie F tel que le système en boucle fermée $(HF)^* H$ soit inférieur⁹ ou égal au modèle de référence ? »

Il s'agit donc de chercher le plus grand intervalle $\hat{\mathbf{F}}$, garantissant que le comportement du système en boucle fermée est plus petit que $G_{ref} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{q \times p}$, une spécification sous forme d'intervalle, $\forall H \in \mathbf{H}$. Formellement, on cherche la résiduée de la fonction de transfert du système, c'est-à-dire la borne supérieure de l'ensemble suivant (Lhommeau et al. 2004) :

$$\{\mathbf{F} \in I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])^{q \times p} \mid (\mathbf{H}\mathbf{F})^* \mathbf{H} \preccurlyeq G_{ref}\}$$

Remarque 5 D'un point de vue pratique, $\hat{\mathbf{F}}$ est donné par

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{H} \backslash \overline{\mathbf{G}}_{ref} \overline{\mathbf{H}} \\ &= [\underline{\mathbf{H}} \backslash \underline{\mathbf{G}}_{ref} \overline{\mathbf{H}} \wedge \overline{\mathbf{H}} \backslash \overline{\mathbf{G}}_{ref} \overline{\mathbf{H}}, \overline{\mathbf{H}} \backslash \overline{\mathbf{G}}_{ref} \overline{\mathbf{H}}] \end{aligned}$$

4 L'EXCLUSION MUTUELLE

Dans cette section, nous allons montrer comment nous manipulons les sections ayant une ressource partagée gérée en exclusion mutuelle, en transformant ce problème en un problème d'analyse par intervalles.

⁹ au sens de l'ordre $\preccurlyeq_{I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])}$. Si $H_1 \preccurlyeq_{I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma])} H_2$, c'est que H_1 produit moins d'éléments que H_2 en plus de temps

Définition 13 (Exclusion mutuelle) Lorsque plusieurs processus veulent accéder simultanément à une même ressource critique, utilisable par un seul processus à la fois, il y a un conflit qui ne peut être résolu sans mécanisme approprié. L'exclusion mutuelle possède les deux propriétés suivantes :

- À tout instant, au plus un processus peut utiliser la ressource partagée.
- Tout processus demandant à utiliser la ressource partagée, le pourra au bout d'un temps fini.

4.1 Classe des systèmes étudiés

Dans cet article, nous considérons des systèmes de production avec deux postes de travail (nommés P_1 et P_2) partageant une ressource (nommée R), comme décrit dans la figure 3. Chaque poste de travail possède son propre stock amont (notés S_1 et S_2 respectivement), son propre temps de production (notés τ_{P_1} et τ_{P_2} respectivement) et son point d'arrivée des encours (notés u_1 et u_2 respectivement). À la fin de leurs opérations, les postes de travail délivrent les produits usinés dans leurs stocks aval, avant de sortir du système par les points notés y_1 et y_2 .

La règle de gestion que nous utilisons pour cette ressource partagée est décrite dans la section suivante et est représentée par la figure 4.

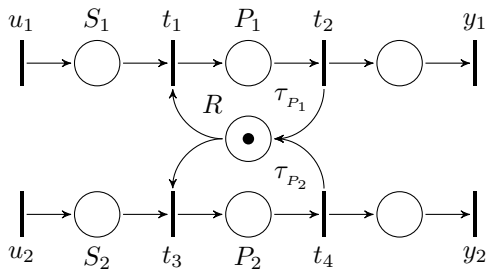


FIG. 3 – Tronçon comportant une ressource partagée

4.2 La gestion de ressources partagées

Nous considérons la règle de gestion suivante pour la gestion de ressources partagées :

Si tous les postes de travail sont inoccupés, tout élément d'encours peut être usiné sur le champ, sur n'importe quelle machine où cet élément se présente. Puisque tous les postes de travail partagent la même ressource, seul un poste peut travailler à la fois. Si plus d'un stock amont est non vide quand un poste de travail termine son processus, les postes vont réserver la ressource d'une manière cyclique. Si seulement un stock amont est non vide, le poste de travail correspondant va usiner les éléments présents dans ce stock, tant qu'il n'en arrive pas dans le stock amont de l'autre poste de travail.

Cette règle est illustrée par la figure 4, sous forme de RdP étendu, utilisant des arcs inhibiteurs (Reinhardt 1996).

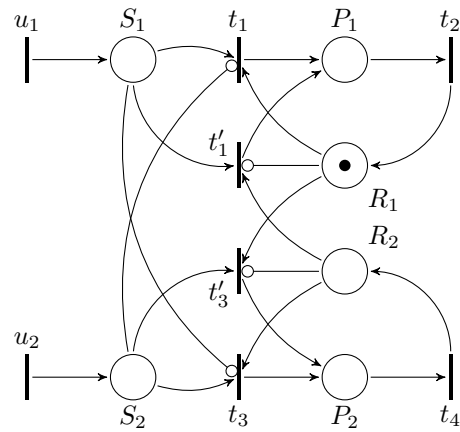


FIG. 4 – Diagramme de principe de la règle d'affectation considérée

Les transitions t_1 , t'_1 , t_3 et t'_3 du RdP de la figure 4 illustrent les quatre seuls cas possibles, quand une décision quant à l'utilisation de la ressource partagée doit être prise. Un jeton se trouvant dans la place R_1 (respectivement R_2) signifie que P_1 (respectivement P_2) a été le dernier poste de travail à avoir réservé la ressource partagée et à avoir usiné un élément d'encours.

S'il y a un jeton dans la place R_1 et aucun dans S_2 , alors le poste de travail P_1 peut réserver la ressource, ainsi t_1 est tirée. P_2 possède le même comportement s'il y a un jeton en R_2 et aucun en S_1 (t_3 est tirée dans ce cas-là). S'il y a au moins un jeton en S_1 et en S_2 en même temps, alors la ressource est réservée alternativement par les deux postes de travail (soit t'_1 soit t'_3 est tirée, en fonction du dernier poste de travail à avoir pu réserver la ressource partagée).

4.3 Propriétés des postes de travail

Nous allons maintenant décrire le comportement des postes de travail. En se basant sur le RdP de la figure 3, nous pouvons émettre un certain nombre d'assertions à propos du tir des transitions.

Pour la politique d'affectation considérée ici, il apparaît intuitivement que lorsqu'il n'y a pas de conflit sur la demande de la ressource, le comportement entre les entrées u_i et les sorties y_i correspondantes est \bar{Z}_{max} linéaire.

S'il y a beaucoup de demandes de la ressource en concurrence (sous forme de jetons en amont de t_1 et t_3), alors la ressource est affectée alternativement. Dans ce cas, le jeton en tête de file en amont de t_1 et de t_3 attend nécessairement au plus $\tau_{P_1} + \tau_{P_2}$.

Ces deux cas de figure décrivent la dynamique du système dans le meilleur cas (pas de conflit) et dans le pire cas (beaucoup de conflits).

Proposition 1 Soient $u_1(k)$, $u_2(k)$, $t_1(k)$, $t_2(k)$, $t_3(k)$ et $t_4(k)$ les dates des $k^{\text{ièmes}}$ tirs des transitions u_1 , u_2 , t_1 , t_2 , t_3 et t_4 de la figure 3.

$\forall k \in \mathbb{N}$ et selon notre politique de gestion, nous avons :

$$\begin{cases} \max(u_1(k), t_2(k-1)) \leq t_1(k) & (4) \\ t_1(k) \leq \max(u_1(k) + \tau_{P_2}, t_2(k-1) + \tau_{P_2}) & (5) \\ \max(u_2(k), t_4(k-1)) \leq t_3(k) & (6) \\ t_3(k) \leq \max(u_2(k) + \tau_{P_1}, t_4(k-1) + \tau_{P_1}) & (7) \end{cases}$$

Démonstration : Pour démontrer l'inégalité (4), nous allons chercher la composante conservatrice du modèle de la figure 3. En se limitant au sous-graphe contenant les seules transitions $t_1(k)$, $t_2(k)$, $t_3(k)$ et $t_4(k)$ et places P_1 , P_2 et R , grâce à l'algorithme de Martínez et Silva (Martínez & Silva 1982), on trouve de manière assez triviale l'invariant de marquage suivant : $M(P_1) + M(P_2) + M(R) = 1$, où M est l'application renvoyant le nombre de jetons pour une place donnée. Dès lors t_1 ne pourra être tirée au *maximum* qu'une fois de plus que t_2 . Or par la dynamique-même du modèle considéré, $t_1(k) \geq u_1(k)$. L'inégalité (4) est donc vraie.

Pour les besoins de la démonstration de l'inégalité (5), nous allons effectuer nos calculs dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. C'est-à-dire en considérant des fonctions *compteur* $\tilde{x}(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{min}$, appliquées aux transitions. Les compteurs donnent le nombre de fois où une transition a été tirée à la date t . Les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ sont isomorphes, à une $(\min, +)$ convolution près. En utilisant la modélisation des réseaux de Petri temporisés généraux présentée dans (Libeaut 1996), nous pouvons utiliser comme hypothèses les inégalités suivantes issues du diagramme de la figure 3 :

$$\begin{cases} \tilde{t}_1(t) + \tilde{t}_3(t) \leq 1 + \tilde{t}_2(t) + \tilde{t}_4(t) & (8) \\ \tilde{t}_2(t) \leq \tilde{t}_1(t - \tau_{P_1}) & (9) \\ \tilde{t}_4(t) \leq \tilde{t}_3(t - \tau_{P_2}) & (10) \\ \tilde{t}_1(t) \leq \tilde{u}_1(t) & (11) \end{cases}$$

L'inégalité (5) se réécrit dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ sous la forme suivante :

$$\tilde{t}_1(t) \geq \min(\tilde{u}_1(t - \tau_{P_2}), 1 + \tilde{t}_2(t - \tau_{P_2})) \quad (12)$$

En étudiant les différents cas possibles, si $\tilde{u}_1(t - \tau_{P_2}) < \tilde{t}_1(t)$, c'est-à-dire si l'on a tiré la transition t_1 au moins une fois de plus que la transition u_1 , τ_{P_2} unités de temps auparavant, alors il nous faut maintenant vérifier que si $1 + \tilde{t}_2(t - \tau_{P_2}) < \tilde{u}_1(t - \tau_{P_2})$, l'inégalité (12) reste vraie. Dans ce dernier cas, on peut constater que l'on était en excès d'encours à l'instant $t - \tau_{P_2}$. On en déduit naturellement qu'il faut attendre que le premier poste de travail redevienne inactif une fois de plus (c'est-à-dire que l'on tire la transition t_2 une fois de plus qu'à l'instant $t - \tau_{P_2}$) avant de pouvoir le refaire fonctionner (c'est-à-dire avant de pouvoir

tirer la transition t_1). En conclusion l'inégalité (12) reste vraie dans ce cas. Par ailleurs, intuitivement, le cas contraire aurait signifié que l'on aurait consommé toutes les encours à l'instant $t - \tau_{P_2}$, et qu'il faut donc attendre le prochain tir de u_1 avant que t_1 puisse être tirée, ce qui implique l'inégalité (12).

Pour finir notre étude de cas, si $\tilde{u}_1(t - \tau_{P_2}) \geq \tilde{t}_1(t)$, c'est-à-dire si l'on aura assez d'encours pour lancer une production sur le premier poste de travail à l'instant t considéré. Cela sous-entend que l'on avait déjà suffisamment d'encours à l'instant $t - \tau_{P_2}$. Posons $1 + \tilde{t}_2(t - \tau_{P_2}) > \tilde{t}_1(t)$, c'est-à-dire $1 + \tilde{t}_1(t - \tau_{P_2} - \tau_{P_1}) > \tilde{t}_1(t)$ par (9). Cela signifie que l'on n'a pas tiré la transition t_1 pendant un temps égal à la somme des temps de production des deux postes de travail, précédant l'instant t . Or c'est impossible car la transition u_1 a été tirée suffisamment de fois pour que, selon notre règle d'alternance de l'utilisation de la ressource partagée, le premier poste de travail ait eu le temps de réserver cette ressource entre temps. Comme nous nous trouvons dans une politique de franchissement des transitions « au plus tôt », ceci s'est nécessairement passé. Ainsi, par l'absurde, si $\tilde{u}_1(t - \tau_{P_2}) \geq \tilde{t}_1(t)$, alors $1 + \tilde{t}_1(t - \tau_{P_2} - \tau_{P_1}) \leq \tilde{t}_1(t)$ et donc l'inégalité (12) est vraie ; ce qui termine la démonstration.

La preuve des inégalités (6) et (7) se fait de manière analogue, au nom des transitions près. \square

Ainsi, en utilisant les notations propres au dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ pour le système représenté dans le diagramme de la figure 3 et en utilisant la règle de gestion définie dans la section précédente, nous obtenons :

$$\begin{cases} t_1(k) = u_1(k) \otimes \tau_a \oplus t_2(k-1) \otimes \tau_b \\ t_2(k) = \tau_{P_1} \otimes t_1(k) \\ t_3(k) = u_2(k) \otimes \tau_c \oplus t_4(k-1) \otimes \tau_d \\ t_4(k) = \tau_{P_2} \otimes t_3(k) \end{cases} \quad (13)$$

avec $\tau_a, \tau_b \in [0, \tau_{P_2}]$ et $\tau_c, \tau_d \in [0, \tau_{P_1}]$.

4.4 De ressources partagées à des systèmes parallèles

Les équations du système (13) décrivent également la dynamique des GET (à temps incertains) de la figure 5. Le RdP initial contenant une ressource partagée est découpé en deux GET avec incertitudes temporelles. La manipulation de GET va nous permettre d'utiliser une algèbre de dioïde sur ces sous-systèmes.

Grâce à un dioïde d'intervalles, nous pouvons effectuer la synthèse du comportement dynamique du système de production modélisé par ces GET.

Bien entendu, le but ici n'est pas de fournir la fonction de transfert réelle du système, mais bien de la borner dans un intervalle, afin de pouvoir réaliser un certain nombre de calculs *impossibles* à réaliser avec une représentation « directe » et précise.

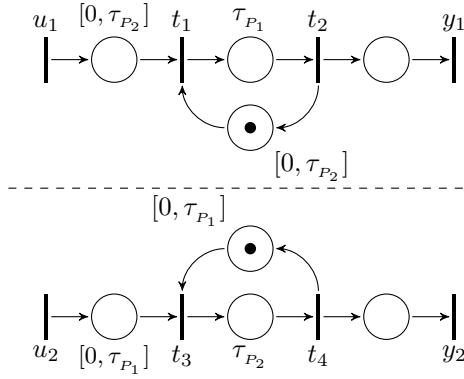


FIG. 5 – Découplage du système à ressource partagée initial en GET parallèles

En cherchant à obtenir la forme des équations (2) et (3), nous obtenons les matrices d'intervalles suivantes pour le poste de travail 1, décrit dans la partie haute de la figure 5 :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma, \tau_{P_2} \gamma] \\ [\tau_{P_1}, \tau_{P_1}] & [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} [0, \tau_{P_2}] \\ [\varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [\varepsilon, \varepsilon] & [e, e] \end{pmatrix}$$

La fonction de transfert \mathbf{H}_1 présentée ci-dessous inclut la fonction de transfert réelle H_1 du sous-système représentant le poste de travail 1. Cette matrice caractérise tous ses comportements possibles.

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} = ([\tau_{P_1} (\tau_{P_1} \gamma)^*, \tau_{P_1} \tau_{P_2} (\tau_{P_1} \tau_{P_2} \gamma)^*])$$

En considérant la relation d'entrée/sortie $y(\gamma) = \mathbf{H}u(\gamma)$, où $u(\gamma) = (u_1(\gamma) \ u_2(\gamma))^t$ et $y(\gamma) = (y_1(\gamma) \ y_2(\gamma))^t$, nous obtenons la matrice de transfert \mathbf{H} , concernant le système de production global :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_1 & \varepsilon \\ \varepsilon & H_2 \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{H}_2 = ([\tau_{P_2} (\tau_{P_2} \gamma)^*, \tau_{P_1} \tau_{P_2} (\tau_{P_1} \tau_{P_2} \gamma)^*])$.

5 CAS D'APPLICATION

Nous avons appliqué la méthode présentée dans cet article sur une ligne complexe de transfert automatisé située au laboratoire LISA, à Angers. Cette ligne de transfert est en forme de huit (voir la figure 6), ce qui implique l'utilisation d'une règle de gestion au niveau des sections communes. Le premier embranchement (partie hachurée dans la figure) peut être considéré comme une ressource partagée. En effet, une seule palette peut se trouver dans cette section à un moment donné, afin que les palettes ne se chevauchent pas. Le second embranchement ne requiert pas de politique de gestion particulière dans notre cas, car toutes les

palettes ont déjà été suffisamment distancées sur le tronçon commun (en gris sur la figure).

Toutes les palettes sont chargées au niveau d'un point de chargement et sont déplacées le long du système jusqu'à un point de déchargement, où elles sont déchargées. Leurs parcours suivent la direction des flèches numérotées de la figure 6 dans l'ordre croissant. Le problème principal est de pouvoir anticiper le flot des palettes dans le premier embranchement, en utilisant la politique de gestion définie dans la section 4.2.

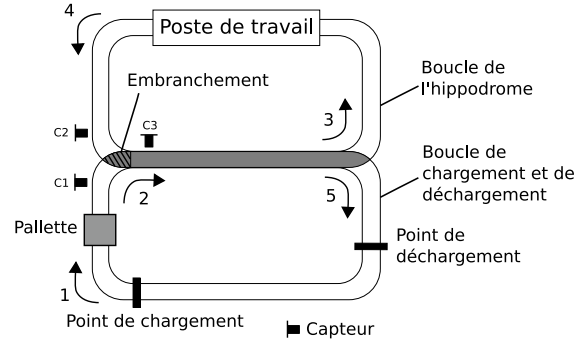


FIG. 6 – Ligne de transfert automatisée

Nous pouvons considérer l'embranchement entre les trois capteurs présentés sur la figure comme étant une ressource partagée ; et les chemins de C1 à C3 et de C2 à C3 peuvent être vus comme des postes de travail dont la durée opératoire est le temps de transfert sur chacun de ces chemins. Ainsi, nous pouvons représenter le système global par le diagramme de la figure 7.

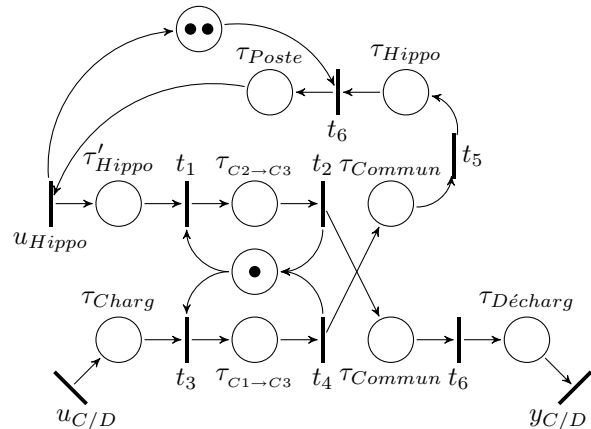


FIG. 7 – Modèle RdP de la ligne de transfert

La décision d'aller soit sur l'hippodrome, soit sur la boucle de chargement/déchargement à la fin du tronçon commun est prise dès le premier embranchement du système de production. C'est pourquoi il apparaît dans la figure 7 deux chemins théoriques sortants de cet embranchement, ayant tous les deux la même temporisation, τ_{Commun} , égale à 10 unités de temps dans notre cas.

Les durées de convoyage entre $C1$ et $C3$ et entre $C2$ et $C3$ (notées respectivement $\tau_{C1 \rightarrow C3}$ et $\tau_{C2 \rightarrow C3}$ dans la figure 7) sont égales à 6 et 7 unités de temps respectivement¹⁰. Les durées de convoyage à partir du point de chargement vers le premier embranchement et du deuxième embranchement vers le point de déchargement, appelées τ_{Charg} et $\tau_{Décharg}$, sont toutes les deux de 20 unités de temps. Les durées de convoyage sur l'hippodrome entre la section commune et le poste de travail, entre le poste de travail et la section commune (notées τ_{Hippo} et τ'_{Hippo} respectivement) sont de 20 et 25 unités de temps. Le poste de travail peut usiner deux pièces d'encours à la fois et ceci prend 30 unités de temps (τ_{Poste}) pour chaque pièce.

En notant τ_x l'intervalle dont les deux bornes sont égales à τ_x , et $\mathbf{H}_{C/D}$ et \mathbf{H}_{Hippo} les fonctions de transfert du premier embranchement, appartenant respectivement à la boucle de chargement/déchargement et à la boucle de l'hippodrome, nous trouvons la fonction de transfert \mathbf{H} suivante pour le système global dans le dioïde $I(\mathbb{Z}_{max}[\gamma])$:

$$\mathbf{H} = \tau_{Charg} \overline{\otimes} \mathbf{H}_{C/D} \overline{\otimes} \tau_{Commun} \overline{\otimes} \tau_{Hippo} \overline{\otimes} \tau_{Poste} \overline{\otimes} \tau'_{Hippo} \overline{\otimes} \mathbf{H}_{Hippo} \overline{\otimes} \tau_{Commun} \overline{\otimes} \tau_{Décharg}$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{C/D} &= ([\tau_{C1 \rightarrow C3}(\tau_{C1 \rightarrow C3}\gamma)^*, \\ &\quad \tau_{C1 \rightarrow C3}\tau_{C2 \rightarrow C3}(\tau_{C1 \rightarrow C3}\tau_{C2 \rightarrow C3}\gamma)^*]) \\ &= ([6(6\gamma)^*, 13(13\gamma)^*]) \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{H}_{Hippo} = ([7(7\gamma)^*, 13(13\gamma)^*]).$$

Finalement, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= [20, 20] \overline{\otimes} [6(6\gamma)^*, 13(13\gamma)^*] \overline{\otimes} [10, 10] \overline{\otimes} \\ &\quad [20, 20] \overline{\otimes} [30(30\gamma^2)^*, 30(30\gamma^2)^*] \overline{\otimes} [25, 25] \overline{\otimes} \\ &\quad [7(7\gamma)^*, 13(13\gamma)^*] \overline{\otimes} [10, 10] \overline{\otimes} [20, 20] \\ &= [115, 115] \overline{\otimes} [13(7\gamma)^*, 26(13\gamma)^*] \overline{\otimes} \\ &\quad [30(30\gamma^2)^*, 30(30\gamma^2)^*] \\ &= ([(158 \oplus 165\gamma)(30\gamma^2)^*, \\ &\quad (171 \oplus 184\gamma)(30\gamma^2)^*]) \end{aligned}$$

Remarque 6 *Il ressort de cette fonction de transfert que l'unité de production présentée aura un taux de production de 2 produits toutes les 30 unités de temps. Dès lors on constate que l'incertitude du comportement de la section partagée ($[13(7\gamma)^*, 26(13\gamma)^*]$) est en partie masquée par la dynamique du poste de travail ($30(30\gamma^2)^*$). Par ailleurs, le premier produit va passer 165 unités de temps au plus tôt et 184 unités de temps au plus tard dans le système avant de sortir à partir de l'initialisation de ce dernier.*

¹⁰elles se trouvent être différentes car les capteurs amont de cet embranchement ($C1$ et $C2$) ne sont pas exactement situés à la même distance du capteur aval ($C3$)

Grâce à cette représentation dans un dioïde d'intervalles, il nous est possible d'effectuer la synthèse d'un contrôleur pour ce système. Le but de celui-ci étant de limiter le nombre de palettes dans le système afin d'éviter un interblocage de ce dernier.

Si nous voulons par exemple avoir un maximum de 7 palettes évoluant dans le système, un contrôleur de type retour de sortie doit être adjoint au système (comme décrit à la figure 2).

Le modèle de référence G_{ref} , que nous cherchons à obtenir par commande du système de production, peut être obtenu en prenant en compte le comportement de ce dernier, calculé précédemment, et le nombre de palettes se déplaçant dans le système¹¹ :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ref} &= (\mathbf{H}(\gamma^7))^* \mathbf{H} = \mathbf{H}((\gamma^7)\mathbf{H})^* \\ &= ([(158 \oplus 165\gamma \oplus 188\gamma^2 \oplus 195\gamma^3 g \oplus \\ &\quad 218\gamma^4 \oplus 225\gamma^5 \oplus 248\gamma^6)(158\gamma^7)^*, \\ &\quad (171 \oplus 184\gamma \oplus 201\gamma^2 \oplus 214\gamma^3 g \oplus \\ &\quad 231\gamma^4 \oplus 244\gamma^5 \oplus 261\gamma^6)(171\gamma^7)^*]) \end{aligned}$$

À l'aide de ce modèle de référence, nous pouvons calculer le contrôleur $\hat{\mathbf{F}}$ grâce à l'équation suivante (Lhommeau et al. 2004) :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{F}} &= \mathbf{H} \setminus \mathbf{G}_{ref} / \mathbf{H} \\ &= ([(-158 \oplus -151\gamma \oplus -128\gamma^2 \oplus -121\gamma^3 g \oplus \\ &\quad -98\gamma^4 \oplus -91\gamma^5 \oplus -68\gamma^6)(158\gamma^7)^*, \\ &\quad (-171 \oplus -158\gamma \oplus -141\gamma^2 \oplus -128\gamma^3 g \oplus \\ &\quad -111\gamma^4 \oplus -98\gamma^5 \oplus -81\gamma^6)(171\gamma^7)^*]) \end{aligned}$$

Pour la réalisation d'un tel contrôleur, il est obligatoire de choisir l'une des valeurs de l'ensemble $\hat{\mathbf{F}}$, devant être projetée dans un espace causal (Baccelli et al. 1992). Par calcul, on vérifie que la borne inférieure de $\hat{\mathbf{F}}$ projetée dans le dioïde $\mathbb{Z}_{max}^+[\gamma]$ des séries causales, notée $\hat{\mathbf{F}}_+$, mène à un comportement d'entrée-sortie dont les bornes sont les mêmes que celles de \mathbf{G}_{ref} ¹², c'est-à-dire que le système H , contrôlé par $\hat{\mathbf{F}}_+$, va bien se comporter selon les spécifications.

Ainsi, on trouve comme contrôleur le système $\hat{\mathbf{F}}_+$ suivant :

$$\hat{\mathbf{F}}_+ = (\gamma^7 \oplus 7\gamma^8 \oplus 30\gamma^9 \oplus 37\gamma^{10} g \oplus 60\gamma^{11} \oplus 67\gamma^{12} \oplus 90\gamma^{13})(158\gamma^7)^*$$

6 CONCLUSION

En se basant sur le formalisme des SED, ce travail a permis de décrire un problème de partage de ressource dans le dioïde $I(\mathbb{Z}_{max}[\gamma])$, le dioïde dont les bornes

¹¹nous recommandons la lecture de (Cottenceau, Hardouin, Boimond & Ferrier 2001) et de (Maia, Hardouin, Santos-Mendes & Cottenceau 2003) pour une discussion au sujet du choix du modèle de référence

¹²le calcul vérifiant cette propriété est $(\mathbf{H}\hat{\mathbf{F}}_+)^*\mathbf{H}$

appartiennent au dioïde des séries formelles avec coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et exposants dans \mathbb{Z} . Les comportements des systèmes étudiés sont encadrés par des intervalles de $I(\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]])$ afin d'en obtenir une représentation formelle indirecte. Cette représentation nous a permis de définir un contrôleur (de type retour de sortie) permettant d'éviter tout interblocage dans le système contrôlé correspondant, tout en permettant une gestion de production en juste-à-temps, en limitant le nombre de transporteurs qu'il utilise à tout moment, afin de ne jamais connaître de surcharge, voire de blocage.

Notre approche présente l'avantage d'utiliser le même formalisme, pour la modélisation du système, et pour l'expression de la loi de commande. De plus, cette dernière étant exprimée formellement, elle rend très fiables les tests du système physique par émulation (Boutin et al. 2007).

Un cas d'application contenant une boucle en forme de 8 a été utilisé afin de tester notre approche. Les résultats semblent prometteurs pour des développements futurs au sujet de la modélisation et la commande de systèmes similaires.

Nous envisageons d'étendre ce travail au partage d'une ressource, non seulement entre deux postes de travail, mais entre plusieurs systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linéaires.

RÉFÉRENCES

- Al Saba, M., Boimond, J.-L. & Lahaye, S. (2006). On just in time control of flexible manufacturing systems via dioid algebras, *INCOM'06*, Saint-Étienne, France.
- Amari, S., Demongodin, I. & Loiseau, J.-J. (2004). *Supply Chain Optimization*, Springer Verlag, chapter 6 - Sizing, Cycle Time and Plant Control Using Dioid Algebra, pp. 71 – 86.
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. & Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*, John Wiley and Sons, New York. Disponible à l'adresse cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf.
- Blyth, T. S. & Janowitz, M. F. (1972). *Residuation Theory*, Pergamon press.
- Boutin, O., Cottenceau, B. & L'Anton, A. (2007). Online Control of a (max,+) Linear Emulated Production System, *IESM'07*, Tsinghua University Press, Pékin, Chine.
- Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P. & Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems, *IEEE Proceedings : special issue on Discrete Event Systems* **77**(1) : 39 – 58.
- Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L. & Ferrer, J.-L. (1999). Synthesis of Greatest Linear Feedback for Timed Event Graphs in Dioid, *IEEE Transactions on Automatic Control* **vol. 44**(6) : 1258 – 1262.
- Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L. & Ferrer, J.-L. (2001). Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioids, *Automatica* **37** : 1451 – 1458.
- Diaz, M. (ed.) (2001). *Les réseaux de Petri : modèles fondamentaux*, Traité IC2, série informatique et systèmes d'information, Hermès Science.
- Gaubert, S. (1995). Performance Evaluation of (max,+) automata, *IEEE Transactions on Automatic Control* **40**(12).
- Heidergott, B., Olsder, G. J. & van der Woude, J. (2005). *Max Plus at Work – Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*, Princeton University Press.
- Khansa, W. (1997). *Réseaux de Petri p-temporels – Contribution à l'étude des systèmes à événements discrets*, Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B. & Jaulin, L. (2004). Interval Analysis and Dioid : Application to Robust Controller Design for Timed Event Graphs, *Automatica* **40**(11) : 1923 – 1930.
- Libeaut, L. (1996). *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes événements discrets*, Thèse de doctorat, Université de Nantes et École Centrale de Nantes.
- Litvinov, G. L. & Sobolevskii, A. N. (2001). Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems, *Reliable Computing* **7**(5) : 353 – 377.
- Maia, C. A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R. & Cottenceau, B. (2003). Optimal Closed-Loop Control for Timed Event Graphs in Dioid, *IEEE Transaction on Automatic Control* **vol. 48** : 2284 – 2287.
- Martínez, J. & Silva, M. (1982). A simple and fast algorithm to obtain all invariants of a generalized Petri net, dans C. Girault & W. Reisig (eds), *Application and theory of Petri Nets*, Springer-Verlag, Berlin, Allemagne, pp. 301–310.
- Merlin, P. M. (1974). *A Study of the Recoverability of Computing Systems*, Thèse de doctorat, University of California, Irvine.
- Moore, R. E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Reinhardt, K. (1996). Reachability in Petri Nets with Inhibitor arcs, *Technical Report WSI-96-30*, Wilhelm-Schickard Institut für Informatik, Universität Tübingen.
- Trouillet, B. & Benasser, A. (2002). Cyclic Scheduling Problems With Assemblies : An Approach Based to the Search of an Initial Marking in a Marked Graph, *SMC'02*, IEEE Computer Society Press, Hammamet, Tunisie.