

ESTIMATIONS, BORNES ET DISTRIBUTIONS DES PERFORMANCES POUR LES CHAÎNES DE PRODUCTION STOCHASTIQUES

Jean-Sébastien TANCREZ,

Philippe CHEVALIER, Pierre SEMAL

Louvain School of Management, FUCaM
CORE, Université catholique de Louvain
34, Voie du Roman Pays - B 1348 Louvain-la-Neuve
tancrez@fucam.ac.be

Louvain School of Management, UCL
CORE, Université catholique de Louvain
1, Place des Doyens - B 1348 Louvain-la-Neuve
pierre.sem@uclouvain.be,
philippe.chevalier@uclouvain.be

RÉSUMÉ : *Nous présentons une méthode de modélisation des chaînes de production stochastiques. Elle comporte essentiellement deux étapes : les distributions des temps de travail sont discrétisées par regroupement en fin de pas (les masses de probabilités sur des intervalles réguliers sont reportées en fin de ces intervalles), puis l'évolution du système est modélisée par une chaîne de Markov. Précédemment, nous nous sommes principalement intéressés à la productivité moyenne. Dans cet article, nous montrons que notre méthode offre une modélisation complète du système. Nous donnons des bornes sur les taux d'utilisation et d'inactivité des postes. Nous étudions la distribution et la variance de la productivité et montrons que notre méthode en fournit une estimation réaliste. Dans le but de connaître et maîtriser les effets de la variabilité sur le système, une distribution réaliste du temps de cycle offre, bien sûr, une information bien plus détaillée que la moyenne. Enfin, nous montrons, par une série d'expérimentations, la bonne précision des estimations obtenues sur diverses mesures de performance (en-cours, temps de circulation, remplissage des buffers, etc.).*

MOTS-CLÉS : *Évaluation de la performance, chaînes de production, estimations, bornes, distributions.*

1. INTRODUCTION

Dans cet article, nous nous intéressons à la modélisation des chaînes de production stochastiques. Les modèles de systèmes manufacturiers peuvent entrer dans deux catégories : modèles de performance ou modèles d'optimisation (Altiok 1996). Nos travaux visent à développer un modèle du premier type : un modèle de performance. De tels modèles permettent d'estimer des mesures de performance telles que la productivité, le taux d'inactivité des postes, l'en-cours, le temps de circulation ou le remplissage des buffers. Ils reposent sur des techniques comme les processus stochastiques, la théorie des files d'attente, les probabilités et la simulation. Au final, ces modèles visent à aider la prise de décision, à la fonder sur une connaissance fiable et précise du système, à éclairer les décisions.

Les modèles de performance pour chaînes de production stochastiques peuvent être analytiques ou basés sur la simulation. Parmi les modèles analytiques, on distingue les modèles exacts et les modèles approximatifs. Les premiers peuvent se présenter sous la

forme d'une simple équation pour des configurations très limitées, ou, sous la forme d'un modèle d'états qui modélise l'évolution d'un système à temps de travail de type phase par une chaîne de Markov, ou, enfin, sous la forme d'un modèle « holding time ». Les modèles approximatifs peuvent se présenter sous la forme d'une simple équation (mais au dépend de la précision), ou se baser sur l'idée consistant à décomposer le système en sous-systèmes plus faciles à analyser, puis à regrouper ces systèmes intelligemment (méthodes de décomposition ou d'expansion). Un état de l'art complet de ces techniques peut être trouvé dans différentes références. Le lecteur est invité à consulter par exemple : (Buzacott & Shanthikumar 1993), (Perros 1994), (Altiok 1996), (Dallery & Gershwin 1992) et (Papadopoulos & Heavey 1996).

Dans nos travaux, nous développons une méthode de modélisation analytique, originale, des systèmes de production. Cette méthode a été présentée lors de l'édition précédente de la conférence MOSIM (Tancrez & Semal 2006) puis publiée en version étendue (Tancrez, Semal & Chevalier 2008). Dans ces

communications, nous introduisons la méthode, prouvons des bornes sur la productivité moyenne et proposons des estimations de celle-ci. Dans le présent article, nous montrons que notre méthode fournit une modélisation complète du comportement du système et nous intéressons donc à d'autres mesures de performances que la productivité. Nous explorons aussi plus avant la productivité en étudiant sa variabilité et sa distribution.

L'article s'organise comme suit. A la section suivante, nous décrivons la méthode et rappelons brièvement les résultats obtenus sur la productivité moyenne dans (Tancrez & Semal 2006) et (Tancrez et al. 2008). Nous nous basons sur ces résultats pour montrer, à la section 3, des bornes sur le temps d'inactivité et les taux d'utilisation et d'inactivité des postes. A la section 4, nous nous intéressons à la distribution et à la variance du temps de production. A la section 5, nous testons la précision des estimations de diverses mesures de performance et illustrons l'intérêt de la distribution du temps de production. Finalement, nous concluons et donnons des perspectives à la section 6.

2. MÉTHODE

Dans cette section, nous présentons notre méthode de modélisation des chaînes de production stochastiques. Nous rappelons ensuite brièvement les résultats obtenus sur la productivité moyenne, c'est-à-dire des bornes et des approximations.

2.1. Chaînes de productions visées

Avant de présenter notre méthode, précisons les caractéristiques des systèmes qu'elle vise. Notre méthode modélise des chaînes de production avec transfert asynchrone et temps de travail stochastiques (aux postes). Les objets sont traités consécutivement par les postes et stockés dans les buffers situés entre eux si nécessaire (voir la figure 1). Dans de telles chaînes, les principales causes de perte d'efficacité et de la difficulté de la modélisation sont le blocage et la famine. Le blocage survient quand un poste ne peut se débarrasser d'un objet car le buffer suivant est plein. Un poste est affamé lorsque, prêt à commencer un nouveau job, il ne trouve pas d'objet dans le buffer précédent.

Les hypothèses que nous faisons sur ces chaînes de production sont générales, non-restrictives en pratique. Premièrement, les distributions des temps de travail sont quelconques, hormis le fait que leur domaine doit être fini. Deuxièmement, la capacité des buffers est finie. Ces deux hypothèses de finitude ne sont pas restrictives puisqu'elles sont toujours vérifiées en pratique. Troisièmement, nous supposons

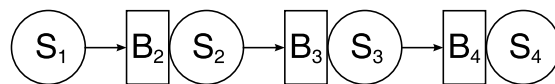


Figure 1 – Illustration d'une chaîne à 4 postes.

que la chaîne est saturée, autrement dit le premier poste n'est jamais affamé et le dernier jamais bloqué. Cette hypothèse est la plus classique dans le cadre de systèmes manufacturiers. Elle peut facilement être relaxée en utilisant des premier et dernier postes remplaçant les processus d'arrivée et de demande. Un système non saturé peut être représenté de manière équivalente par un modèle saturé (Dallery & Gershwin 1992). Enfin, la politique de blocage choisie est le « blocage après service », mais le modèle pourrait aisément être adapté pour convenir à une autre politique.

2.2. La méthode BDPH

L'idée à la base de nos travaux est simple. Un système de production à distributions quelconques ne peut être modélisé exactement tel quel. Les distributions doivent être transformées en distributions de type phase afin de pouvoir ensuite modéliser le comportement du système par une chaîne de Markov (souvent continue). Dans nos travaux, nous choisissons de discrétiser les distributions, et cela de manière assez intuitive : les masses de probabilités sur des intervalles de taille régulière sont simplement reportées en un point donné de chacun de ces intervalles. Nous appelons cette discrétisation « par conservation des masses de probabilités ». C'est dans cette discrétisation et ses conséquences que réside notre principale originalité.

Ce choix offre plusieurs avantages (par rapport à la discrétisation par conservation des moments en particulier). D'abord, cette discrétisation est simple et intuitive. Elle permet de conserver la forme de la distribution originelle et un lien intelligible avec celle-ci. De plus, elle peut être affinée et, à la limite, elle tend vers la distribution originelle. Enfin, cette discrétisation convient particulièrement bien lorsque les données relatives aux temps de travail ont été récoltées sous la forme d'histogrammes, situation la plus fréquente en pratique. D'un autre côté, la discrétisation par conservation des masses de probabilités a essentiellement deux inconvénients. Premièrement, elle ne conserve pas les moments (elle peut cependant être adaptée pour conserver la moyenne, voir section 6). De plus, cette discrétisation convient mal pour des distributions des temps de travail comportant un événement rare qui élargit beaucoup le domaine de la distribution. Cela génère de nombreuses valeurs nulles dans la distribution discrétisée, et donc augmente la complexité sans apport de précision.

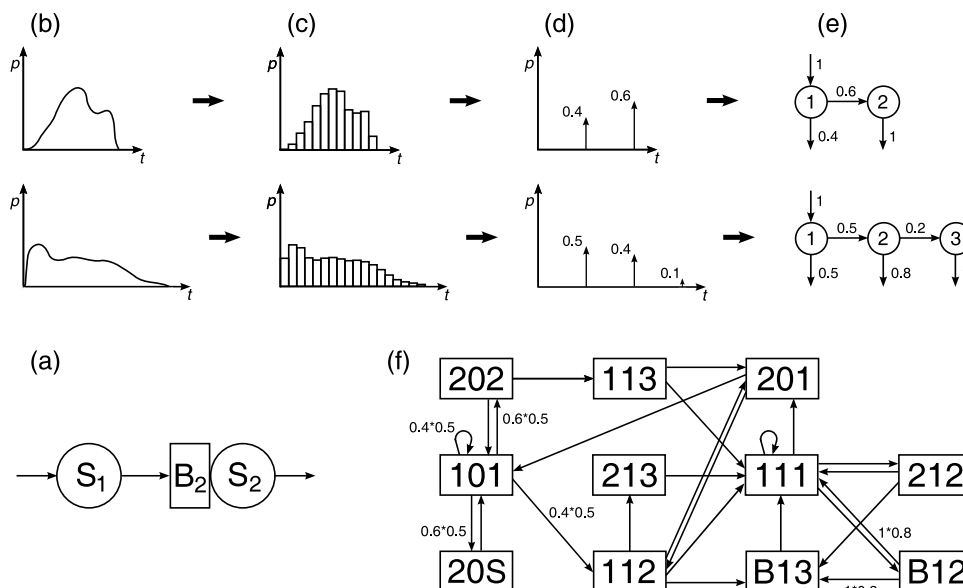


Figure 2 – Méthode BDPH appliquée à une chaîne de deux postes (a). Les temps de travail (b) sont collectés sous la forme d’histogrammes (c) puis discrétisés par regroupement en fin de pas (d) et représentés en distribution de type phase (e). L’évolution du système est alors modélisée par une chaîne de Markov (f).

Concrètement, notre méthode de modélisation fonctionne comme suit. Les distributions sont d’abord discrétisées par conservation des masses de probabilités. La largeur τ de l’intervalle de discrétisation est choisie puis les distributions sont discrétisées en concentrant la masse de probabilité répartie sur l’intervalle $[k\tau, (k+1)\tau]$ en un point. Plus précisément, dans cet article, nous choisissons le regroupement en fin de pas. Il reporte cette masse de probabilité à la fin de l’intervalle, c’est-à-dire en $(k+1)\tau$. Nous obtenons ainsi des distributions discrètes des temps de travail, qui peuvent aisément se traduire en terme de distributions de type phase. Ensuite, l’évolution du système peut être modélisée par une chaîne de Markov (modèle d’états). Les états de celle-ci correspondent aux combinaisons possibles des avancements des jobs en cours dans les postes (en nombre d’intervalles τ) et des utilisations des buffers. A partir de cette chaîne de Markov, la performance du système peut être estimée, aussi bien en état transitoire que stationnaire. Nous avons appelé cette méthode « BDPH », pour « Bounding Discrete Phase-type ».

Pour illustrer le fonctionnement de notre méthode, nous donnons un bref exemple. Considérons une chaîne à deux postes dont les temps de travail sont collectés sous forme d’histogrammes (voir la figure 2.a,b,c). Les distributions sont d’abord discrétisées par regroupement en fin de pas (de c à d), et peuvent être représentées comme une distribution de type phase (e). Ensuite, l’évolution du système est modélisée par une chaîne de Markov. Un état est symbolisé par trois caractères renvoyant au premier poste

(avancement du job, bloqué, B, ou affamé, S), au buffer (remplissage) puis au deuxième poste. L’état B12, par exemple, renvoie à une chaîne dont le premier poste est bloqué, le buffer contient un objet et le dernier poste a déjà travaillé deux intervalles de temps τ sur le job courant. Selon que le deuxième poste continue ou arrête de travailler au temps suivant, l’état devient B13 ou 111 (le premier poste est débloqué), respectivement.

La complexité de la méthode est directement proportionnelle à la taille de la chaîne de Markov. En première approximation, celle-ci peut être estimée au nombre de combinaisons possibles pour les états, c’est-à-dire $(a+2)^m(b+1)^{m-1}$ avec m le nombre de postes, a le nombre de pas de discrétisation et b la capacité des buffers. Sur l’exemple de la figure 2, le premier poste pourrait se trouver dans quatre états (1,2,B,S), le buffer dans deux états (0,1) et le deuxième poste dans cinq états (1,2,3,B,S). La taille de la chaîne présentée peut donc être estimée à $4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$ (alors que le nombre effectif d’états vaut 11).

A ce stade, la complexité est la principale limite de notre méthode. Elle vient principalement de la deuxième phase de notre méthode, lors de la modélisation analytique exacte (modèle d’états). Ce défaut peut être corrigé en adaptant une méthode analytique approximative (décomposition et expansion) dans cette deuxième phase. La décomposition consiste à diviser le système en sous-systèmes qu’on analyse séparément, ce qui est nettement plus facile.

A chacun de ces sous-systèmes, on ajoute ensuite une estimation de l'effet des interdépendances avec le reste du système (blocage/famine). Cette estimation est réalisée à partir de l'analyse des autres sous-systèmes. Cette logique est tout à fait applicable pour un système à distributions discrètes. Nous argumentons même le fait que la discrétisation par conservation des masses de probabilité présente des atouts dans ce contexte, pour l'adaptation de la technique de décomposition (voir section 4).

2.3. Résultats sur la productivité moyenne

Dans cette section, nous récapitulons les principaux résultats obtenus sur la productivité moyenne. Nous commençons par des bornes. Brièvement, le raisonnement qui permet d'obtenir ces bornes est le suivant. Les temps discrétisés permettent de formuler des bornes sur la durée originelle d'un job. En effet, le regroupement en fin de pas augmente chaque durée. Le temps discrétisé est toujours plus long que l'original. De plus, on sait que l'erreur est plus petite que la largeur τ de l'intervalle. Si w_i dénote l'espérance du temps de travail du poste i (\bar{w}_i en temps discrétisé), on a donc :

$$\bar{w}_i - \tau \leq w_i \leq \bar{w}_i, \quad \forall i. \quad (1)$$

Pour généraliser ces bornes au temps de production global, nous introduisons la notion de chemin critique, la séquence de travaux qui couvrent, sans trou et sans chevauchement, le temps de production. Une telle séquence existe toujours. Chacun de ses jobs étant allongé par la discrétisation, le chemin critique est lui aussi allongé, et donc le temps de production également. Tenant compte, en outre, de la non-conservation du chemin critique, cela permet de prouver une borne supérieure sur le temps de production. Une borne inférieure peut être prouvée de façon similaire. Les preuves complètes et formelles des bornes données ci-dessous peuvent être trouvées dans (Tancrez et al. 2008).

Proposition 1 (Bornes en transitoire). *La méthode BDPH utilisant le regroupement en fin de pas permet de calculer des bornes supérieure et inférieure sur l'espérance T_P du temps que met une chaîne de m postes pour produire P objets. Si \bar{T}_P est l'espérance du temps de production de P objets en temps discrétisé, on a :*

$$\bar{T}_P - \tau(P + m - 1) \leq T_P \leq \bar{T}_P.$$

Proposition 2 (Bornes en stationnaire). *Quand elle mesure la productivité en état stationnaire, la méthode BDPH utilisant le regroupement en fin de pas est pessimiste. Autrement dit, le temps de cycle c*

(temps entre deux sorties d'objet de la chaîne) est surestimé. De plus, l'erreur commise est inférieure à la largeur τ de l'intervalle de discrétisation. En notant \bar{c} le temps de cycle calculé en temps discrétisé, on obtient :

$$\bar{c} - \tau \leq c \leq \bar{c}. \quad (2)$$

La finesse des bornes est directement proportionnelle à la largeur du pas de discrétisation. Ces bornes deviennent donc de plus en plus précises lorsque la discrétisation est affinée. De plus, cela permet de choisir a priori la précision voulue.

Après avoir prouvé rigoureusement des bornes, la suite naturelle consiste à trouver des approximations de la productivité. Nous les donnons ici pour le temps de cycle, elle pourrait être formulée pour la productivité transitoire. Le première approximation consiste simplement à retirer l'erreur commise, par le regroupement en fin de pas, sur la moyenne du temps de travail. Seule reste alors l'erreur sur le temps d'inactivité (blocage/famine).

Approximation 3. *Le temps de cycle peut être approximé, $\forall i$, par :*

$$c \approx \bar{c} - e_w(i),$$

avec $e_w(i)$ l'erreur faite par la discrétisation sur le temps de travail moyen du poste i .

Une autre approximation, plus subtile, profite du fait que le chemin critique peut être calculé. Étant composé uniquement de travaux, le chemin critique offre une meilleure maîtrise de l'erreur commise : on évite le temps d'inactivité qui est mal connu. Dans l'approximation suivante, on évalue donc la longueur du chemin critique (on estime l'erreur sur chacun des jobs la composant à $\tau/2$), et on tient compte du fait que le nombre de travaux la composant n'est pas le même que le nombre de produits (d'où le facteur correctif).

Approximation 4. *Le temps de cycle peut être approximé par :*

$$c \approx \bar{c} - \frac{\bar{p}_{1,cp} \tau}{\bar{p}_1} \frac{\tau}{2}.$$

Où \bar{p}_1 est la probabilité stationnaire, en temps discret, qu'un poste donné soit, à un moment donné, dans le premier intervalle τ de son travail, et $\bar{p}_{1,cp}$ est la probabilité stationnaire, en temps discret, que le poste où le chemin critique se trouve à un moment donné soit dans le premier intervalle τ de son travail.

3. AUTRES PERFORMANCES

Les résultats précédents concernent la productivité moyenne. Pourtant, la modélisation offerte par notre méthode est bien plus large. La chaîne de Markov obtenue modélise complètement l'évolution du système dans le temps. De nombreuses mesures de performance peuvent donc être estimées à partir de cette chaîne, et des probabilités stationnaires de ses états. Citons, par exemple, le taux d'utilisation des postes, le remplissage des buffers, l'en-cours, ou le temps de circulation. A la section 5, nous présentons les précisions obtenues lors de l'estimation de ces mesures de performances sur un panel de chaînes de production.

Avant cela, nous donnons, dans la présente section, des bornes sur le temps d'inactivité et sur les taux d'utilisation et d'inactivité des postes. Ces bornes sont prouvées à partir des bornes données à la section précédente (propositions 1 et 2). Pour cela, nous nous basons sur le fait que le temps de cycle se divise en fait en deux composantes : le temps de travail et le temps d'inactivité (blocage/famine). Si bs_i dénote l'espérance du temps d'inactivité sur le poste i (\overline{bs}_i en temps discrétisé), on a :

$$c = w_i + bs_i, \quad \forall i. \quad (3)$$

A partir de cette équation, de l'équation (1) et de la proposition 2, des bornes sur le temps d'inactivité peuvent être aisément déduites.

Proposition 5. *Le temps d'inactivité original peut être borné en utilisant le temps d'inactivité calculé dans le temps discrétisé :*

$$\overline{bs}_i - \tau \leq bs_i \leq \overline{bs}_i + \tau, \quad \forall i. \quad (4)$$

Démonstration. En utilisant (3), l'équation (2) peut être réécrite comme suit :

$$\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau \leq w_i + bs_i \leq \overline{w}_i + \overline{bs}_i.$$

En soustrayant adéquatement (1) à l'équation donnée ci-dessus, on obtient l'inégalité voulue :

$$\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau - \overline{w}_i \leq w_i + bs_i - w_i \leq \overline{w}_i + \overline{bs}_i - (\overline{w}_i - \tau).$$

□

De cette proposition, des bornes sur le taux d'utilisation ($U_i = w_i/c$) et le taux d'inactivité ($I_i = bs_i/c$) des postes peuvent être déduites.

Proposition 6. *Les taux d'utilisation et d'inactivité originaux peuvent être bornés en utilisant les informations calculées dans le temps discrétisé, $\forall i$:*

$$\begin{aligned} \frac{\overline{w}_i - \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i} &\leq U_i \leq \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau} && \text{si } \overline{bs}_i \geq \tau, \\ &\leq \frac{\overline{w}_i + \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i} && \text{si } \overline{bs}_i \leq \tau. \end{aligned}$$

$$\frac{\overline{bs}_i - \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau} \leq I_i \leq \frac{\overline{bs}_i + \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i}.$$

Démonstration. On déduit des équations (1), (2) et (4) que :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{w}_i - \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i} &\leq \frac{w_i}{w_i + bs_i} \leq \frac{\overline{w}_i}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau}, \\ \frac{\overline{bs}_i - \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i} &\leq \frac{bs_i}{w_i + bs_i} \leq \frac{\overline{bs}_i + \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau}. \end{aligned}$$

En soustrayant adéquatement à l'unité, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\overline{bs}_i - \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau} &\leq \frac{bs_i}{w_i + bs_i} \leq \frac{\overline{bs}_i + \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i}, \\ \frac{\overline{w}_i - 2\tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i - \tau} &\leq \frac{w_i}{w_i + bs_i} \leq \frac{\overline{w}_i + \tau}{\overline{w}_i + \overline{bs}_i}. \end{aligned}$$

Pour clôturer la preuve, il suffit de choisir les meilleures bornes parmi ces inégalités. □

Comme pour les bornes sur la productivité, ces bornes sur le temps d'inactivité et sur les taux d'utilisation et d'inactivité des postes s'affinent lorsqu'on diminue la taille de l'intervalle de discrétisation. Enfin, notons que nous donnons ici les bornes en état stationnaire, les bornes équivalentes en temps transitoire peuvent être construites de façon similaire.

4. DISTRIBUTIONS ET VARIANCES

Comme dit précédemment, dans nos travaux passés, nous nous sommes essentiellement concentrés sur la productivité moyenne. Il est intéressant de s'intéresser à d'autres mesures de performances, ce que nous faisons à la section précédente et dans les expérimentations données à la section suivante. Un autre point intéressant concerne l'étude plus approfondie de la productivité. Au lieu de nous concentrer uniquement sur sa moyenne, nous nous intéressons ici à sa distribution. La distribution du temps de cycle du système, autrement dit du temps entre deux sorties d'une production, fournit bien sûr une information bien plus détaillée. Cette distribution peut être estimée par la méthode BDPH (sous la forme d'une distribution discrète), puis dessinée et étudiée. Elle peut, par exemple, être utilisée pour estimer la variance du temps de cycle, ou les quantiles.

En s'intéressant à la distribution du temps de cycle, on révèle un autre avantage de notre approche par conservation des masses de probabilités. En effet, cette discrétisation a l'avantage de rester fidèle à la forme des distributions (des temps de travail) de départ, au contraire de la conservation des moments par exemple. On peut donc espérer que la distribution du temps de cycle calculée dans le temps discrétisé aie une forme similaire à celle de la distribution réelle du temps de cycle. De plus, cette caractéristique, la conservation de la forme des distributions, est de plus

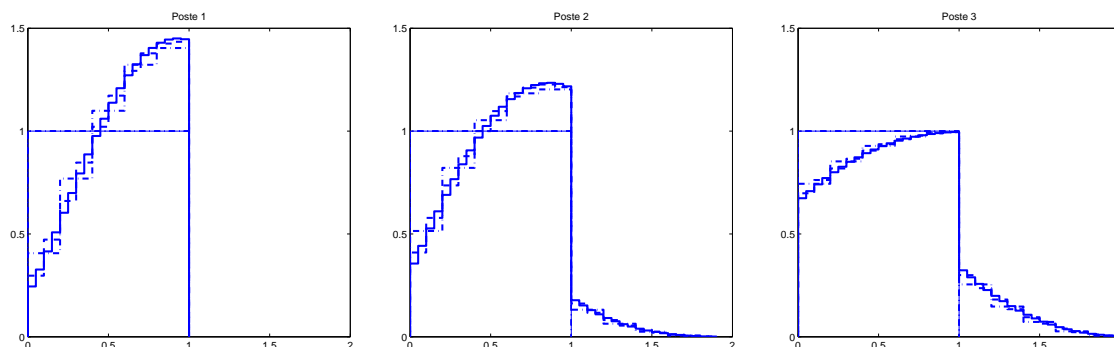


Figure 3 – Distributions des temps de cycle des postes 1, 2 et 3, pour un chaîne à trois postes et des buffers de capacité unitaire. Les distributions des temps de travail sont uniformes (ligne fine continue). Les distributions des temps de cycle sont calculées avec 5 (alternance de tirets et de points), 10 (tirets), ou 20 (ligne large continue) pas de discrétisation.

en plus en plus marquée lorsque le pas de discrétisation est affiné. A la limite, si la taille du pas tend vers zéro, on tend vers la distribution exacte du temps de travail et, donc, après utilisation de la méthode, on tend vers la distribution exacte du temps de cycle.

Nous profitons de cette dernière caractéristique pour argumenter le fait que notre méthode offre une distribution réaliste du temps de cycle. Intéressons nous à l'exemple illustré par la figure 3. Nous y traçons, sous forme d'histogrammes, les distributions des temps de cycle, autrement dit des temps entre deux sorties d'objets, pour chaque poste (la moyenne est identique pour chacun). La chaîne étudiée a trois postes, des buffers de capacité unitaire et des distributions uniformes des temps de travail. Le fait que des temps de cycle peuvent s'avérer plus long que des temps de travail s'explique par l'ajout des temps de blocage et de famine¹. Nous donnons les distributions calculées avec 5, 10 et 20 pas. De cette façon, on peut voir que dès le calcul avec 5 pas on obtient une distribution dont la forme semble réaliste, puisqu'en affinant la discrétisation, la forme de la distribution ne change pas. L'amélioration observée vient seulement du plus grand détail que les plus petits pas offrent. La distribution est plus détaillée mais sa forme générale reste la même. Cela tend à montrer que la conservation de la forme de la distribution, caractéristique de la conservation des masses de probabilité, se répercute et reste vraie pour les distributions du temps de cycle.

¹Un temps de blocage est ajouté derrière le temps de travail, car la sortie de l'objet survient à la fin du blocage. Un temps de famine est ajouté devant, car l'item est libéré avant le temps de famine. Aucun dépassement n'arrive au premier poste car seul du blocage peut y survenir et la somme d'un temps de travail et du blocage qui suit ne peut dépasser la longueur d'un temps de travail sur le poste suivant.

Dans l'optique de l'utilisation d'une autre modélisation analytique après la discrétisation par conservation des masses de probabilité, le réalisme des distributions calculées par notre approche est particulièrement avantageux. En effet, les techniques de décomposition (Dallery & Frein 1993) ou d'expansion (Kerbache & Smith 1987) profite de cette caractéristique lorsque l'effet des dépendances entre les parties de la chaîne décomposée sont rajoutées après analyse distincte de ces parties.

5. EXPÉRIMENTATIONS

Dans cette section, nous appliquons la méthode dans deux contextes différents. Premièrement, nous étudions la précision obtenue par la méthode BDPH lors de l'estimation de diverses mesures de performances (Section 3). Deuxièmement, nous illustrons l'intérêt des distributions de temps de cycle (Section 4) sur un exemple.

5.1. Précision de diverses estimations

Notre méthode offre une modélisation complète de l'évolution de la chaîne. Dans cette section, nous évaluons la précision des estimations de diverses mesures de performances, sur une série des chaînes de production à trois postes. Plus précisément, nous étudions les configurations issues des combinaisons des paramètres suivants :

- Les buffers ont les configurations suivantes : $[0\ 0]$, $[0\ 1]$, $[1\ 1]$ ou $[2\ 1]$.
- Les distributions originales des temps de travail peuvent être : uniforme sur $[0,1]$, béta de paramètres $B(2,2)$, $B(3,2)$ ou $B(18,22)$, ou triangulaire de paramètres $0.2, 0.3, 1$.
- Les distributions sont discrétisées avec 5, 7 ou 10 intervalles.

Nombre de pas	5	7	10
<i>Mesures de performance</i>			
a. Productivité, Approx. 3	0.64%	0.41%	0.29%
b. Productivité, Approx. 4	0.27%	0.15%	0.08%
c. Variance	8.32%	4.59%	2.15%
d. Temps de circulation	2.49%	1.77%	1.23%
e. Taux d'utilisation	0.27%	0.15%	0.08%
f. Taux d'inactivité	1.91%	0.99%	0.48%
g. En-cours	0.39%	0.26%	0.19%
h. Remplissage d'un buffer	1.58%	1.18%	0.88%
<i>Temps de calcul pour [1 1]</i>			
Basique (a,c,d,g,h)	0.1	0.3	1.1
Chemin critique (b,e,f)	0.4	1.4	8.2

Tableau 1 – Précisions obtenues sur diverses mesures de performances, et temps de calcul² (en secondes) pour une configuration [1 1] des buffers, en fonction du nombre de pas.

Nous appliquons donc $4 \cdot 5^3 \cdot 3 = 1500$ fois la méthode (4 configurations de buffers, 5 distributions combinées sur 3 postes, et 3 finesses de discrétisation). Nous discrétisons les distributions et calculons les probabilités stationnaires de la chaîne de Markov qui suit. A partir de ces probabilités stationnaires, nous choisissons, de part leur importance pratique, d'évaluer les mesures de performances suivantes :

- La productivité moyenne ou, plus précisément, le temps de cycle. Nous testons à la fois l'approximation 3, simple, et l'approximation 4, utilisant le calcul du chemin critique.
- La variance du temps de cycle, c'est-à-dire la variance du temps entre deux sorties de produits de la chaîne.
- Le temps de circulation (*flow time*), c'est-à-dire le temps moyen écoulé entre l'entrée d'un job dans le système et la sortie de ce même job, ou, plus simplement dit, le temps qu'un job prend pour traverser le système.
- Les taux d'utilisation et d'inactivité des postes, autrement dit la proportion moyenne du temps où un poste est, respectivement, en travail ou inactif (bloqué/affamé).
- L'en-cours, qui donne le nombre moyen d'objets présents dans le système, aussi bien en cours de traitement dans un poste que bloqué dans un poste ou stocké dans un buffer.
- Le remplissage moyen d'un buffer, tout simplement le nombre moyen d'items présents dans un buffer.

Le tableau 1 regroupe les précisions moyennes atteintes par les estimations des mesures de performances (les résultats de simulations servent d'étalon). Plusieurs observations peuvent être relevées. Tout d'abord, globalement, nous pouvons nous montrer satisfait des niveaux de précision atteints. Même si ceux-ci sont assez variables, ils peuvent être jugés bons. Hormis la variance de la productivité, on at-

teint des niveaux de précision situés entre 2.5 et 0.27 pour cent avec 5 pas de discrétisation, entre 1.8 et 0.15 % avec 7 pas et, entre 1.3 et 0.08 % avec 10 pas. En étant plus spécifique, on voit que les estimations de la productivité (et donc du taux d'utilisation), de l'encours et du taux d'inactivité sont particulièrement précises.

L'estimation de la variance du temps de cycle est obtenue simplement comme la variance de la distribution du temps de cycle calculée en temps discrétisé (voir section 4). Elle s'avère la moins précise dans l'absolu, ce qui est cohérent avec le fait qu'elle est l'estimation la plus difficile. On atteint cependant une précision de 2.15% avec dix pas, soit un bon résultat. En outre, on peut remarquer que l'affinement de la discrétisation améliore nettement l'estimation. A titre de comparaison, on peut s'intéresser à l'effet de la discrétisation sur la variance des distributions des temps de travail. Sur les distributions utilisées pour les tests, avec 5, 7 et 10 pas, les écarts moyens entre les variances, en continu et en discretisé sont de 14.1%, 8.2% et 4.2%.

Les temps de calcul², pour une configuration [1 1] des buffers, sont également donnés dans le tableau 1. Nous y distinguons la méthode de base et l'alternative calculant le chemin critique en sus (utilisée pour les performances b, e et f). Le calcul du chemin critique implique une plus grande complexité que la méthode de base, et donc un plus long temps de résolution. Cependant, ce calcul s'avère apporter un progrès, en terme de rapport précision/coût. A précisions équivalentes, l'approximation 4 est plus rapide que l'approximation 3 : elle atteint une précision de 0.27% en 0.4 seconde au lieu de 1.1 seconde.

²En utilisant l'élimination Gaussienne implémentée dans MATLAB[®] sur un PC 2.16 GHz, 2 GB de RAM.

Nombre de postes ($\sum b_i = 2$)	2	3	4	5		
Temps de calcul (en secondes)	0.02	0.3	4.7	137		
Configurations des buffers	[0 0]	[1 1]	[2 2]	[3 3]	[4 4]	[5 5]
Temps de calcul (en secondes)	0.1	0.3	1.3	6.2	15	42

Tableau 2 – Temps de calcul² en appliquant le calcul basique, avec 7 pas de discrétisation, pour des tailles des buffers augmentant (avec 3 postes) et pour un nombre de postes augmentant (à capacité de stockage constant).

Afin de compléter cette analyse du temps de calcul, nous montrons dans le tableau 2 comment il évolue en fonction de la taille de la ligne et de sa capacité de stockage, prenant la configuration à trois postes, buffers de taille unitaire et calcul basique à 7 pas comme référence. Comme expliqué à la section 2.2, le temps de calcul augmente rapidement lorsque la ligne s’allonge et lorsque sa capacité de stockage augmente.

En conclusion, ces expérimentations offrent des arguments et des données montrant que la méthode BDPH offre une modélisation complète et fiable. Diverses mesures de performance peuvent être estimées avec une bonne précision. Cependant, la complexité est, à ce stade, la principale limite.

5.2. Distributions selon la configuration

Dans cette section, nous illustrons l’effet de la taille des buffers sur le comportement de la chaîne de production. L’allocation optimale des buffers est une des applications majeures de toute méthode de modélisation d’un système productif (voir (Gershwin & Schor 2004) par exemple). Ici, nous montrons non seulement la modification de la productivité mais aussi celle de sa distribution.

Pour cela, nous reprenons l’exemple de la figure 3 présentant une chaîne de trois postes avec des distributions uniformes des temps de travail (qui révèlent bien la différence du temps de cycle). Les tailles des buffers testées sont [0 0], [1 1] et [2 2]. Les distributions des temps entre deux sorties de chaque poste sont représentées à la figure 4.

Plusieurs observations peuvent être faites à propos de cette figure. Pour commencer, on voit que, plus la taille des buffers augmente, plus les distributions des temps de cycle se rapprochent des distributions des temps de travail. Cela s’explique par le fait que les buffers ont pour effet d’atténuer les interdépendances entre postes, causes des pertes de productivité (blocage et famine). On peut aussi remarquer sur la figure 4 que l’apport de buffers [1 1] à une ligne qui en était dépourvue a un effet bien plus marqué que le passage d’une configuration [1 1] à une configuration [2 2].

L’effet du changement de la taille des buffers peut aussi être étudié au moyen des estimations des mesures de performances. De la configuration [0 0] à

[2 2] en passant par [1 1], la productivité moyenne passe de 0.7299 à 0.6099 puis à 0.5718. On peut aussi calculer les variances des distributions présentées à la figure 4. Les variances des temps de cycles passent de (0.0403, 0.0743, 0.1703) à (0.0643, 0.0860, 0.1272) puis à (0.0725, 0.0886, 0.1128). Même si les variances attachées aux deux premiers postes augmentent, la variance du temps de cycle attaché au dernier poste, représentant le temps entre deux productions, diminue. L’augmentation de la taille des buffers a donc pour effet de diminuer la variabilité du temps de sortie du système. Enfin, le coût associé à l’augmentation des buffers est souvent mesuré via l’augmentation de l’en-cours. Notre méthode permet d’estimer précisément celui-ci (voir tableau 1). Il passe, lorsque les capacités des buffers sont augmentées, de 2.6 à 3.8 puis à 4.8.

6. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Dans cet article, nous nous sommes attachés à montrer que notre méthode fournit une modélisation complète du système de production. Brièvement, la méthode BDPH discrétise les distributions des temps de travail par conservation des masses de probabilité (ici, par regroupement en fin de pas), puis modélise l’évolution du système dans le temps par une chaîne de Markov. De nombreuses mesures de performances peuvent être estimées à partir des probabilités stationnaires de cette chaîne. Hormis la productivité, nous avons montré par une série de tests qu’un bon niveau de précision est atteint pour des mesures performances aussi diverses que l’en-cours, le taux d’inactivité, le remplissage d’un buffer ou le temps de circulation. De plus, nous avons montré des bornes inférieures et supérieures sur le temps d’inactivité, le taux d’utilisation et le taux d’inactivité. Enfin, le dernier résultat, mais non le moindre, montre que notre discrétisation par conservation des masses de probabilité, qui a l’avantage de conserver la forme de la distribution, permet de tracer une distribution réaliste du temps de cycle, ce qui offre une information plus détaillée que simplement la productivité (correspondant à la moyenne de cette distribution). La variance de cette distribution peut être calculée et offre ainsi une estimation de la variance du temps de cycle. Nous illustrons l’intérêt de ce dernier résultat sur un

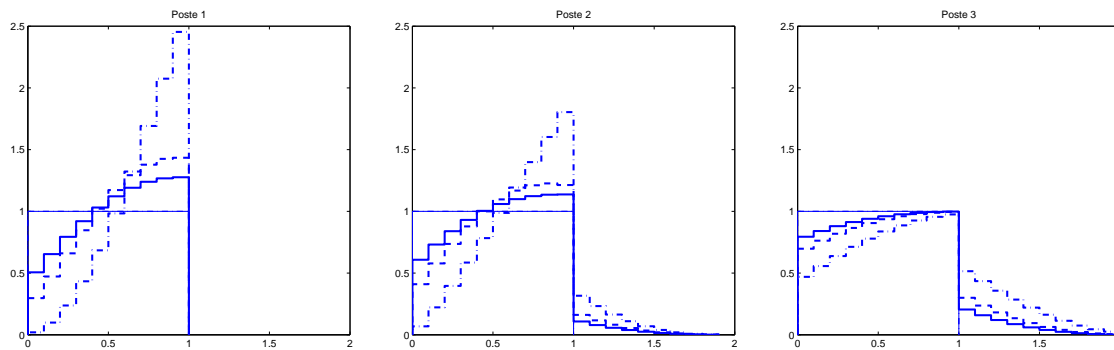


Figure 4 – Distributions des temps de cycle des postes 1, 2 et 3, pour un chaîne de trois postes, à temps de travail distribués uniformément (ligne fine continue). Elles sont tracées pour les configurations de buffers suivantes : $[0\ 0]$ (alternance de tirets et de points), $[1\ 1]$ (tirets), et $[2\ 2]$ (ligne large continue).

exemple montrant la modification des distributions des temps de cycle en fonction de la capacité des buffers.

En terme de perspectives, nous voulons explorer quatre voies prioritairement. Premièrement, une suite naturelle est de généraliser la définition de la discrétisation par conservation des masses de probabilités, laissant paramétrable le point de l'intervalle où est regroupée la masse de probabilité. On pourrait notamment prouver qu'une discrétisation conservant la moyenne peut ainsi être construite. Deuxièmement, comme mentionné dans le texte, la principale limite de notre approche vient de sa complexité. Pour y remédier, l'adaptation d'une méthode analytique approximative (décomposition et/ou expansion) semble toute indiquée. Nous argumentons dans le texte le fait que notre approche, offrant des distributions détaillées et réalistes, a des atouts dans ce sens. Troisièmement, notre méthode peut être étendue assez naturellement à des systèmes plus complexes (lignes d'assemblage/désassemblage en premier lieu). Les techniques de décomposition ou d'expansion s'inscrivent bien dans ce schéma. Quatrièmement, nous visons, au final, l'application pratique de notre approche. Son domaine d'application premier est la production industrielle. Cependant, étant donné le caractère général de nos travaux (théorie des files d'attente), d'autres applications sont envisageables : réseaux d'ordinateurs, systèmes hospitaliers, trafic routier, etc.

REMERCIEMENTS

Les travaux de J.-S. Tancrez sont financés par le Fond Social Européen et la Région Wallonne de Belgique, et sont réalisés en partenariat avec l'entreprise ArcelorMittal Fontaine. Le Professeur F. Riane est également remercié pour son soutien permanent.

RÉFÉRENCES

- Altiok, T. (1996). *Performance Analysis of Manufacturing Systems*, Springer, New York.
- Buzacott, J. & Shanthikumar, J. (1993). *Stochastic Models of Manufacturing Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Dallery, Y. & Frein, Y. (1993). On decomposition methods for tandem queueing networks with blocking, *Operations Research* **41**(2) : 386–399.
- Dallery, Y. & Gershwin, S. (1992). Manufacturing flow line systems : a review of models and analytical results, *Queueing Systems* **12** : 3–94.
- Gershwin, S. & Schor, J. (2004). Efficient algorithms for buffer space allocation, *Annals of Operations Research* **93**(1–4) : 117–144.
- Kerbache, L. & Smith, J. M. (1987). The generalized expansion method for open finite queueing networks, *European Journal of Operational Research* **32** : 448–461.
- Papadopoulos, H. & Heavey, C. (1996). Queueing theory in manufacturing systems analysis and design : A classification of models for production and transfer lines, *European Journal of Operational Research* **92** : 1–27.
- Perros, H. (1994). *Queueing Networks with Blocking : Exact and Approximate Solutions*, Oxford University Press.
- Tancrez, J.-S. & Semal, P. (2006). Production line analysis by bounding discretization, in M. Gourgand & F. Riane (eds), *MOSIM'06 : 6ème Conférence Francophone de MODélisation et SIMulation*, Lavoisier, Rabat, Maroc, pp. 1555–1565.
- Tancrez, J.-S., Semal, P. & Chevalier, P. (2008). Histogram based bounds and approximations for production lines, *European Journal of Operational Research*. To Appear.