

MODELE MACROSCOPIQUE STOCHASTIQUE DU TRAFIC ROUTIER

Megan KHOSHYARAN

ETC Economics Traffic Clinic, 34 av des Champs-
Elysées, F 75008 PARIS, France
etclinic@wanadoo.fr

Jean-Patrick LEBACQUE

INRETS Institut National de Recherche sur les Trans-
ports et leur Sécurité, 2 Av. du Général Malleret - Join-
ville, Arcueil, F-94114, France
lebacque@inrets.fr

RESUME : Les modèles macroscopiques du trafic ont été conçus pour aider les exploitants et les collectivités à simuler le trafic, dans le cadre de la conception ou de la planification, et à gérer le trafic (contrôle d'accès, information en temps réel, gestion de voies etc). Ces modèles s'expriment sous forme de lois de conservation, qui traduisent des analogies hydrodynamiques. Alors même que le caractère stochastique de la dynamique du trafic est avéré, et devrait être pris en compte, notamment pour le contrôle, très peu de modèles macroscopiques incluent des termes explicatifs stochastiques. Les raisons en sont principalement techniques : caractère diffusif des termes stochastiques introduits, complexité des calculs. L'objet de cet article est d'introduire un modèle macroscopique stochastique de trafic, dénué d'effets diffusifs non physiques, relativement simple à calculer. Ce modèle fait partie de la famille GSOM (Generic second order model).

MOTS-CLEFS : Modèle de trafic, loi de conservation, processus stochastiques

1. INTRODUCTION

Les modèles macroscopiques du trafic sont fondés sur une analogie hydrodynamique, et donc sur une hypothèse de type *hypothèse du continu*. En d'autres termes, les modèles macroscopiques les plus simples décrivent l'état du trafic en tout point x et à tout instant t à l'aide de trois variables dynamiques fondamentales : la concentration $\rho(x,t)$, la vitesse $v(x,t)$ et le débit $q(x,t)$. Ces variables sont précisément celles que mesurent les capteurs et qui sont aisément accessibles aux exploitants.

Ces variables sont reliées naturellement par deux équations :

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0 \quad (1)$$

(conservation du trafic en section courante, i.e. sans termes sources pour les entrées sorties)

$$q = \rho v \quad (2)$$

(équation de définition de la vitesse).

Les modèles macroscopiques se distinguent par la manière dont le système (1), (2) est complété par une troisième équation.

En général le système est complété par une équation déterministe. La raison en est simple : le trafic est anisotrope, il est très fortement contraint par la capacité des infrastructures, les réglementations de sécurité ainsi que l'offre et la demande locales de trafic (Lebacque 1996).

Par exemple, le système (1), (2) peut être complété par une équation d'état

$$q = Q_e(\rho, x) \Leftrightarrow v = V_e(\rho, x) \quad (3)$$

(on appelle *diagramme fondamental* cette équation d'état).

La figure 1 donne un exemple d'un tel diagramme fondamental (débit en vh/h en fonction du taux d'occupation), avec les données de trafic ayant servi à l'identifier :

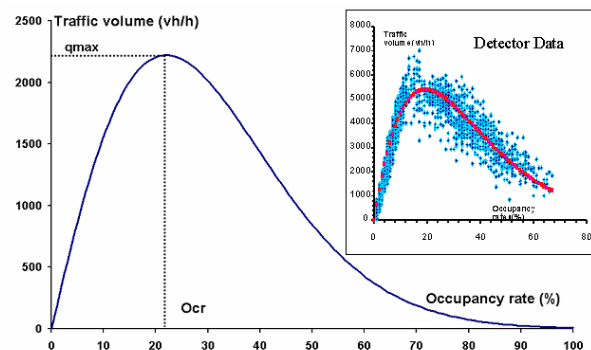


Figure 1 : Identification par optimisation du diagramme fondamental (OASIS, Haj-Salem et Mangeas 1998)

La combinaison de (1), (2), et (3) constitue le modèle LWR (Lighthill et Whitham 1955, Richards 1956) qui se résume par une seule équation de conservation

$$\partial_t \rho + \partial_x (Q_e(\rho, x)) = 0 \quad (4)$$

La dispersion des données de trafic est due en partie à des causes déterministes dont l'analyse nécessiterait une modélisation plus fine (multi voies et/ou multi classes), mais elle est également due à des phénomènes stochastiques reflétant la variabilité des comportements des individus participant au trafic.

Le caractère stochastique du trafic est très généralement pris en compte dans les modèles microscopiques. Il l'est également dans les modèles cinétiques, mais sous forme intégrée (espérances ou probabilités). Il s'agit par exemple de distributions de vitesses désirées (maximales), ou de probabilités de changement de voies par classes d'usagers, etc. Les éléments stochastiques de ces modèles sont ainsi intégrés sous forme de composants déterministes dont seule l'origine (i.e. le modèle comportemental) est stochastique. Il s'agit donc de modèles comportementaux dont la construction est particulière. Le lecteur est renvoyé par exemple à Ngoduy 2006 et à la bibliographie incluse dans cette référence.

Certains modèles macroscopiques discrétisés tels SSMT (Lebacque 1984) (schéma de Godunov appliqué au modèle LWR (4)) contiennent également des modèles stochastiques intégrés : gestion des conflits entre mouvements opposés dans les intersections, interprétation de la densité en termes de probabilité de présence).

Il importe cependant pour certaines applications, par exemple la gestion du trafic en temps réel, de disposer de modèles du trafic prenant en compte de le caractère intrinsèquement stochastique du trafic. Très peu d'efforts de recherche ont été accomplis dans cette direction.

Certains efforts de recherche ont visé à modéliser des phénomènes stochastiques spécifiques : les chutes de capacité du trafic (stop and go) en congestion (Kühne et Mahnke 2005), des changements de voie (Dundon et Sopasakis 2007).

Un modèle stochastique très différent a été proposé par Weits 1992. Ce modèle s'appuie sur un modèle de type LWR, qui est développé au premier ordre autour d'un état de trafic stationnaire en réponse à une perturbation dynamique stochastique de type bruit blanc. Ce modèle présente plusieurs inconvénients.

- Champ d'application limité (perturbation d'un état stationnaire)
- Complexité importante du calcul, limitant la portée du modèle en termes de géométrie (seules des solutions pour le cas d'un anneau ont été calculées, évitant ainsi l'introduction de conditions aux limites).
- Effets diffusifs du modèle, contraires au caractère anisotropique du trafic.

L'objet de cet article est de développer un modèle de trafic se présentant sous forme d'une perturbation

stochastique d'un modèle déterministe hydrodynamique, doté des qualités suivantes :

- Pas de caractère diffusif,
- Solution numérique et simulation aisée,
- Adaptabilité à la simulation des réseaux.

Le modèle a été introduit dans Khoshyaran et Lebacque 2007, il est basé sur le modèle GSOM (Generic Second Order Model), un modèle macroscopique générique de trafic proposé par Lebacque et al 2007.

2. LE MODELE GSOM

2.1. Description du modèle GSOM

Le modèle GSOM est un modèle macroscopique du second ordre qui généralise les modèles proposés par Aw-Rascle 2000 et Zhang, 2002. Le modèle GSOM est basé sur le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 & \text{Conservation du trafic} \\ \partial_t (\rho I) + \partial_x (\rho v I) = 0 & \text{Conservation de l'attribut } I \\ v = \mathfrak{I}(\rho, I) & \text{Diagramme fondamental lié} \\ & \text{au conducteur} \end{cases} \quad (5)$$

I est un attribut lié au conducteur. En effet en combinant les deux premières équations de (5) il vient

$$\dot{I} = \partial_t I + v \partial_x I = 0 \quad (6)$$

On peut en fait montrer, Lebacque et al 2005 et 2007 que (6) est inconditionnellement valide (indépendamment des ondes de choc, des discontinuités statiques de nature géométrique).

La signification physique de (5) est la suivante : chaque conducteur d'attribut comportemental I se comporte selon son propre diagramme fondamental, lequel exprime le comportement de poursuite du conducteur. Ce diagramme fondamental est noté

$$q = \rho \mathfrak{I}(\rho, I) \stackrel{def}{=} \mathfrak{R}(\rho, I) \quad (7)$$

La variabilité des diagrammes fondamentaux permet de rendre compte de la dispersion des points de mesures de trafic.

Le modèle GSOM s'interprète donc comme un modèle LWR à diagramme fondamental dépendant des conducteurs. Cette interprétation se traduit par exemple dans les expressions des vitesses caractéristiques :

$$\lambda_1 = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \rho}, \quad \lambda_2 = v$$

Les 1-ondes sont associées aux ondes cinématiques d'accélération (détente) et de décélération (chocs), comme dans le modèle LWR, alors que les 2-ondes pro-

pagent les discontinuités de I à la vitesse du trafic (résultat en accord avec (6)). Le lecteur est renvoyé à Mammari et al 2005 et Lebacque et al 2007 pour une analyse complète du modèle (5) et de ses solutions analytiques.

2.2 Exemples de diagrammes fondamentaux

a. *L'exemple le plus simple* de diagramme fondamental variable est celui déduit des travaux de Aw et Rascle 2000 et de Zhang 2002 (modèle ARZ). Il s'exprime comme suit

$$\mathfrak{S}(\rho, I) = V_e(\rho) + I, \quad \mathfrak{R}(\rho, I) = Q_e(\rho) + \rho I \quad (8)$$

Dans ce modèle le paramètre comportemental I s'interprète comme la différence entre la vitesse courante du trafic et la vitesse résultant d'un diagramme fondamental de référence (la *vitesse relative*).

Le diagramme fondamental variable est illustré par la figure 2 suivante (débit et vitesse en fonction de la concentration, unités véhicule, mètre, seconde) :

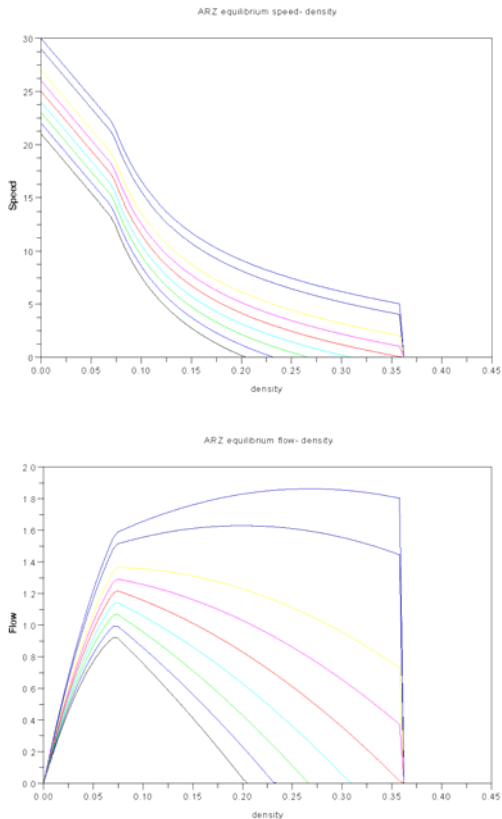


Figure 2 : diagramme fondamental du modèle GSOM-ARZ

B. *Un second modèle* est déduit de la famille de diagrammes fondamentaux de Cremer et se traduit par la formule suivante :

$$\mathfrak{S}(\rho, I) = V_{max} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\rho_{max}} \right)^I \right)^{B(I)}, \quad B(I) = \frac{\left[\left(\frac{1}{\chi} \right)^{1/I} - 1 \right]}{I} \quad (9)$$

L'expression de $B(I)$ garantit que la concentration critique et la concentration maximale restent dans un rapport constant χ . Le diagramme fondamental déduit de (9) et (7) est décrit par la figure 3 suivante (débit et vitesse en fonction de la concentration, unités véhicule, mètre, seconde) :

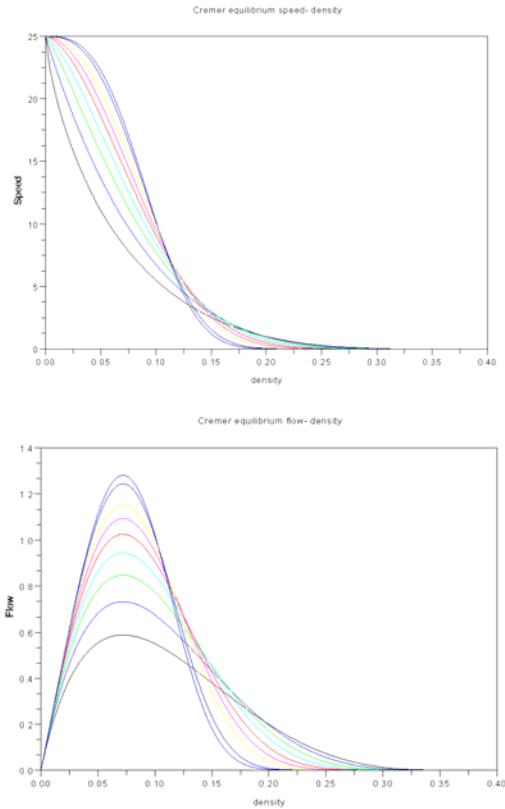


Figure 3 : diagramme fondamental du modèle GSOM-Cremer

C. *Un troisième modèle* se déduit du modèle bi-phase de Colombo 2002, qui l'a introduit pour décrire le trafic sur les autoroutes de Lombardie. Ce modèle a été adapté comme modèle de type GSOM dans Lebacque et al 2007. L'expression de ce modèle dit modèle de Colombo 1-phase est la suivante :

$$\mathfrak{S}(\rho, I) = \begin{cases} v_f(\rho) & \text{si } \rho \leq \rho_{crit} \\ \left(I + \frac{q_*}{\rho} \right) v_0(\rho) & \text{si } \rho > \rho_{crit} \end{cases} \quad (10)$$

avec les notations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_f(\rho) = V_{max} - \beta v \\ \beta = \frac{V_{max} - V_{crit}}{Q_{max} / V_{crit}} \\ v_0(\rho) = 1 - \rho / \rho_{max} \end{array} \right. \quad \text{et}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{crit} = \frac{1}{2\vartheta} \left[\varphi - \sqrt{\varphi^2 - 4q_*\vartheta} \right] \\ \vartheta \stackrel{def}{=} \beta - \frac{I}{\rho_{max}}, \quad \varphi \stackrel{def}{=} V_{max} - I + \frac{q_*}{\rho_{max}} \end{array} \right.$$

Le paramètre q_* est légèrement supérieur au débit maximum. Les autres paramètres sont intuitifs. $\rho_{crit}(I)$ désigne la concentration critique (pour laquelle le débit est maximum); celle-ci sans pour autant être indépendante de I , n'en dépend que modérément.

Ce modèle est illustré par la figure 4 ci-après (même système d'unités vh, m, sec que les figures 2 et 3).

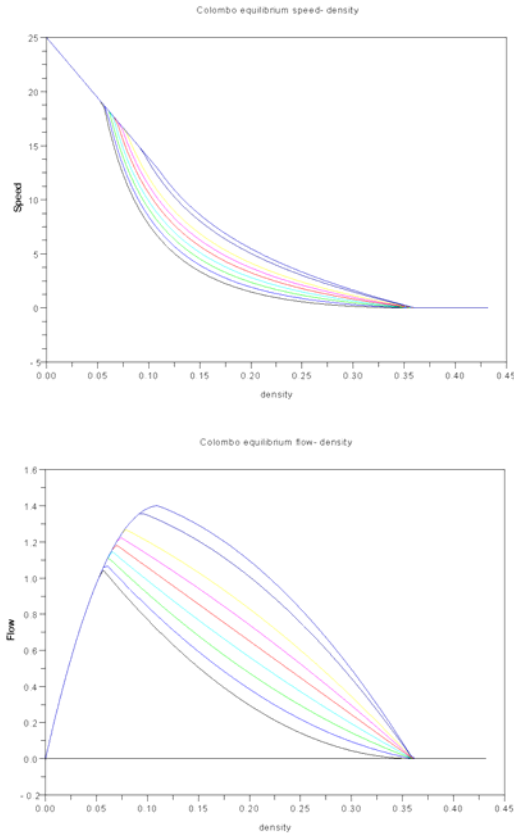


Figure 4: diagramme fondamental du modèle GSOM-Colombo 1-phase

2.3. Formulation lagrangienne du modèle GSOM.

Pour construire un modèle stochastique de la famille GSOM, il est utile de donner la formulation lagrangienne de ce modèle. Les résultats de cette sous-section adaptent au modèle GSOM les résultats obtenus par Aw et al 2002 dans le cas du modèle ARZ .

Les coordonnées lagrangiennes sont l'indice de véhicule N et le temps T . Plus précisément nous définissons :

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x, t) \stackrel{def}{=} \int_x^{+\infty} \rho(\xi, t) d\xi \\ T \stackrel{def}{=} t \end{array} \right. \quad (11)$$

On déduit de (11) les relations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x N = -\rho \\ \partial_t N = q \end{array} \right.$$

et donc les formules de coordonnées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x = -\rho \partial_N \\ \partial_t = \partial_T + q \partial_N \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \partial_N = -r \partial_x \\ \partial_T = \partial_t + v \partial_x \end{array} \right.$$

On a introduit la distance inter-véhiculaire r définie par :

$$r \stackrel{def}{=} 1/\rho \quad (12)$$

Introduisons le diagramme fondamental en coordonnées lagrangiennes :

$$\aleph(r, I) \stackrel{def}{=} \aleph(\rho, I) \quad (13)$$

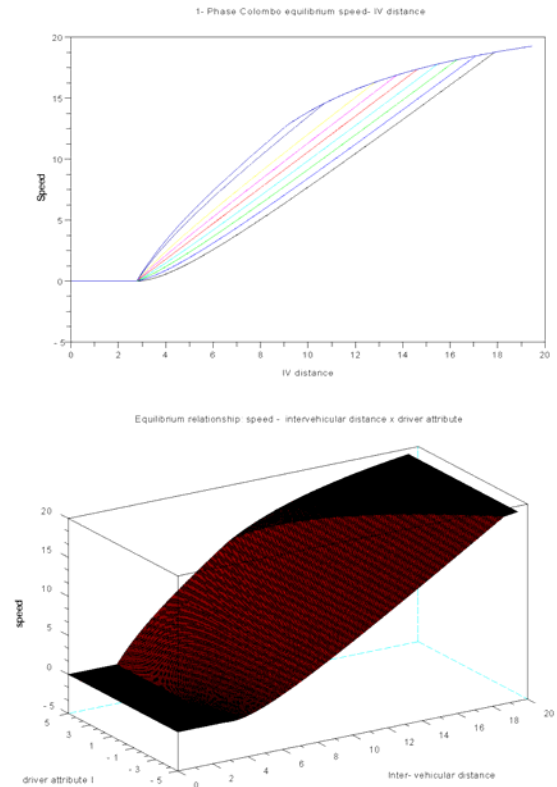


Figure 5 : diagramme fondamental en coordonnées lagrangiennes (modèle GSOM-Colombo 1-phase).

Ce diagramme fondamental, qui a la propriété d'être monotone et concave, est illustré par la figure 5 précédente (vitesse en fonction de la distance inter véhiculaire et de l'attribut usager I).

Le modèle (5) s'exprime maintenant sans difficultés en coordonnées lagrangiennes (11) ; on peut vérifier que la transformation $(x, t) \rightarrow (N, T)$ respecte les ondes de choc et constitue donc une transformation admissible.

$$\begin{cases} \partial_T r + \partial_N v = 0 & \text{Conservation du trafic} \\ \partial_T I = 0 & \text{Conservation de l'attribut } I \\ v = \mathfrak{N}(r, I) & \text{Diagramme fondamental lié} \\ & \text{au conducteur} \end{cases} \quad (14)$$

3 LE MODELE GSOM STOCHASTIQUE

3.1. Formulation du modèle

L'idée du modèle est la suivante. Le comportement de poursuite des usagers est décrit par le diagramme fondamental, qui dépend de l'attribut I . L'hypothèse faite dans cette section est que le caractère aléatoire du trafic affecte le comportement des conducteurs, donc l'attribut I . Nous proposons donc le modèle suivant :

$$\dot{I} = \Xi(I, W_t), \quad \text{avec } W_t = \frac{dB_t}{dt} \quad (15)$$

(où B_t désigne un processus brownien et W_t un bruit blanc associé à B_t).

Le modèle (15) exprime que le caractère aléatoire du trafic génère des perturbations qui affectent la dynamique des véhicules indirectement, par l'intermédiaire de l'attribut I .

Précisons une hypothèse implicite dans (15), mais très forte. La perturbation W_t est fonction des événements $\omega \in \Omega$ de l'espace de probabilité sous-jacent (Ω, \mathbf{P}) et des véhicules N :

$$W_T = W_T(N; \omega) \quad (16)$$

Par intégration de (15) on déduit

$$I = I(N, T; \omega) \quad (17)$$

L'hypothèse est forte et restrictive car elle stipule que les perturbations qui s'exercent sur les conducteurs sont indépendantes.

Il est clair que le modèle s'exprime idéalement en coordonnées lagrangiennes, donc en combinant (14), (15) et (16) :

$$\begin{aligned} \partial_T r + \partial_N v = 0 & \quad \text{Conservation du trafic} \\ \partial_T I = \Xi(I, W_T) & \quad \text{Conservation de l'attribut } I \\ v = \mathfrak{N}(r, I) & \quad \text{Diagramme fondamental lié} \\ & \quad \text{au conducteur} \\ W_T = W_T(N; \omega) & \quad \text{Processus de perturbation} \end{aligned} \quad (18)$$

Comment résoudre (18) ? Les étapes de la résolution sont les suivantes :

- Fixer l'événement $\omega \in \Omega$
- Intégrer (15) ou de manière équivalente $\partial_T I = \Xi(I, W_T)$, afin d'obtenir (17)
- Résoudre $\partial_T r + \partial_N (\mathfrak{N}(r, I)) = 0$, (l'équation de conservation) avec $I = I(N, T; \omega)$. Cette équation apparaît comme une équation de type LWR, avec une fonction de flux dépendant de N . En termes de régularité, il importe pour la résolution par la méthode d'offre/demande (Lebacque 1996) que $I = I(N, T; \omega)$ soit au moins continue par morceaux relativement à N et T pour presque tout $\omega \in \Omega$.

Le modèle (18) peut-être formulé sous forme eulérienne

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \partial_x (\rho v) = 0 & \quad \text{Conservation du trafic} \\ \partial_t (\rho I) + \partial_x (\rho v I) = \rho \Xi(\rho, W_t) & \quad \text{Equation de l'attribut } I \\ v = \mathfrak{Z}(\rho, I) & \quad \text{Diagramme fondamental} \\ & \quad \text{lié au conducteur} \\ W_t = W_t(N; \omega) & \quad \text{Bruit blanc lagrangien} \end{aligned}$$

Il est néanmoins préférable de se limiter à la formulation lagrangienne qui, compte tenu des hypothèses sur le bruit blanc W_t , apparaît comme intrinsèque.

3.2. Discrétisation particulière de (18).

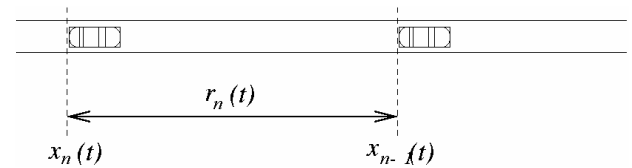


Figure 6: cellules de discrétisation lagrangienne

On applique la méthode ci-dessus en supposant que $\omega \in \Omega$ est fixé et que la solution $I = I(N, T; \omega)$ de $\partial_T I = \Xi(I, W_T)$ soit continue par morceaux.

Le schéma de Godunov s'applique (Lebacque 1996), et est optimal parmi les schémas d'ordre 1. Les cellules sont les paquets de ΔN véhicules. Nous optons pour le choix $\Delta N = 1$, c'est-à-dire une discrétisation particulière. Notons que, dans le cas déterministe, de tels schémas ont été proposés,

- Pour le modèle LWR dès 1994 par Van Aerde (modèle INTEGRATION)
- Pour les modèles d'ordre supérieur par Aw et al 2002.

A chaque cellule (n) et à chaque pas de temps (t) = $[t\Delta t, (t+1)\Delta t]$ nous associons la distance inter véhiculaire (voir figure 6) :

$$r_n(t) \stackrel{def}{=} x_{n-1}(t) - x_n(t)$$

La fonction de flux du modèle, $\aleph(r, I)$, est monotone croissante (exemple : figure 5), donc la demande est égale à $\aleph(r, I)$ et l'offre est égale à la vitesse maximale. Compte tenu de la formule du min, et en supposant la section homogène, le flux entre cellules se limite à la vitesse d'équilibre.

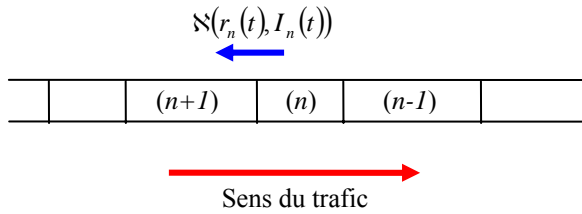


Figure 7 : Schéma de Godunov

On notera que par définition le sens de numérotation des cellules est inverse de celui du trafic (figure 7). Le schéma de Godunov en résulte :

$$\begin{aligned} r_n(t+1) &= r_n(t) + \Delta t (-v_n(t) + v_{n-1}(t)) \\ v_n(t) &= \aleph(r_n(t), I_n(t)) \end{aligned} \quad (19)$$

On exprime alors $r_n(t)$ en fonction de $x_{n-1}(t)$, $x_n(t)$, en décomposant (19):

$$\begin{aligned} x_n(t+1) &= x_n(t) + \Delta t v_n(t) \\ v_n(t) &= \aleph(r_n(t), I_n(t)) \end{aligned} \quad (20)$$

Pour évaluer $I_n(t+1)$ il faut intégrer $\partial_T I = \Xi(I, W_T)$, i.e. (15). Nous noterons donc $\mathbf{S}(i_0, t_0, t_1; \omega)$ la solution à t_1 de :

$$\dot{I}(s) = \Xi(I(s), W_s(n, \omega)), \quad \text{avec } I(t_0) = i_0$$

Il vient donc :

$$I_n(t+1) = \mathbf{S}(I_n(t), t, t + \Delta t; \omega) \quad (21)$$

Le schéma de Godunov s'exprime par (20), (21). Le problème de la cohérence entre pas de temps et d'espace (condition CFL, Courant-Friedrichs-Lewy, voir Kröner 1997) sera abordé plus loin.

4. MODELES STOCHASTIQUES : QUELQUES EXEMPLES

Nous analyserons deux modèles simples de processus.

4.1. Le premier exemple est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, qui résulte du choix suivant de Ξ :

$$\Xi(I, W) = -\alpha I + \sigma W \quad (22)$$

α et σ désignent deux paramètres, $W_t = \frac{dB_t}{dt}$, B_t est un processus brownien dont les incréments $B_t - B_s$ sont gaussiens centrés, indépendants, de variance $t - s$. Rappelons que les trajectoires $t \rightarrow B_t(\omega)$ sont continues pour presque tout $\omega \in \Omega$. Avec ce modèle on calcule aisément la résolvante \mathbf{S} :

$$\mathbf{S}(I(0), 0, t; \omega) = \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s(\omega) + I(0)e^{-\alpha t} \quad (23)$$

qui est une variable gaussienne de moyenne $I(0)e^{-\alpha t}$ et de variance

$$\sigma^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha}$$

(c'est le processus d'Ornstein-Uhlenbeck). On notera donc que

$$I_n(t; \omega) = \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s(n; \omega) + I_n(0)e^{-\alpha t} \quad (24)$$

L'intégrale dans (23) et (24) est l'intégrale de Wiener. Les trois processus, W_t , B_t , $I_n(t)$, sont illustrés par la figure ci-après (abscisse : temps en secondes, ordonnée en mètres/seconde):

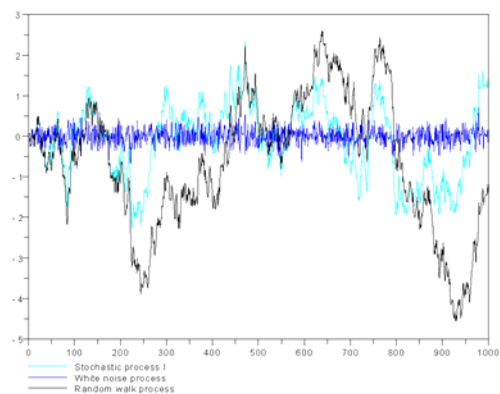


Figure 8 : Bruit blanc et processus associés

L'allure typique des réalisations du processus d'Ornstein-Uhlenbeck $I_n(t)$ est illustrée par la figure 9 suivante (mêmes unités que la figure 8):

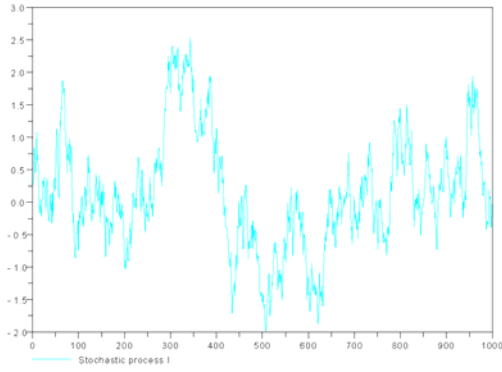


Figure 9 : processus d'Ornstein-Uhlenbeck $I_n(t)$

4.2 Deuxième exemple

Le processus décrit par (23) admet des valeurs arbitrairement grandes avec une probabilité non nulle, on peut donc penser que ce processus ne représente qu'imparfaitement la réalité. En fait on a de bonnes raisons de penser (voir observations de trafic, figure 1) que les valeurs de I doivent être bornées. D'où l'idée de transformer le processus d'Ornstein Uhlenbeck en un processus borné par une transformation

$$\mathbf{F} : [-I_*, I_*] \rightarrow \mathbb{R}$$

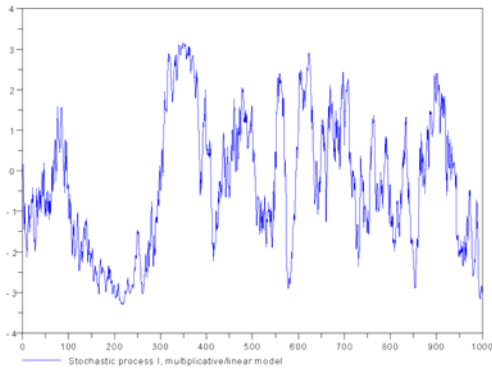


Figure 10 : processus Ornstein-Uhlenbeck transformé

Nous considérons ici un processus I défini comme \mathbf{F}^{-1} appliqué à un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. $\mathbf{F}(I) = \text{Arctg}(I/I_*)$ ou bien $\mathbf{F}(I) = \text{tg}(\pi I/I_*)$ convient. Nous définissons donc :

$$\Xi(I, W) = -\alpha \frac{\mathbf{F}(I)}{\mathbf{F}'(I)} + \sigma \frac{W}{\mathbf{F}'(I)} \quad (25)$$

d'où nous déduisons :

$$I_n(t, \omega) = \mathbf{F}^{-1} \left(\sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB_s(n, \omega) + \mathbf{F}^{-1}(I_n(0)) e^{-\alpha t} \right) \quad (26)$$

Un exemple de réalisation d'un tel processus est par la figure 10 (mêmes unités pour les figures 8 et 9) :

Le schéma de Godunov pour ce modèle se déduit de (20) et de (26) :

$$\begin{aligned} x_n(t+1) &= x_n(t) + \Delta t v_n(t) \\ v_n(t) &= \mathfrak{N}(r_n(t), I_n(t)) \\ I_n(t+1) &= \mathbf{F}^{-1} \left(\frac{\mathbf{F}(I_n(t)) + \sigma \Delta B_t}{1 + \alpha \Delta t} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

L'équation actualisant I_n dans (27) constitue une approximation de (26) (Euler implicite). La condition CFL s'obtient en imposant une condition de distance inter véhiculaire minimale (voir Khoshyaran et Lebacque 2007), et la formule résultante s'exprime comme :

$$\Delta t \leq \text{Max}_{\substack{r \geq r_{\min}(I) \\ -I_* \leq I \leq I_*}} \left(\frac{r - r_{\min}(I)}{\Xi(r, I)} \right) \quad (28)$$

où $r_{\min}(I)$ désigne la distance inter véhiculaire minimale (voir Figure 5).

4.3 Quelques exemples de simulations.

Les perturbations stochastiques affectant l'attribut I induisent, comme prévisible, un certain nombre d'effets : formation spontanée de pelotons, perturbations spontanées et persistantes. Celles-ci se propagent cependant conformément au modèle LWR, en moyenne.

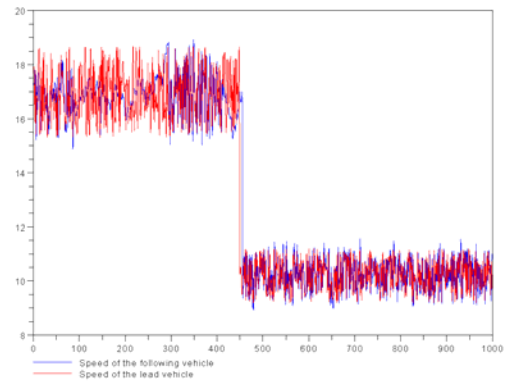


Figure 11 : poursuite de deux véhicules (ralentissement du premier)

Il en est de même des variations d'offre (celles-ci sont modélisées par une variation de la particule de tête) et des variations de la demande.

La figure 11 illustre le comportement de poursuite de deux véhicules (vitesse exprimée en m/s en ordonnée, temps en secondes en abscisse).

Les figures suivantes (12, 13, 14) décrivent les trajectoires des particules (véhicules) simulées (distance parcourue en mètres en ordonnée, temps en secondes en abscisse).

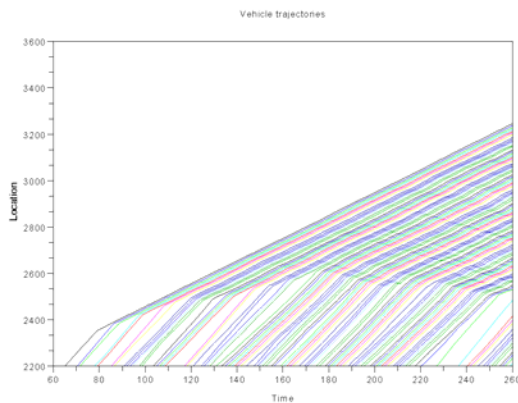


Figure 12 : propagation d'une restriction d'offre

La demande est modélisée par une injection de véhicules en amont de la section modélisée, à une distance de l'ordre de $r_{min}(I)$ en amont du dernier véhicule, en situation de congestion, ou directement à l'entrée de la section en cas de trafic fluide (c'est alors la vitesse du véhicule entrant qui est ajustée en fonction de l'inter distance avec le dernier véhicule).

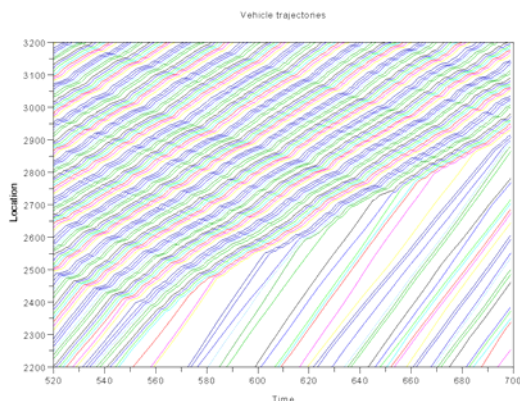


Figure 13 : perturbations spontanées, onde de choc

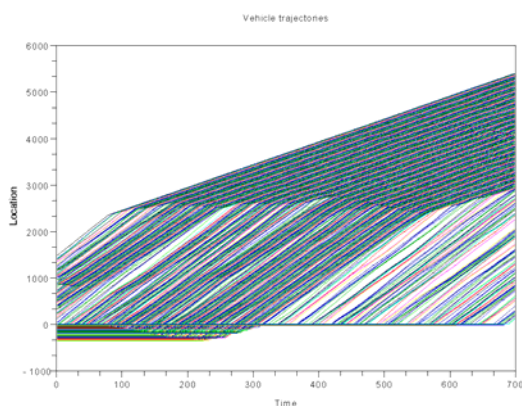


Figure 14 : diminution de la demande, congestion initiale

On notera la similitude des trajectoires simulées avec celles observées par Treiterer et Myers 1974.

5. CONCLUSION

Le modèle proposé est dénué d'effets diffusifs ; ainsi qu'il ressort immédiatement de la convergence, pour presque tout $\omega \in \Omega$, des solutions du schéma de Godunov (20), (21) vers les solutions du système (18). Le modèle reproduit bien les propriétés stochastiques du trafic, telles que décrites par exemple dans les observations de Treiterer et Myers. 1974.

Par ailleurs le modèle en coordonnées lagrangiennes est aisément calculable, y compris numériquement, au moins pour les modèles standards de I .

Les recherches en cours sur ce modèle visent trois objectifs :

1. analyser les distributions de densité, de débit et de vitesse prédites par le modèle, afin d'appliquer le modèle au contrôle du trafic, et de faire la jonction avec l'interprétation probabiliste de SSMT (Lebacque 1984),
2. étendre le modèle en incluant les conditions aux limites et les modèles d'intersection introduits pour les modèles GSOM dans Lebacque et Khoshyaran 2005, Lebacque et al 2007,
3. Rendre compte de phénomènes stochastiques non linéaires tels le "stop-and-go", et les réductions dynamiques de capacité.

REFERENCES

- Lebacque J.P, 1996. The Godunov scheme and what it means for first order traffic flow models. In: *Transportation and Traffic Theory, proceeding of the 13 ISTTT* (J.B. Lesort ed.). 647-677, Elsevier.
- Lighthill, M.H. and G.B. Whitham, 1955. On kinematic waves II: A theory of traffic flow on long crowded roads. *Proceedings of Royal Society of London*, vol. A229, P. 317-345.
- Richards P I (1956). Shock-waves on the highway. *Operations Research*, 4, 42-51.
- Haj-Salem H, Mangeas M. (1998) OASIS: optimal advanced system for integrated strategies. *DACCORD Workshop*. University of Lancaster (UK).
- Ngoduy, D. (2006) Macroscopic Discontinuity Modeling for Multiclass Multilane Traffic Flow Operations. PhD thesis, Delft University of Technology, Netherlands.
- Lebacque, J.P. (1984) Semimacroscopic simulation of urban traffic. Int. 84 Minneapolis Summer Conference. AMSE.
- Weits, E. (1992) Stationary freeway traffic flow modelled by a linear stochastic partial differential equation. *Transportation Research B*, 26, 2, pp 115-126.
- Dundon N., Sopsakis A., (2007) Stochastic modeling and simulation of multi-lane traffic. In: *Transportation*

- and traffic theory 2007, Proceedings of the 17th ISTTT, pp 661-689.
- Kühne, Mahnke R. (2005) Controlling traffic breakdowns. In: Transportation and traffic theory, Proceedings of the 16th ISTTT (H S Mahmassani, ed.), 229-244.
- Lebacque J.P., S. Mammar and H. Haj-Salem, 2005. Second order traffic flow modeling: the Riemann problem resolution using supply/demand based approach. *Proceedings of the Euro Working Group on Transportation*. Poznan.
- Khoshyaran, M.M., Lebacque, J.P., 2007, A stochastic macroscopic traffic model devoid of diffusion. To be published in the Proceedings of the TGF'07 (Traffic Granular Flow).
- Lebacque, J.P, S. Mammar and H. Haj-Salem, (2007). Generic second order traffic flow modeling. Proceeding of ISTTT (*International Symposium on Transportation and Traffic Flow theory*), London.
- Mammar, S., J.P. Lebacque and H. Haj-Salem, 2005. Second order traffic flow modeling: the Riemann problem resolution in homogeneous case without relaxation term. *Proceedings of the Euro Working Group on Transportation*. Poznan.
- Aw and M. Rascle, 2000. Resurrection of Second Order Models of Traffic flow. *SIAM J. Appl. Math.*, 60(3):916-938.
- Zhang, H.M., 2002. A Non-Equilibrium Traffic Model Devoid of Gas-Like Behaviour. *Transportation Research Part B*, Vol 36, p. 275-290.
- Colombo, R. (2002) Hyperbolic phase transitions in traffic flow. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 63(2), 708-721.
- Van Aerde M. (1994) INTEGRATION: A model for simulating integrated traffic networks. Transportation Systems Research Group. Queens University Kingston, Ontario.
- Aw, A., Klar, A., Materne, T. and Rascle M. (2002). Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models. *SIAM Journal of applied Mathematics*, 63, 259-278.
- Kröner, D, 1997. Numerical schemes for conservation laws. *Wiley Teubner*.
- Treiterer, J., Myers, J.A. 1974. 'The Hysteresis Phenomenon in Traffic Flow'. In: Procs. 6th International Symposium on Transportation and Traffic Theory. ed. by D.J. Buckley (A.H. & A.W. Reed, London) pp. 13–38.
- Lebacque J.P. and M. M. Khoshyaran, 2005. First order macroscopic traffic flow models: Intersection modeling, network modeling. *Transportation and Traffic Theory*, Flow, Dynamics and Human Interaction, Elsevier, Amsterdam.