

IDENTIFICATION D'UN SYSTEME A PLUSIEURS MODES DE FONCTIONNEMENT

Elom DOMLAN, José RAGOT, Didier MAQUIN

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
UMR 7039, Nancy-Université, CNRS
2, avenue de la forêt de Haye,
54516 Vandœuvre-lès-Nancy, France
{elom-ayih.domlan, jose.ragot, didier.maquin}@ensem.inpl-nancy.fr

RESUME : *Le problème abordé ici est l'estimation des paramètres du modèle d'un système présentant plusieurs modes ou régimes de fonctionnement. Les données collectées sont issues de ces différents modes et l'on ne connaît pas a priori quelles données doivent être affectées à un mode particulier. L'apport essentiel de cette communication réside d'une part dans la procédure d'estimation des paramètres des modèles qui fournit une solution analytique, d'autre part dans la résolution simultanée du problème d'estimation des paramètres des modèles locaux et de l'affectation des données à ces modèles locaux, enfin à la robustesse de l'estimation vis-à-vis des valeurs aberrantes accidentelles. La méthode est exposée dans le cas d'un système présentant deux modes de fonctionnement, mais l'extension à plus de deux modes est réalisable.*

MOTS-CLES : *identification, modèles multiples, modèles hybrides, détection de changement de régime.*

1. INTRODUCTION

Depuis les années 70, dans les domaines aussi variés que l'économie, les finances, les sciences de l'ingénieur, les chercheurs se sont intéressés à la modélisation de systèmes présentant plusieurs régimes de fonctionnement à partir de la régression linéaire ou multilinéaire classique. Cela a donné naissance à des généralisations connues sous le nom de régression à commutation ou plus généralement de modèles à commutation. Parmi les travaux précurseurs, ceux de Hudson (Hudson, 1966), de Quandt (Quandt, 1958), de Goldfeld (Goldfeld et Quandt, 1973) ont donné les premiers principes d'une telle représentation. Depuis, de très nombreux travaux ont précisé et développé ce formalisme dont les applications sont nombreuses dès qu'un système présente, de façon naturelle ou provoquée, des changements de régime (Breiman, 1993), (Pucar et Sjöberg, 1988).

De façon un peu arbitraire, on peut classer en deux catégories les types de systèmes à commutation :

- ceux dont le changement de régime est déterminé par une variable observée. Une situation typique est celle où le changement est réalisé à partir d'un seuil que franchit ou non une variable d'état connue du système
- ceux dont le changement de régime n'est pas directement observé. Dans ce cas, le processus générateur du changement de régime doit être lui-même modélisé à partir de variables mesurées.

On peut aussi noter que les systèmes hybrides recouvrent ces deux situations où, de plus, les changements

de régime peuvent être décrits par un processus markovien (Kim et al., 2003), (Hocine et al., 2006) pouvant ainsi apporter une connaissance supplémentaire pour la caractérisation de tels systèmes.

Avant de représenter le fonctionnement d'un système par un modèle à commutation, la question préliminaire à se poser est l'existence effective de plusieurs régimes de fonctionnement. La situation la plus difficile est celle où l'on ne dispose que de mesures des entrées et des sorties du système sans autre information sur l'existence physique de plusieurs régimes ; il faut donc découvrir ces derniers uniquement à partir des mesures disponibles. Une fois reconnue la présence de plusieurs régimes de fonctionnement, il convient alors de les caractériser à partir des données correspondant à chaque régime de fonctionnement.

Dans la suite de l'exposé, on s'intéresse à une classe particulière de système hybride connue sous le nom PWA (Piece-Wise Affine), (Ferrari-Trecate et al., 2004), (Yu et al., 2001) et de son extension aux systèmes dynamiques PWARX (Piece-Wise AutoRegressive eXogeneous). Ce type de modèle est construit en partitionnant l'espace des régresseurs en un nombre fini de polyèdres et en affectant un modèle local affine à chaque région ainsi obtenue. Le problème d'identification qui en résulte est généralement non linéaire (Bemporad et al., 2001) ; ceci est dû aux conditions logiques qui génèrent les passages d'une région à une autre région traduisant le point de vue physique du changement de régime ou de mode de fonctionnement.

La difficulté essentielle résulte du couplage entre l'estimation des paramètres des modèles locaux et l'estimation du domaine de validité de ces modèles locaux, la question qui se pose étant : comment trier dans les données celles relatives à un mode particulier ? Il convient donc, et cela fait l'objet de notre présentation, d'exploiter simultanément plusieurs concepts : la segmentation des données, la classification des données, l'estimation des paramètres.

Les approches conventionnelles utilisent généralement une procédure à deux niveaux (Dempster et al., 1977) : le premier effectue un partitionnement a priori des données, le deuxième procède à l'estimation des paramètres des modèles locaux dans l'espace ainsi partitionné (Rousseeuw, 1987), puis le partitionnement initial est remis en cause sur la base des résultats de l'estimation jusqu'à stabilisation des solutions successives obtenues. Enfin, lorsqu'on traite des données issues de campagnes de mesures effectuées sur un processus, les chaînes d'acquisition et de transmission de ces mesures sont souvent entachées d'erreurs. Si ces dernières sont de faibles amplitudes (vis-à-vis de l'amplitude de la grandeur à mesurer), sont à valeurs moyennes nulles et peuvent être assimilées à des réalisations de variables aléatoires gaussiennes, les critères d'estimation de type moindres carrés suffisent généralement à en minimiser l'influence. Par contre, la présence de valeurs aberrantes accidentelles de fortes amplitudes se révèle beaucoup plus délicate et il est bien connu que les méthodes classiques de moindres carrés sont peu robustes vis-à-vis de ce type d'erreurs ce qui rend les résultats de l'estimation peu crédibles.

Cette communication se base sur les travaux de Vidal (Vidal et al., 2003) dans lesquels une formulation générale du problème d'analyse en composantes principales est présentée. Nous étendons l'intérêt de cette approche au cas, assez réaliste dans la pratique, où les mesures utilisées pour l'estimation paramétrique sont corrompues par des valeurs aberrantes. L'utilisation d'un critère d'estimation prenant en compte simultanément les erreurs aléatoires de faibles amplitudes et les erreurs accidentelles de plus fortes amplitudes fournit une estimation des paramètres des modèles robuste, c'est-à-dire insensible en grande partie à la présence des valeurs aberrantes.

La section 2 introduit le problème à résoudre à partir d'un exemple académique. La section 3 formalise la procédure d'estimation des paramètres du modèle. La section 4 aborde le problème de robustesse de l'estimation vis-à-vis des valeurs aberrantes et est illustré par un exemple.

2. EXEMPLE INTRODUCTIF

Considérons le système libre (sans excitation) du premier ordre à deux dynamiques :

$$y_{k+1} = a(\theta_k)y_k \quad (1)$$

$$a(\theta_k) = \begin{cases} a_1 & \text{si } \theta_k - 0.5 \geq 0 \\ a_2 & \text{si } \theta_k - 0.5 < 0 \end{cases} \quad (2)$$

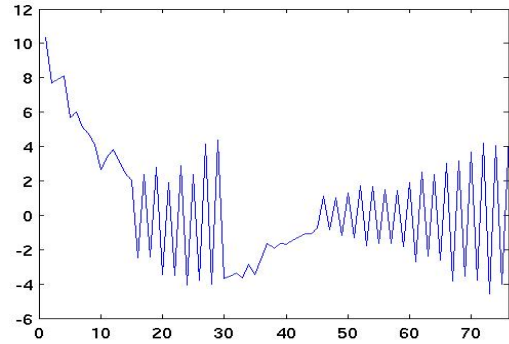


Figure 1. Evolution temporelle de y

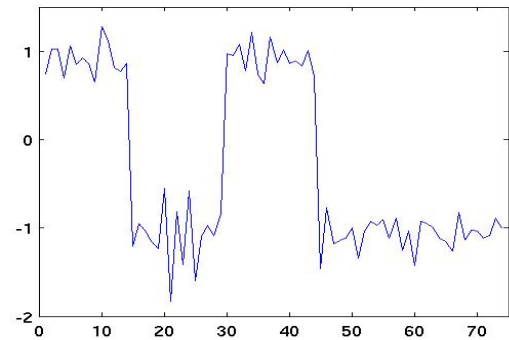


Figure 2. Evolution temporelle de a

θ peut être considéré comme la réalisation d'une variable aléatoire ou comme un paramètre variant sous l'influence de grandeurs perturbatrices inconnues ou encore comme un paramètre dépendant des conditions opératoires sous lesquelles le système considéré fonctionne.

La figure (1) a été obtenue avec : $y_0 = 2$, $a_1 = 0.9$, $a_2 = -1.05$. Aux données issues de la résolution de l'équation 1 ont été superposés un bruit multiplicatif tiré selon une loi normale centrée d'écart type 0.05 ainsi que trois valeurs aberrantes aux instants 9, 28 et 40 d'amplitude 50% de la valeur. Le changement de régime de fonctionnement apparaît nettement ici aux instants 15, 30 et 45.

Inversement, connaissant la réponse y_k sur l'horizon $[1..N]$, on peut chercher à identifier les valeurs a_1 et a_2 prises par le paramètres a , à déterminer à quels instants le système change de mode de fonctionnement. Éventuellement, si le paramètre θ dépend de l'état du système, il peut être intéressant de caractériser cette dépendance, sous forme d'un modèle explicatif, comme cela a été proposé dans (Domlan et al., 2007).

La solution de ce problème d'estimation est simple si les instants de commutation du paramètre a sont connus et si l'on sait, à chaque instant, dans quel mode de fonctionnement le système est ; il suffirait, dans ce cas, d'utiliser les données relatives au premier mode pour estimer la valeur a_1 et celles relatives au deuxième mode pour estimer a_2 . Dans la suite, on se place dans le cas où ces instants sont inconnus, la classification des données n'étant pas a

priori connue. Ainsi, on ignore a priori les portions de la trajectoire d'état décrites avec le paramètre a_1 et celles décrites avec le paramètre a_2 .

Pour estimer le paramètre d'état a du modèle, on peut remarquer que (1) s'écrit aussi (si y_k est non nul) :

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} = a(\theta_k) \quad (3)$$

La figure (2) visualise l'évolution temporelle de ce rapport. On voit nettement apparaître les commutations d'un mode à un autre mode de fonctionnement. La distribution (sous forme d'histogramme) des valeurs de a est visualisée à la figure (3). L'existence de plusieurs régimes de fonctionnement est également confirmée à la figure (4) tracée dans le plan de phase $\{y_k, y_{k+1}\}$. Les commutations à chaque instant n'apparaissent plus (le paramètre temps étant masqué); par contre, la présence de deux modes de fonctionnement apparaît clairement et donc deux paramètres d'état doivent être mis en évidence et identifiés. Ainsi, au vu de ces différentes représentations des données, on est capable de préciser le nombre de régimes caractérisant le système. Il reste à identifier les modèles relatifs à ces deux modes de fonctionnement. En général, ce double problème d'identification est rendu difficile par la présence des erreurs et notamment celles qualifiées d'accidentelles de fortes amplitudes.

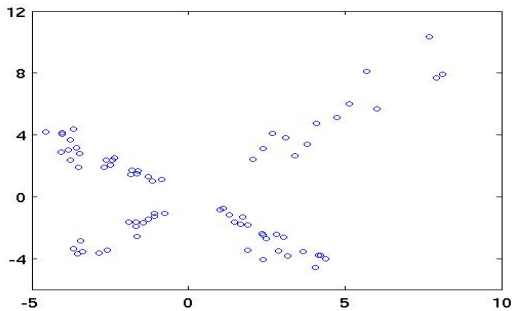


Figure 3. Trajectoire dans le plan de phase

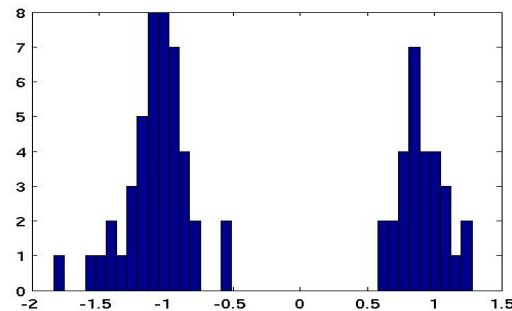


Figure 4. Histogramme des valeurs du paramètre a

La recherche des valeurs de a peut être faite en utilisant l'un ou l'autre des repères précédemment utilisés. D'un point de vue plus analytique, le principe retenu dans la suite est celui de la maximisation d'une fonction coût valable simultanément pour les deux modes de fonctionne-

ment, une fonction candidate pouvant être :

$$\Phi = \sum_{k=1}^N ((y_{k+1} - a_1 y_k)(y_{k+1} - a_2 y_k))^2 \quad (4)$$

Cette fonction a été construite en partant du principe que, à chaque instant, l'un des modèles doit être vérifié en l'absence d'erreurs de mesure. La recherche de a_1 et a_2 résulte de la minimisation de la quantité Φ . En posant $S = a + b$ et $P = ab$, il est simple de montrer que S et P vérifient le système :

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N y_{k+1}^2 y_k^2 & \sum_{k=1}^N y_{k+1} y_k^3 \\ \sum_{k=1}^N y_{k+1} y_k^3 & \sum_{k=1}^N y_k^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N y_{k+1}^3 y_k \\ \sum_{k=1}^N y_{k+1}^2 y_k^2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

ce qui conduit ici aux estimés respectifs des paramètres a et b : 0.9027 et -1.0466 , valeurs en accord avec les valeurs vraies. Cet exemple introductif illustre un cas particulier de système à plusieurs modes de fonctionnement et la façon de caractériser ces modes. Il convient maintenant de traiter le cas de modèles plus complexes en généralisant la procédure précédente.

3. SYSTEME A DEUX MODES DE FONCTIONNEMENT

On considère un système caractérisé par des variables $x \in \mathcal{R}^K$ et pouvant prendre deux modes de fonctionnement. Chaque mode est décrit par un modèle local linéaire par rapport à ses paramètres :

$$a^T x = 0, \quad a \in \mathcal{R}^K \quad (6)$$

$$b^T x = 0, \quad b \in \mathcal{R}^K \quad (7)$$

Dans la suite, les composantes des vecteurs x , a et b sont respectivement notées x_i , a_i et b_i .

Selon les conditions opératoires, le système est décrit par l'un ou l'autre des modèles (6) ou (7). Cependant, ayant connaissance a priori du nombre de modes de fonctionnement (ici deux), on sait que pour une valeur donnée de x , un des deux modèles est nécessairement "actif". Ne sachant pas a priori le modèle actif, le fonctionnement global du système peut aussi être représenté par un modèle du type :

$$f(x) = (a^T x) (b^T x) = 0 \quad (8)$$

qui correspond donc au produit des deux modèles "locaux". Notons aussi que le polynôme f s'écrit sous forme décomposée en fonction des variables $x_i, i = 1 \dots K$:

$$f(x) = \sum_{n_1 \dots n_K} p_{n_1 \dots n_K} x_1^{n_1} \dots x_K^{n_K} \quad (9)$$

$$n_1 + n_2 + \dots + n_K = 2, \quad 0 \leq n_j \leq 2, \quad j = 1 \dots K$$

ses coefficients $p_{n_1 \dots n_K}$ dépendant de ceux a_i et b_i des modèles locaux. Comme pour l'exemple de la section 2,

le problème à résoudre est celui de l'estimation des paramètres a_i et b_i des modèles locaux, à partir de mesures des variables x , sans savoir a priori quelles mesures sont à affecter à un modèle local particulier. L'idée proposée dans (Vidal et al., 2003) consiste d'abord à identifier les paramètres $p_{n_1 \dots n_K}$ de la fonction f , puis d'en déduire ceux a_i et b_i des modèles locaux. La première phase relève d'une procédure d'identification à partir des mesures disponibles, la seconde revient à un problème d'inversion de modèle en explicitant les paramètres des modèles locaux en fonction de ceux $p_{n_1 \dots n_K}$, du modèle global.

A titre d'exemple, on se place dans le cas $K = 3$, le système étant alors caractérisé par trois variables x_1, x_2 et x_3 , le modèle (9) s'explicitant :

$$p_{200}x_1^2 + p_{110}x_1x_2 + p_{101}x_1x_3 + p_{020}x_2^2 + p_{011}x_2x_3 + p_{002}x_3^2 = 0 \quad (10)$$

Pour la phase d'estimation des paramètres $p_{n_1 \dots n_K}$, une procédure (non détaillée ici) classique de régression linéaire ou d'analyse en composantes principales peut être appliquée au modèle (9). Pour la phase d'inversion, toujours pour $K = 3$, en identifiant les deux expressions (8) et (9) de f , on obtient le système :

$$p_{200} = a_1b_1 \quad (11)$$

$$p_{110} = a_1b_2 + a_2b_1 \quad (12)$$

$$p_{101} = a_1b_3 + a_3b_1 \quad (13)$$

$$p_{020} = a_2b_2 \quad (14)$$

$$p_{011} = a_2b_3 + a_3b_2 \quad (15)$$

$$p_{002} = a_3b_3 \quad (16)$$

Avec la représentation exprimée par (6), les paramètres du modèle apparaissent donc de façon non linéaire. La résolution d'un tel système a été proposée dans (Vidal et al., 2003); ici, nous suggérons une méthode différente qui nous semble plus simple à mettre en œuvre.

On déduit de (14), (15) et (16) que les rapports a_2/a_3 et b_2/b_3 sont solutions de l'équation en α_{23} :

$$p_{002}\alpha_{23}^2 - p_{011}\alpha_{23} + p_{020} = 0 \quad (17)$$

De même, de (11), (13) et (16) on déduit les rapports a_3/a_1 et b_3/b_1 comme solutions de l'équation :

$$p_{200}\alpha_{31}^2 - p_{101}\alpha_{31} + p_{002} = 0 \quad (18)$$

Enfin, de (11), (12) et (14) on déduit les rapports a_1/a_2 et b_1/b_2 comme solutions de l'équation :

$$p_{020}\alpha_{12}^2 - p_{110}\alpha_{12} + p_{200} = 0 \quad (19)$$

Les racines des équations (17) et (18) fournissent les rapports a_2/a_3 et a_3/a_1 . Le lecteur pourra vérifier que les rapports b_2/b_3 et b_3/b_1 vérifient également ces équations.

Finalement, en exprimant a_2 et a_3 en fonction de a_1 et des rapports qui viennent d'être identifiés, les modèles locaux s'écrivent sous la forme :

$$p_1(x) = a_1(x_1 + \alpha_{31}\alpha_{23}x_2 + \alpha_{31}x_3) \quad (20)$$

Cette écriture laisse supposer la présence de quatre modèles puisque α_{12} et α_{23} prennent chacun deux valeurs. En réalité, ce nombre est plus restreint car il reste à prendre en compte l'équation (19). Il faut en effet noter que les rapports α_{23} , α_{31} et α_{12} sont liés, la quantité :

$$\tau = \alpha_{12}\alpha_{23}\alpha_{31} - 1 \quad (21)$$

devant être nulle.

Exemple. Afin de détailler ce problème de choix de racines, considérons un exemple de dimension réduite. Supposons que l'identification des coefficients du polynôme (9) conduise aux résultats suivants :

$$f(x) = 2x_1^2 + 5x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2x_2^2 + 7x_2x_3 + 3x_3^2 \quad (22)$$

La résolution des équations (17), (18) et (19) donne les solutions respectives :

$$\alpha_{23} = 2 \text{ et } \frac{1}{2}$$

$$\alpha_{31} = 2 \text{ et } \frac{1}{3}$$

$$\alpha_{12} = \frac{3}{2} \text{ et } 1$$

La contrainte $\tau = 0$ (21) est alors utilisée pour déterminer les solutions admissibles. Le tableau (1) rassemble les valeurs de la variable de test τ pour toutes les combinaisons possibles.

α_{23}	α_{31}	α_{13}	τ
2	2	3/2	5
2	2	1	3
2	1/3	3/2	0
2	1/3	1	-1/3
1/2	2	3/2	1/2
1/2	2	1	0
1/2	1/3	3/2	-3/4
1/2	1/3	1	-5/6

Tableau 1. Test des solutions admissibles

Comme on trouve deux valeurs de τ nulles, il y a donc deux solutions admissibles :

$$a_2/a_3 = 2, a_3/a_1 = 1/3, a_1/a_3 = 3/2$$

$$b_2/b_3 = 1/2, b_3/b_1 = 2, b_1/b_3 = 1$$

Les deux modèles locaux s'explicitent donc :

$$p_1(x) = \frac{2}{3b_1}(3x_1 + 2x_2 + x_3)$$

$$p_2(x) = b_1(x_1 + 2x_2 + x_3)$$

Remarque : en raison de l'influence des erreurs d'estimation des paramètres $p_{n_1 \dots n_K}$, erreurs dues à la présence de bruit de mesure dans les données, la contrainte précédente $\tau = 0$ n'est généralement pas vérifiée d'un point de vue numérique. Par exemple, avec le polynôme suivant (obtenu à partir de variations de certains des coefficients de (22)) :

$$f(x) = 2x_1^2 + 5.1x_1x_2 + 5x_1x_3 + 2.1x_2^2 + 6.9x_2x_3 + 3x_3^2 \quad (23)$$

la résolution des équations (17), (18) et (19) donne les solutions respectives :

$$\begin{aligned} \alpha_{23} &= 1.937 \text{ et } 0.492 \\ \alpha_{31} &= 1.939 \text{ et } 0.361 \\ \alpha_{12} &= 1.500 \text{ et } 1.000 \end{aligned}$$

et le test de la contrainte (21) donne les résultats indiqués dans le tableau (2). Aucune valeur de τ ne prend la valeur

α_{23}	α_{31}	α_{13}	test
1.937	1.939	1.5	4.633
1.937	1.939	1	2.756
1.937	0.361	1.5	0.049
1.937	0.361	1	-0.301
0.492	1.939	1.5	0.430
0.492	1.939	1	-0.047
0.492	0.361	1.5	-0.734
0.492	0.361	1	-0.822

Tableau 2. Test des solutions admissibles

zéro, cependant, au moyen d'un seuil à fixer par l'utilisateur, ou en repérant les configurations correspondant aux deux tests d'amplitudes les plus faibles (en valeurs absolues), on retrouve les rapports admissibles :

$$\begin{aligned} a_2/a_3 = 1.937, a_3/a_1 = 0.361, a_1/a_3 = 1.5 \\ b_2/b_3 = 0.492, b_3/b_1 = 1.939, b_1/b_3 = 1 \end{aligned}$$

Bien évidemment, en présence de mesures aberrantes, les coefficients $p_{n_1 \dots n_K}$ peuvent être très imprécis et rendre inopérante la procédure de sélection des racines, ce qui motive le développement d'une approche robuste vis-à-vis de ces mesures aberrantes.

4. APPROCHE ROBUSTE

La première phase de la méthode de caractérisation d'un système à plusieurs modes de fonctionnement a donc consisté à estimer les paramètres d'un modèle unique caractérisant l'ensemble de ces modes (9). En général, la technique des moindres carrés de révèle peu efficace pour cette estimation en présence de mesures aberrantes. Dans cette section, on propose d'utiliser une technique robuste tolérant la présence de ces mesures aberrantes.

4.1. Principe de l'approche robuste

Pour simplifier les notations, le modèle (9) est exprimé sous la forme :

$$\phi\theta = 0 \quad (24)$$

ϕ et θ désignant respectivement le vecteur des régresseurs (dépendant des variables d'état x) et le vecteur des paramètres. Lorsque ϕ est issu de mesures, le modèle (24) est modifié sous la forme :

$$\tilde{\phi}\theta = e \quad (25)$$

où $\tilde{\phi}$ est le vecteur des régresseurs exprimés à partir des mesures et e et l'erreur d'équation qui résulte de la substitution des valeurs vraies du régresseur par les valeurs issues des mesures. Pour les différentes mesures, on a :

$$\tilde{\phi}_k\theta = e_k \quad (26)$$

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que e_k est une réalisation d'une variable aléatoire e_k pouvant recouvrir deux types d'erreur. Le premier type concerne des erreurs de faibles amplitudes centrées autour de l'origine, le second type concerne des grosses erreurs à caractère accidentel non nécessairement de valeurs moyennes nulles. Compte tenu de la présence de ces deux types d'erreur, la loi de distribution de la variable e est choisie sous forme additive dépendant d'un facteur de mélange π ; ainsi pour la composante particulière e_k , correspondant à la k^{me} observation :

$$p(e_k) = \pi p_1(e_k) + (1 - \pi)p_2(e_k) \quad (27)$$

avec les définitions des lois partielles où $\sigma_2 \gg \sigma_1$:

$$p_1(e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e_k}{\sigma_1}\right)^2\right) \quad (28a)$$

$$p_2(e_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{e_k}{\sigma_2}\right)^2\right) \quad (28b)$$

Les paramètres π , σ_1 et σ_2 caractérisent la forme de cette distribution dite contaminée. Le terme π est lié à la proportion de valeurs aberrantes présentes dans les données, une valeur empirique de 0.7 à 0.9 semble convenir pour les essais que nous avons réalisés (de plus, les résultats numériques obtenus semblent assez peu sensibles à ce choix).

Les distributions partielles p_1 et p_2 sont relatives aux erreurs à caractère aléatoire de faibles amplitudes et aux erreurs de type accidentel de fortes amplitudes. Pour distinguer ces deux distributions, on joue sur les écart-types σ_1 et σ_2 , l'idée principale étant de maintenir un rapport de l'ordre de 5 à 10 entre ces deux quantités (ces valeurs pouvant être adaptées par l'utilisateur en fonction de ses données). Notons que ce type de distribution contaminée a été utilisé dans le domaine de la validation des données (Ragot et al., 2005) où l'on s'intéresse à estimer les

variables d'un système et non pas les paramètres. Si l'utilisateur souhaite affiner le choix des paramètres de synthèse π , σ_1 et σ_2 , dans la situation où le nombre d'observations est suffisant, il est également possible de les considérer comme des paramètres à estimer au même titre que ceux du modèle.

Pour l'ensemble des N mesures disponibles, avec l'hypothèse d'indépendance des erreurs de mesure, on définit la fonction de log-vraisemblance de l'échantillon :

$$\mathcal{V} = \sum_{k=1}^N \log(\pi p_1(e_k) + (1 - \pi)p_2(e_k)) \quad (29)$$

La fonction (26) est alors utilisée pour estimer les paramètres du modèle sous la contrainte :

$$\tilde{\phi}_k^T \theta = e_k \quad (30)$$

Notons que si π est pris égal à l'unité, on retrouve le problème des moindres carrés ordinaires. Les estimés sont obtenus en cherchant le maximum de \mathcal{V} par rapport aux paramètres θ du modèle. Ce calcul n'est pas détaillé ici, mais le lecteur peut trouver dans (Ragot et al., 2005) la façon de procéder. Indiquons uniquement que l'estimateur reste du type moindres carrés mais avec pondération indexée sur les erreurs, la pondération des informations étant donnée par :

$$w_k = \frac{\pi \frac{p_1(e_k)}{\sigma_1^2} + (1 - \pi) \frac{p_2(e_k)}{\sigma_2^2}}{\pi p_1(e_k) + (1 - \pi)p_2(e_k)} \quad (31)$$

Cette pondération joue un rôle fondamental dans la procédure d'estimation, car la rend partiellement insensible aux valeurs aberrantes se traduisant par des erreurs e_k importantes. La figure (5) met en évidence l'intérêt de cette fonction particulière. La partie supérieure est relative, de gauche à droite, à w et à p . La partie inférieure montre les mêmes quantités mais évaluées pour une distribution normale ($\pi = 1$). On note en particulier que les poids w_k sont constants pour la méthode des moindres carrés "ordinaires" alors que ces poids décroissent lorsque l'amplitude (en valeur absolue) des erreurs e_k augmente.

On donne la suite des opérations à réaliser pour la mise en œuvre pratique de l'estimation :

- E1 : Constitution de la matrice des données W à partir des régresseur du modèle (9)
- E2 : Initialisation des paramètres θ du modèle (9)
- E3 : calcul du résidu de modèle $e = W\theta$
- E4 : évaluation des distributions partielles (25)
- E5 : évaluation des poids w_k et de la matrice des poids $W = \text{diag}(p_k)$
- E6 : calcul du vecteur propre θ associé à la plus petite valeur propre de W
- E7 : retour en E3 ou stop si convergence de la solution θ atteinte.

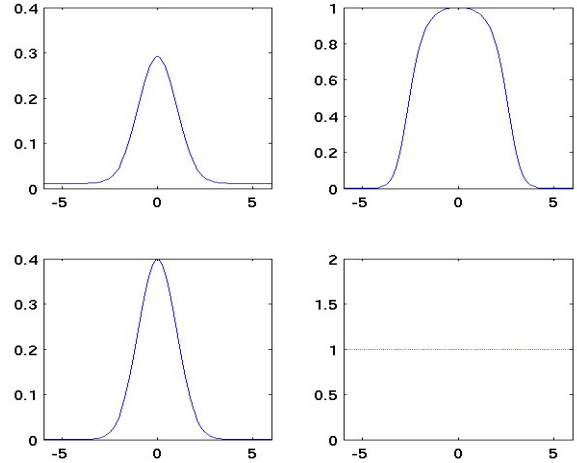


Figure 5. Poids

4.2. Application

A titre d'exemple, considérons les données obtenues à partir du système :

$$\phi^T \theta = 0 \quad (32)$$

avec $\phi^T = (y \ x \ 1)$, $\theta = (a \ b \ c)$

La figure (6) visualise les 42 données utilisées dont 10 sont des valeurs aberrantes, la représentation étant faite dans le plan $\{x, y\}$. Le nuage de point fait apparaître clairement deux régimes de fonctionnement que l'on souhaite caractériser.

Les deux modèles locaux identifiés sans utiliser l'approche robuste sont représentés à la partie supérieure de la figure (7) tandis que les deux modèles locaux identifiés avec l'approche robuste sont représentés à la partie inférieure de cette même figure. Pour cette identification, les paramètres de synthèse de la loi de distribution ont été arbitrairement fixés à $\pi = 0.8$, $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = 10$ sachant que la sensibilité des résultats vis-à-vis de ces deux derniers paramètres est très faible (des variations de 50 pour-cent de ces valeurs sont admissibles).

Les poids montrant clairement les observations aberrantes sont représentés à la figure (8). Ainsi, les données aberrantes sont en grande partie écartées de la procédure d'identification, mais, dans le cadre d'une application orientée diagnostic cette approche permet aussi de détecter et localiser les données aberrantes.

Pour les deux stratégies (moindres carrés ordinaire MCO et moindres carrés robustes MCR), les paramètres identifiés des deux modèles locaux sont rassemblés dans la table (3) et sont à comparer aux valeurs vraies.

On constate que l'approche non robuste se révèle inefficace (pour des données dont certaines sont aberrantes)

Param. vrais	MCO	MCR
1	-1	-1
-2	-4.0125	-1.9394
-4	-9.2454	-3.9789
1	-1	1
-6	-5.5279	-6.3277
-1	-2.3055	-1.0470

Tableau 3. Paramètres estimés

pour estimer correctement les paramètres de ce système à deux modes de fonctionnement.

Cet exemple, quoique de dimension réduite, montre bien l'aptitude de l'approche proposée à identifier un système à plusieurs modes de fonctionnement et ceci en présence de valeurs aberrantes. Bien évidemment, il resterait à préciser le nombre de valeurs aberrantes que l'on peut tolérer tout en garantissant la qualité de l'estimation.

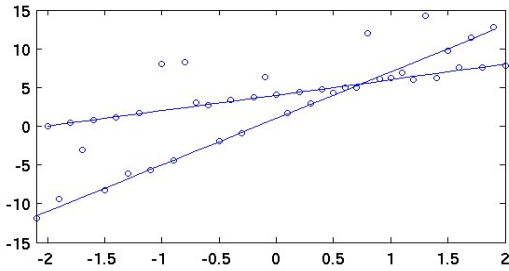


Figure 6. Données

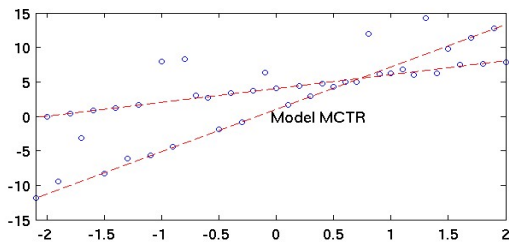
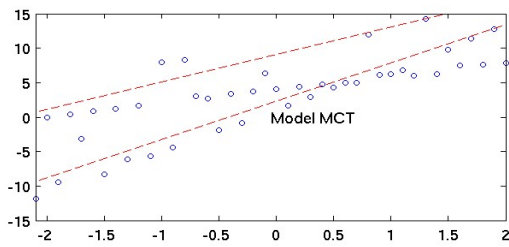


Figure 7. Résultats de l'identification

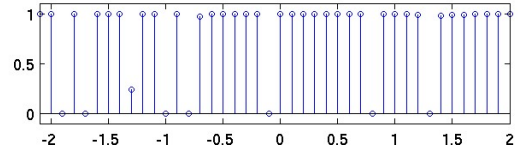


Figure 8. Pondérations

5. CONCLUSION

Bien que présentée avec une structure particulière de modèle (structure linéaire), l'approche proposée permet d'identifier une classe importante de systèmes caractérisés par deux modes de fonctionnement, l'extension à p modes de fonctionnement étant directe. Cette identification est effectuée à partir des mesures des variables du système sans connaissance a priori de l'appartenance de chaque donnée à un mode de fonctionnement particulier. De plus, l'aspect robustesse permet de prendre en compte la présence de valeurs de mesures aberrantes. D'un point de vue pratique, cette situation est assez réaliste, l'acquisition de mesures sur un système s'accompagnant très généralement de valeurs aberrantes, dues au système de mesure lui-même, aux perturbations affectant le système, aux erreurs humaines de manipulation de données.

Pour étendre la portée de cette proposition, il conviendra par la suite d'examiner le cas de modèles non linéaires. De plus, un problème actuellement mal résolu est celui de la détermination simultanée du nombre de modes de fonctionnement et de la structure des modèles associés à ces différents modes.

Annexe A. Système à deux modes de fonctionnement et nombre quelconque de variables d'état

On formule ici la résolution du problème d'inversion, permettant de déduire les paramètres des modèles locaux en fonction de ceux du modèle global. On se limite à deux modèles locaux, de degrés quelconques. L'identité des formes (8) et (9) conduit aux égalités :

$$\begin{cases} p_{2000..000} &= a_1 b_1 \\ p_{1100..000} &= a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ p_{1010..000} &= a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ p \dots & \\ p_{1000..001} &= a_1 b_K + a_K b_1 \end{cases} \quad (33)$$

$$\begin{cases} p_{0200..000} &= a_2 b_2 \\ p_{0110..000} &= a_2 b_3 + a_3 b_2 \\ p_{0101..000} &= a_2 b_4 + a_4 b_2 \\ p \dots & \\ p_{0100..001} &= a_2 b_K + a_K b_2 \end{cases} \quad (34)$$

...

$$\begin{cases} p_{0000..2000} = a_{K-3}b_{K-3} \\ p_{0000..1100} = a_{K-3}b_{K-2} + a_{K-2}b_{K-3} \\ p_{0000..1010} = a_{K-3}b_{K-1} + a_{K-1}b_{K-3} \\ p_{0000..1001} = a_{K-3}b_K + a_Kb_{K-3} \end{cases} \quad (35)$$

$$\begin{cases} p_{0000..200} = a_{K-2}b_{K-2} \\ p_{0000..110} = a_{K-2}b_{K-1} + a_{K-1}b_{K-2} \\ p_{0000..101} = a_{K-2}b_K + a_Kb_{K-2} \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} p_{0000..020} = a_{K-1}b_{K-1} \\ p_{0000..011} = a_{K-1}b_K + a_Kb_{K-1} \end{cases} \quad (37)$$

$$\begin{cases} p_{0000..002} = a_Kb_K \end{cases} \quad (38)$$

Par élimination des coefficients b_i , on déduit de ce système d'équations :

$$\begin{cases} p_{110..00} = p_{0200..0} \frac{a_1}{a_2} + p_{200..00} \frac{a_2}{a_1} \\ p_{101..00} = p_{0020..0} \frac{a_1}{a_3} + p_{200..00} \frac{a_3}{a_1} \\ p_{100..01} = p_{0000..2} \frac{a_1}{a_K} + p_{200..00} \frac{a_K}{a_1} \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} p_{0110..0} = p_{0020..0} \frac{a_2}{a_3} + p_{0200..0} \frac{a_3}{a_2} \\ p_{0101..0} = p_{0002..0} \frac{a_2}{a_4} + p_{0200..0} \frac{a_4}{a_2} \\ p_{0100..1} = p_{0000..2} \frac{a_2}{a_K} + p_{0200..0} \frac{a_K}{a_2} \\ \dots \end{cases} \quad (40)$$

$$\begin{cases} p_{00..11} = p_{000..2} \frac{a_{K-2}}{a_{K-1}} + p_{00..20} \frac{a_{K-1}}{a_{K-2}} \\ p_{00..11} = p_{000..2} \frac{a_{K-2}}{a_K} + p_{00..20} \frac{a_K}{a_{K-2}} \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{cases} p_{00..11} = p_{000..2} \frac{a_{K-1}}{a_K} + p_{00..20} \frac{a_K}{a_{K-1}} \end{cases} \quad (42)$$

On déduit de (39), les rapports a_1/a_2 , a_1/a_3 , \dots , a_1/a_K , de (40) les rapports a_2/a_3 , a_2/a_4 , a_2/a_K , de (42) le rapport a_{K-1}/a_K . Pour chaque équation à résoudre, deux solutions sont obtenues. Il est simple de montrer que l'une des solutions correspond à un rapport a_i/a_j et l'autre au rapport b_i/b_j . Il reste à attribuer correctement les racines de chaque équation soit à la série des rapports a_i/a_j soit à celle des rapports b_i/b_j . Pour cela, il suffit de se servir des équations reliant entre eux ces rapports. En effet, ces rapports ne sont pas indépendants, et en particulier (par exemple pour les rapports a_i/a_j , on note que :

$$\begin{cases} \frac{a_1}{a_2} \frac{a_2}{a_3} \frac{a_3}{a_1} - 1 = 0 \\ \dots = 0 \\ \frac{a_1}{a_2} \frac{a_2}{a_3} \dots \frac{a_K}{a_1} - 1 = 0 \end{cases} \quad (43)$$

$$\begin{cases} \frac{a_2}{a_3} \frac{a_3}{a_4} \frac{a_4}{a_2} - 1 = 0 \\ \dots = 0 \\ \frac{a_2}{a_3} \frac{a_3}{a_4} \dots \frac{a_K}{a_2} - 1 = 0 \end{cases} \quad (44)$$

$$\begin{cases} \dots = 0 \end{cases} \quad (45)$$

$$\begin{cases} \frac{a_{K-2}}{a_{K-1}} \frac{a_{K-1}}{a_K} \frac{a_K}{a_{K-2}} - 1 = 0 \end{cases} \quad (46)$$

La satisfaction des contraintes (46) permet alors de sélectionner les solutions admissibles (voir exemple de la section 3).

Annexe B. Système à trois variables d'état et trois de modes de fonctionnement. Idée sur la généralisation à un nombre quelconque de modes de fonctionnement

Le modèle du système est pris sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$f(x) = (a_1^T x)(a_2^T x)(a_3^T x) = 0 \quad (47)$$

$$\begin{aligned} a_i^T &= (a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}) \\ x^T &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \end{aligned}$$

$$f(x) = \sum_{n_1 \ n_2 \ n_3} p_{n_1 n_2 n_3} x_1^{n_1} x_2^{n_2} x_3^{n_3} \quad (48)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = 3, \quad 0 \leq n_j \leq 3, \quad j = 1 \dots 3$$

En identifiant les deux formes (47) et (48), on obtient le système d'équations :

$$p_{300} = a_{11}a_{21}a_{31} \quad (49)$$

$$p_{210} = a_{11}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{31} \quad (50)$$

$$p_{201} = a_{11}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{31} \quad (51)$$

$$p_{120} = a_{11}a_{22}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{22}a_{31} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} p_{111} &= a_{11}(a_{22}a_{33} + a_{23}a_{22}) + \\ & a_{12}(a_{21}a_{33} + a_{23}a_{31}) + \\ & a_{13}(a_{21}a_{32} + a_{22}a_{31}) \end{aligned} \quad (53)$$

$$p_{102} = a_{11}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{31} \quad (54)$$

$$p_{030} = a_{12}a_{22}a_{32} \quad (55)$$

$$p_{021} = a_{12}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{32} \quad (56)$$

$$p_{012} = a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{23}a_{32} \quad (57)$$

$$p_{003} = a_{13}a_{23}a_{33} \quad (58)$$

Le principe de résolution permettant d'expliciter les paramètres a des modèles locaux en fonction des paramètres p du modèle global généralise celui de la section 3.

Tout d'abord, on déduit des équations (55) à (58), des relations sur les deux derniers paramètres des trois modèles :

$$\frac{p_{021}}{p_{030}} = \frac{a_{33}}{a_{32}} + \frac{a_{23}}{a_{22}} + \frac{a_{13}}{a_{12}} \quad (59)$$

$$\frac{p_{012}}{p_{030}} = \frac{a_{23}}{a_{22}} \frac{a_{33}}{a_{32}} + \frac{a_{13}}{a_{12}} \frac{a_{33}}{a_{32}} + \frac{a_{13}}{a_{12}} \frac{a_{23}}{a_{22}} \quad (60)$$

$$\frac{p_{003}}{p_{030}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} \frac{a_{23}}{a_{22}} \frac{a_{33}}{a_{32}} \quad (61)$$

Ainsi, les rapports a_{33}/a_{32} , a_{23}/a_{22} et a_{13}/a_{12} sont solutions de l'équation du troisième degré :

$$\alpha^3 + \frac{p_{021}}{p_{030}} \alpha^2 + \alpha \frac{p_{012}}{p_{030}} + \frac{p_{003}}{p_{030}} = 0 \quad (62)$$

De même, à partir des relations (49), (50), (52) et (55), on obtient les relations entre les premier et deuxième paramètres des modèles :

$$\frac{p_{210}}{p_{300}} = \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \quad (63)$$

$$\frac{p_{120}}{p_{300}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{a_{22}}{a_{21}} \quad (64)$$

$$\frac{p_{030}}{p_{300}} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \frac{a_{22}}{a_{21}} \frac{a_{32}}{a_{31}} \quad (65)$$

Ainsi, les rapports a_{32}/a_{31} , a_{22}/a_{21} et a_{12}/a_{11} sont solutions de l'équation du troisième degré :

$$\alpha^3 + \frac{p_{210}}{p_{300}} \alpha^2 + \alpha \frac{p_{120}}{p_{300}} + \frac{p_{030}}{p_{300}} = 0 \quad (66)$$

Puis, à partir des relations (49), (51), (54) et (58), on obtient les relations entre les premier et troisième paramètres des modèles :

$$\frac{p_{201}}{p_{300}} = \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \quad (67)$$

$$\frac{p_{102}}{p_{300}} = \frac{a_{23}}{a_{21}} \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{a_{23}}{a_{21}} \quad (68)$$

$$\frac{p_{003}}{p_{300}} = \frac{a_{13}}{a_{11}} \frac{a_{23}}{a_{21}} \frac{a_{33}}{a_{31}} \quad (69)$$

Ainsi, les rapports a_{33}/a_{31} , a_{23}/a_{21} et a_{13}/a_{11} sont solutions de l'équation du troisième degré :

$$\alpha^3 + \frac{p_{201}}{p_{300}} \alpha^2 + \alpha \frac{p_{102}}{p_{300}} + \frac{p_{003}}{p_{300}} = 0 \quad (70)$$

Pour chaque équation à résoudre (62), (66), (70), trois solutions sont obtenues. Il est simple de montrer que l'une des solutions correspond à un rapport a_{1i}/a_{1j} , l'autre au rapport a_{2i}/a_{2j} , la troisième au rapport a_{3i}/a_{3j} . Cependant, il reste à attribuer correctement les racines de chaque équation soit à la série des rapports a_{3i}/a_{3j} soit à celle des

rapports a_{1i}/a_{1j} . Pour cela, il suffit de se servir des équations reliant entre eux ces rapports. En effet, ces rapports ne sont pas indépendants, et en particulier (par exemple pour les rapports a_{ij}/a_{jk}), à partir des définitions (61), (65) et (69), on note que :

$$\frac{p_{003}}{p_{020}} \frac{p_{030}}{p_{300}} \frac{p_{300}}{p_{003}} - 1 = 0$$

Le lecteur, sur la base de cette procédure, pourra considérer le cas d'un nombre quelconque de modes de fonctionnement.

REFERENCES

- Bemporad A., J. Roll and L. Ljung, 2001. Identification of hybrid systems via mixed-integer programming. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 786-792.
- Breiman L., 1993. Hinging hyperplanes for regression, classification and function approximation. *IEEE Transactions on Information Theory*, 39 (3), p. 999-1013.
- Dempster A.P., N. M. Laird and D. B. Rubin, 1977. Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm", *Journal of Royal Statistical Society, Series B* 39, p. 1-38.
- Ding Z. and L. Hong, 1997. An interactive multiple model algorithm with a switching markov chain. *Math. Comput. Modelling*, 25 (1), p. 1-9.
- Domlan E.A., J. Ragot and D. Maquin, 2007. Systèmes à commutation : recherche du mode actif, identification de la loi de commutation. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*, 41 (1), p. 7-30.
- Ferrari-Trecate G., M. Muselli, D. Liberati and M. Morari, 2001. Identification of piecewise affine and hybrid systems. *Proceedings of the american control conference*, p. 3521-3526.
- Firoiu L. *Segmenting time series with a hybrid neural networks - hidden markov model*. American Association for Artificial Intelligence. www.aaii.org
- Gasso G., G. Mourot and J. Ragot, 2001. Structure identification in multiple model representation : elimination and merging of local models. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, Floride.
- Goldfeld S.M. and R.E. Quandt, 1973. A Markov model for switching regression. *Journal of econometrics*, 1, p. 3-16.
- Hocine A., M. Chadli M, D. Maquin and J. Ragot, 2006. A discrete-time sliding window observer for Markovian

- switching system". *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, December 13-15.
- Hudson D.J., 1966. Finding segmented curves whose join points have to be estimated. *Journal of the american statistical association*, 61, p. 1097-1129.
- Juloski A., W.P.M. Heemels and G. Ferrari-Trecate, 2003. Identification of an industrial hybrid system. *Proceedings of the IFAC Conference on Analysis and Design of Hybrid Systems*, 16-18 June, Saint-Malo, France.
- Kim C.J., J.M. Piger and R. Startz, 2003. Estimation of Markov Regime-Switching Regression Models with Endogenous Switching. *Economic Research, Federal Reserve Bank of St.Louis*.
- Mihaylova L., V. Lampaert, H. Bruyninckx and J. Sweters, 2001. Hysteresis functions identification by multiple model approach. *International Conference MFI*, Baden-Baden.
- Murray-Smith R. and T.A. Johansen, 1997. Multiple model approach in modelling and control. Taylor and Francis.
- Ploix S., O. Adrot and J. Ragot, 1999. Parameter uncertainty computation in static linear model. *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Pucar P. and J. Sjöberg, 1988. On the hinge finding algorithm for hinging hyperplanes. *IEEE Transactions of Information Theory*, 44 (3), p. 1310-1319.
- Quandt R.E. The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. *Journal of the american statistical association*, p. 873-880, 1958.
- Ragot J., M. Chadli and D. Maquin, 2005. Mass balance equilibration : a bilinear case with a robust approach using contaminated distribution. *AIChE Journal*, 51 (5), p. 1569-1575.
- Rousseeuw P.J., 1987. Silhouettes : a Graphical Aid to the Interpretation and Validation of Cluster Analysis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 20.
- Verdult V. and M. Verhaegen, 2001. Identification of a weighted combination of multivariable local linear state-space systems from input and output data. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, p. 4760-4765.
- Vivarelli F. and C.K.I. Williams, 1999. Discovering hidden features with gaussian processes regression. *Advances in neural information processing systems*, 11, Eds. Kearns M.J., Solla S.A., Cohn D.A., MIT Press.
- Yu J.R., G.H. Tzeng and H.L. Li, 2001. General fuzzy piecewise regression analysis with automatic change point detection. *Fuzzy Sets and Systems*, 119, p. 247-257.
- Vidal R., Yi Ma and S. Sastry, 2003. Generalized principal component analysis (GPCA). *IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, CVPR.