

CONTRIBUTION AU DÉVELOPPEMENT D'UN PLAN D'EXPLOITATION ET DE MAINTENANCE OPTIMAL, POUR LE DOMAINE NAVAL, BASÉ SUR UNE LOI DE DÉGRADATION ÉVOLUTIVE

J. SCHUTZ, N.REZG

Laboratoire de Génie Industriel et Production
Mécanique (LGIPM)
Équipe Systèmes de Production (Sdp)
Université Paul Verlaine – Metz
schutz@univ-metz.fr, rezg@univ-metz.fr

J.-B. LÉGER

PREDICT
2, rue Carnot - BP 305
54 515 VANDOEUVRE LES NANCY Cedex
jean-baptiste.leger@predict.fr

RÉSUMÉ : Dans ce papier, nous abordons la modélisation de la loi de défaillance d'un dispositif afin de tenir compte des conditions opérationnelles et environnementales qui peuvent varier au cours du temps. La loi de défaillance suit un modèle de Cox où les paramètres sont estimés à partir d'un raisonnement par logique floue. L'objectif de cet article consiste à déterminer conjointement un plan d'exploitation optimal accompagné par une politique de maintenance optimale.

MOTS-CLÉS : politique de maintenance, pronostic, logique floue, modèle de Cox.

1. INTRODUCTION

La majorité des systèmes sont conçus pour fonctionner sous diverses conditions, tant au niveau opérationnel qu'au niveau environnemental. Cependant, dans les modèles de maintenance que l'on retrouve dans la littérature, la quasi-totalité d'entre eux suppose que le système maintenu fonctionne toujours dans des conditions fixes données.

Dans ces modèles, la loi de défaillance demeure ainsi identique durant toute la durée de vie. En effet, la loi de défaillance est généralement obtenue par des essais statistiques, conduits en laboratoire sous des conditions nominales. Süleyman Özekici (1995) propose de prendre en considération un âge intrinsèque du système plutôt que l'âge réel, afin de représenter les effets de conditions environnementales aléatoires. Martorell et al. (1999) utilisent un modèle de vie accélérée afin de tenir compte et de modéliser les conditions opérationnelles qui peuvent varier au cours du cycle de vie du dispositif.

Dans le domaine naval, lorsqu'un navire quitte le quai, il s'engage à réaliser un ensemble de missions sur un horizon de temps fini. On définit le plan d'exploitation comme une suite ordonnée des missions à réaliser durant ce temps. Bien entendu, pour un plan d'exploitation, le navire n'effectue pas forcément toujours le même type de missions. Il peut effectuer différentes missions d'ordres :

- militaire : dissuasion nucléaire, démonstration de force, projection de puissance contre la terre ou contre d'autres unités navales...
- diplomatique : escale officielle de représentation, soutien au commerce extérieur et à l'exportation d'armement...

- de service public : secours et sauvetage en mer, lutte contre la pollution, océanographie...

À chaque mission correspondent donc des conditions propres. Qu'il s'agisse de dissuasion nucléaire ou d'océanographie, les conditions opérationnelles (solicitations du type vitesses, accélérations) sont totalement différentes. De plus, pour une même mission, suivant la zone géographique où elle est exécutée, les conditions environnementales (ondes électromagnétiques, conditions climatiques) varient. Bien que l'occurrence des pannes dépende de l'usage du système, l'ordre d'exécution des missions intervient également dans le processus de dégradation à travers les changements, plus ou moins brutaux, des conditions opérationnelles et/ou environnementales. Pour chaque plan d'exploitation envisageable, il apparaît clairement que la loi de défaillance varie. Dans la majorité des cas, la loi de défaillance tient compte uniquement de l'historique du navire. Si nous considérons seulement l'historique du navire, ou celui de l'ensemble des navires constituant la flotte, l'ordre de réalisation des missions n'aurait aucune influence sur l'apparition des pannes.

À partir de la loi de défaillance, il est alors possible de déterminer les dates optimales pour lesquelles des actions de maintenance devraient être réalisées afin d'avoir les coûts de maintenance minimums.

L'objectif recherché par ce travail est double. Il consiste à modéliser la loi de défaillance globale du navire, afin de prendre en considération l'historique, mais également les missions à venir. Ensuite, nous chercherons à déterminer le plan d'exploitation optimal pour lequel les coûts de maintenances seront minimaux en comparant

deux politiques de maintenance couplées au plan d'exploitation.

Le reste du papier est organisé comme suit : la section 2 donne une description du système étudié et présente les politiques adoptées de gestion de la maintenance. La section 3 présente la méthodologie utilisée, afin de déterminer la loi de défaillance, illustrée par un exemple. La section 4 illustre la comparaison de deux politiques de maintenance π^0 et π^1 . La conclusion est présentée à la section 5.

2. LA PROBLÉMATIQUE

Le papier considère un navire soumis à des défaillances dépendantes des missions à réaliser. Nous considérons un modèle de maintenance dans lequel une maintenance préventive est réalisée, dès lors que le navire retourne à quai, soit après la réalisation du plan d'exploitation. Cette maintenance préventive permet de restaurer le navire dans un état « as good as new ». Durant la période en mer, des maintenances préventives peuvent être réalisées. Étant donné que ces actions de maintenances sont réalisées pendant la réalisation des missions, on estime qu'elles sont de types imparfaits, et par conséquent, retournent le système dans un état entre « as good as new » et « as bad as old ». Ces maintenances ont pour but de réduire l'occurrence des pannes et ainsi, de garantir que le navire fonctionne sans panne jusqu'à la fin. Lors de panne immobilisante, le navire subit des actions de maintenances correctives qui ont pour but de le remettre en état, sans pour autant l'améliorer. Les réparations associées à la maintenance corrective sont donc minimales et retournent donc le navire dans l'état « as bad as old ».

La première politique de maintenance étudiée, notée π^0 , est une politique minimaliste. Lorsque des pannes surviennent pendant l'exécution des missions, le navire reçoit des actions de maintenance minimale. Dans ce cas, le niveau de fiabilité après réparation n'est pas celui du neuf, mais garde le même niveau qu'il avait avant la défaillance « As Bad As Old ». En corollaire, le taux de défaillance reste également au même niveau. Le navire subit une maintenance le remettant dans un état « As Good As New », uniquement lorsqu'il est de retour à quai. Aucune action de maintenance préventive n'est réalisée pendant que le navire réalise le plan d'exploitation.

La seconde politique de maintenance, notée π^1 , est une politique améliorée par rapport à la politique π^0 dans la mesure où le navire reçoit, en plus, des actions de maintenance préventive en mer. Bien entendu, cette maintenance préventive sera imparfaite. En effet, il est raisonnable de penser que la maintenance a un effet plus que minimal, c'est-à-dire que le système après maintenance est meilleur que précédemment (Better than old). Pour autant, il est peu vraisemblable que la maintenance réalisée en mer remette le système à neuf.

Le système après maintenance est donc moins bon que neuf (Worse than new). La réalisation des maintenances préventives imparfaites est représentée par une diminution du taux de défaillance basé sur le modèle ARA_1 (Réduction Arithmétique de l'Âge). Lorsque la qualité de la maintenance prend la valeur 0, la maintenance est considérée comme minimale. Au contraire, pour la valeur 1, la maintenance est considérée comme parfaite.

Dans la suite de l'article, nous utilisons les hypothèses suivantes :

- Les différentes actions de maintenances sont effectuées durant la réalisation des missions.
- La loi de défaillance est définie uniquement par les pannes ayant engendré un arrêt global du navire. Elle intègre donc les arrêts liés aux différentes défaillances pouvant survenir sur le navire tant au niveau mécanique, électrique, etc.
- Les coûts des actions de maintenance sont connus. Le coût des maintenances préventives réalisées en mer (C_{mp}) est strictement inférieur au coût de maintenance préventive ayant lieu au retour à quai (C_{MP}). Enfin, les coûts de maintenances correctives (C_{MC}) sont strictement supérieurs aux deux coûts précédents.

3. DÉTERMINATION DE LA LOI DE DÉFAILLANCE

Comme indiqué dans la première section, la loi de défaillance est dynamique, c'est-à-dire qu'elle dépend des missions réalisées. Il s'agit donc de déterminer la loi de panne en se basant sur une approche de pronostic. D'après Byington et al. (2003), le processus de pronostic peut être divisé en trois catégories. La première approche est basée sur un modèle physique, ce qui suppose qu'une représentation mathématique du mécanisme de dégradation est disponible. La seconde approche, guidée par les données, est basée sur l'exploitation de symptômes ou indicateurs de la dégradation dont l'évolution future est déterminée par des méthodes statistiques. La dernière approche, basée sur l'expérience, est employée lorsqu'il est trop difficile d'élaborer un modèle physique ou qu'aucun dispositif de suivi de l'état des dégradations n'est opérationnel.

Dans notre cas, l'approche guidée par les données ne peut être utilisée car le plan d'exploitation et de maintenance doivent être déterminés avant le départ du navire. Devant l'impossibilité de modéliser physiquement le navire, notre choix s'est porté sur un pronostic basé sur l'expérience. Le modèle de Cox permet d'établir une relation paramétrique entre les facteurs de risques de défaillances et la distribution des temps de bon fonctionnement. La méthode repose principalement sur l'hypothèse de risques proportionnels, qui suppose que chaque facteur influe sur la durée de vie de façon constante au cours du temps. Deux facteurs influant sur le risque de défaillances peuvent être utilisés pour représenter les missions. Le

premier facteur, noté z_1 , modélisera les conditions opérationnelles tandis que le second facteur, noté z_2 , précisera les conditions environnementales. À chaque facteur de risques z_i ($i = 1,2$) est associé un coefficient de pondération b_i ($i = 1,2$). Ce coefficient quantifie l'influence du facteur de risque de défaillances sur le comportement du système, et doit donc être estimé d'après l'historique. Ces coefficients de pondération sont calculés en maximisant la vraisemblance de Cox (vraisemblance partielle). Néanmoins, cette méthode nécessite de déterminer, au préalable, des niveaux de sévérité associés aux facteurs de risques de défaillances. Ces niveaux de sévérité permettent de classer les conditions opérationnelles et environnementales en quelques catégories. Nous avons choisi d'organiser les facteurs de risques suivant trois niveaux de sévérité, c'est-à-dire que ces facteurs pourront prendre trois valeurs possibles. Ces niveaux de sévérité sont :

- $z_1=0$ ou $z_2=0$. Il s'agit de l'état nominal correspondant à l'environnement de base.
- $z_1=1$ ou $z_2=1$. Ce niveau représente un état nominal +, c'est-à-dire des sollicitations plus importantes ou un environnement plus agressif.
- $z_1=2$ ou $z_2=2$. À ce niveau, représenté par un état nominal ++, les conditions sont plus influentes qu'à l'état nominal +.

La méthode de Cox impose qu'à chaque date de défaillance, soient associés des facteurs de risques. Or, comme nous l'avons vu précédemment, à un temps de bon fonctionnement, peuvent correspondre différents niveaux de sévérité par facteurs influant sur l'occurrence des défaillances. Il est donc indispensable de déterminer, pour chaque temps de bon fonctionnement, une valeur moyenne propre à chaque facteur de risque de défaillance, représentant ainsi une mission équivalente. Cette mission doit représenter les missions réalisées durant le dernier intervalle de fonctionnement en tenant compte des durées respectives à chaque mission. Par exemple, une mission où les facteurs sont $z_1=2$ et $z_2=0$ de durée faible, sera-t-elle plus influente qu'une mission où les facteurs sont $z_1=1$ et $z_2=1$ et de durée plus importante ? Comme la logique floue présente l'intérêt de fournir un formalisme logique pour tenir compte des incertitudes nous avons opté pour ce type de raisonnement afin d'apporter une réponse à cette problématique.

3.1. Détermination des niveaux de sévérité des missions équivalentes

Dans un modèle de logique floue, les nombres d'entrées, de sorties et de règles sont fixés à l'avance. Hors, l'arrivée d'une panne est stochastique. Elle ne se produit pas après un nombre fixe de missions accomplies. Pour pallier ce problème, nous avons choisi de calculer cette mission équivalente par mode glissant.

Pour être plus précis, si la panne est survenue après ou au cours de la première mission, les facteurs de la mission équivalente seront identiques aux facteurs de la

mission durant laquelle la panne s'est produite. Si le navire tombe en panne à partir de la deuxième mission, nous déterminons ces facteurs moyens grâce à la logique floue. La méthodologie consiste à déterminer une mission équivalente à partir des deux premières missions exécutées. Pour chaque mission supplémentaire, ayant été réalisée durant l'intervalle de bon fonctionnement, nous déterminons une nouvelle mission équivalente, compte tenu de cette mission, ainsi que la mission générée précédemment. De façon similaire, la durée de la mission équivalente est déterminée en calculant la moyenne arithmétique entre la durée de la mission et la durée de la mission équivalente. Ce processus est réitéré jusqu'à ce que toutes les missions aient participé à la détermination des facteurs d'environnement \bar{z}_1 et \bar{z}_2 de la mission équivalente. Les facteurs \bar{z}_1 et \bar{z}_2 sont calculés séparément par la logique floue.

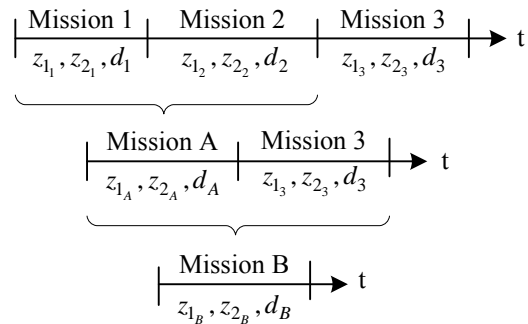


Figure 1. Détermination des missions équivalentes

Le principe de la logique floue peut être divisé en trois parties. Ces trois parties sont la fuzzyfication (définition des entrées et sorties et définition des fonctions d'appartenance des variables), la création des règles d'inférences, ainsi que la defuzzyfication.

3.1.1. Fuzzyfication

Notre modèle de logique floue, faisant intervenir les missions deux par deux, est constitué de quatre entrées et d'une sortie. Parmi ces entrées, deux concernent une mission m , tandis que les deux autres entrées concernent la mission suivante, notée $m+1$:

- z_{im} , niveau de sévérité du facteur d'environnement z_i ($i = 1,2$) de la mission m ;
- d_m , durée de la mission m ;
- z_{im+1} , niveau de sévérité du facteur d'environnement z_i ($i = 1,2$) de la mission $m+1$;
- d_{m+1} , durée de la mission $m+1$;

et d'une sortie \bar{z}_i , ($i = 1,2$), qui représente le niveau de sévérité du facteur d'environnement z_i ($i = 1,2$) de la mission équivalente.

Les variables linguistiques associées aux entrées z_{im} et z_{im+1} , sont décomposées en trois ensembles N (nominal), $N+$ (nominal +) et $N++$ (nominal ++) qui sont définis par des fonctions d'appartenance similaire. D'après les

niveaux de sévérité fixés préalablement, les valeurs des entrées z_{im} et z_{im+1} appartiennent à l'intervalle $[0 ; 2]$.

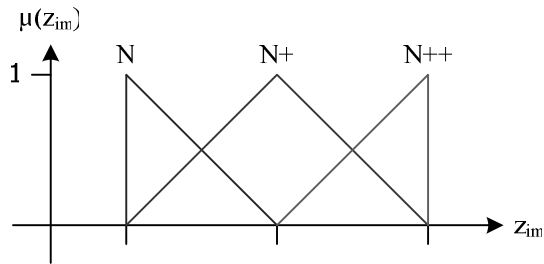


Figure 2. Fonction d'appartenance pour les entrées z_{im}

Concernant les entrées d_m et d_{m+1} , les variables linguistiques sont constituées de trois ensembles C (durée Courte), M (durée Moyenne), L (durée Longue) définis par deux fonctions d'appartenance identiques.

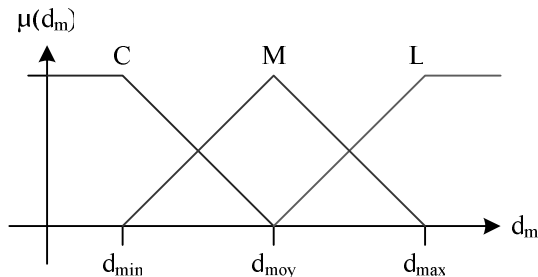


Figure 3. Fonction d'appartenance pour les entrées d_m

Les durées étant propres à chaque mission, une mission est considérée comme strictement courte jusqu'à d_{min} et comme strictement longue à partir de d_{max} .

La variable linguistique associée à la sortie \bar{z}_i est composée de trois ensembles N (nominal), N+ (nominal +) et N++ (nominal ++) définis par une fonction d'appartenance identique à celle des entrées z_{im} et z_{im+1} .

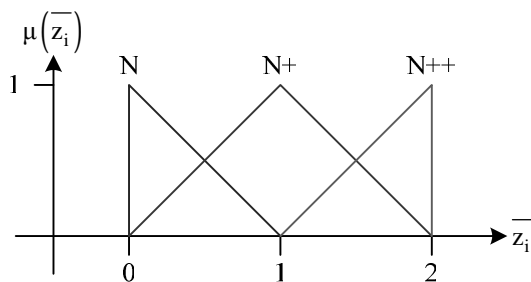


Figure 4. Fonction d'appartenance pour la sortie \bar{z}_i

3.1.2. Création des règles d'inférences

Dans cette étape, les règles du style « Si A et B..., alors C... » sont déterminées. Notre cas, constitué de quatre entrées et d'une sortie, se compose de 81 règles. Ces règles peuvent être organisées à l'intérieur d'une matrice (FAM : Fuzzy Associative Memory) dans laquelle les variables d'entrées concernant la première mission correspondent aux noms des colonnes et où les variables

d'entrées relatives à la seconde mission sont représentées par les noms des lignes.

		Mission m										
		N			N+			N++				
		C	M	L	C	M	L	C	M	L		
Mission m+1	N	C	N	N	N	N	N+	N+	N+	N+	N+	N++
		M	N	N	N	N	N	N+	N+	N+	N+	N+
		L	N	N	N	N	N	N	N	N	N+	N+
	N+	C	N	N	N	N+	N+	N+	N++	N++	N++	N++
		M	N+	N	N	N+	N+	N+	N+	N++	N++	N++
		L	N+	N+	N	N+	N+	N+	N+	N+	N+	N++
	N++	C	N+	N+	N	N++	N+	N+	N++	N++	N++	N++
		M	N+	N+	N+	N++	N++	N+	N++	N++	N++	N++
		L	N++	N+	N+	N++	N++	N++	N++	N++	N++	N++

Tableau 1. Matrice représentant les règles d'inférences pour les facteurs d'environnement \bar{z}_i

Comme nous pouvons le voir à travers le tableau 1, la matrice est symétrique, c'est-à-dire que la sortie ne dépend pas de l'ordre des deux missions, mais des caractéristiques intrinsèques de celles-ci.

À travers ce modèle de logique floue, le chevauchement des fonctions d'appartenance peut conduire jusqu'à l'activation simultanée de 16 règles. L'inférence floue utilisée est de type « min – max ».

3.1.3. Défuzzification

La défuzzification est l'opposé de la fuzzyfication par le fait qu'elle transforme la sortie floue en une valeur représentant le niveau de sévérité, basée sur les règles d'inférences. La méthode du centre de gravité est ici utilisée afin de calculer la valeur du niveau de sévérité des facteurs d'environnement. La méthode des centroïdes est préférée aux autres méthodes de défuzzification car elle est considérée comme plus précise. En effet, elle prend en compte l'influence de l'ensemble des valeurs proposées par la solution floue.

Ce principe de logique floue est appliqué séparément pour déterminer les facteurs de risques modélisant les conditions opérationnelles et les conditions environnementales. L'utilisation récursive de la logique floue pour déterminer les paramètres \bar{z}_i , en prenant en compte toutes les missions, permet aux nouvelles missions utilisées pour le calcul d'être plus influentes par rapport aux précédentes.

Il est ainsi possible de déterminer un historique, composé de missions moyennes de paramètres \bar{d} , \bar{z}_1 et \bar{z}_2 , représentant les différents temps de bon fonctionnement.

3.1.4. Exemple d'application

Afin d'illustrer la démarche présentée, nous allons déterminer les coefficients de risque pour les conditions opérationnelles et environnementales pour un temps de bon fonctionnement constitué par la réalisation de trois missions.

Mission	Durée	z1	z2
1	40	1	1
2	76	1	0
3	11	2	0

Tableau 2. Matrice des missions utilisées pour la détermination des coefficients de risques

Notre temps de bon fonctionnement étant formé de trois missions, nous allons dans un premier temps déterminer une mission A (établie à partir des missions 1 et 2), puis dans un second temps, une mission B résultant de l'application de la logique floue aux missions A et 3.

Pour la suite, nous posons :

- d_{\min} : 50 ut
- d_{moy} : 70 ut
- d_{\max} : 90 ut.

La détermination du coefficient \bar{z}_{1A} résulte de l'utilisation de deux règles d'inférences :

Si $(z_{1m}, N+)$ et (d_m, C) et $(z_{1m+1}, N+)$ et (d_m, M) Alors $(z_{1A}, N+)$

Si $(z_{1m}, N+)$ et (d_m, C) et $(z_{1m+1}, N+)$ et (d_m, L) Alors $(z_{1A}, N+)$.

D'après les fonctions d'appartenances, la durée de la mission A est moyenne à 70 % et longue à 30 %.

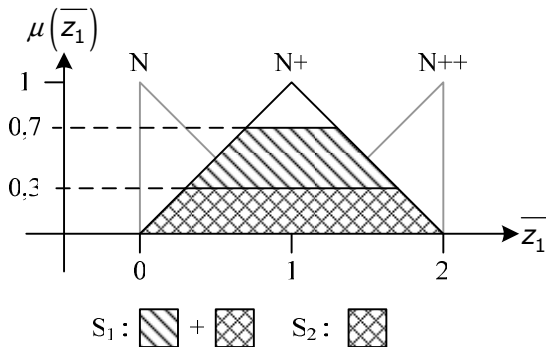


Figure 5. Fonction d'appartenance pour la sortie \bar{z}_{1A}

X_1 : Centre de gravité de la surface S_1
 X_2 : Centre de gravité de la surface S_2

$$\bar{z}_{1A} = \frac{(X_1 \cdot S_1) + (X_2 \cdot S_2)}{S_1 + S_2} = 1$$

La détermination du coefficient \bar{z}_{2A} résulte de l'utilisation de deux règles d'inférences :

Si $(z_{2m}, N+)$ et (d_m, C) et (z_{2m+1}, N) et (d_m, M)
 Alors (z_{2A}, N)

Si $(z_{2m}, N+)$ et (d_m, C) et (z_{2m+1}, N) et (d_m, L)
 Alors (z_{2A}, N)

D'après les fonctions d'appartenances, la durée de la mission 2 est courte à 70 % et moyenne à 30 %.

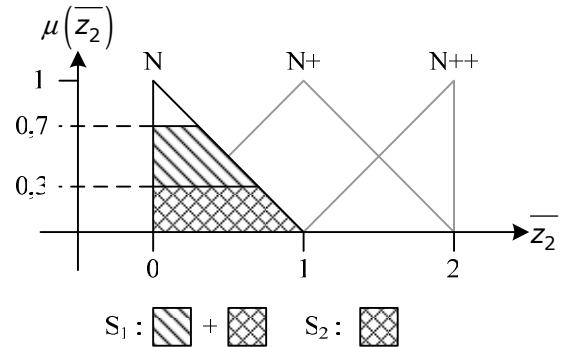


Figure 6. Fonction d'appartenance pour la sortie \bar{z}_{2A}

X_1 : Centre de gravité de la surface S_1
 X_2 : Centre de gravité de la surface S_2

$$\bar{z}_{2A} = \frac{(X_1 \cdot S_1) + (X_2 \cdot S_2)}{S_1 + S_2} \approx 0,382$$

Nous venons de modéliser la mission A, qui représente une moyenne des missions 1 et 2. La durée de cette nouvelle mission est égale à $\frac{40+76}{2} = 58$ ut.

La détermination du coefficient \bar{z}_{1B} s'obtient également par l'utilisation de deux règles d'inférences :

Si $(z_{1m}, N+)$ et (d_m, C) et $(z_{1m+1}, N++)$ et (d_m, C) Alors $(z_{1B}, N+)$

Si $(z_{1m}, N+)$ et (d_m, M) et $(z_{1m+1}, N++)$ et (d_m, C) Alors $(z_{1B}, N+)$.

D'après les fonctions d'appartenances, la durée de la mission A est courte à 60 % et moyenne à 40 %.

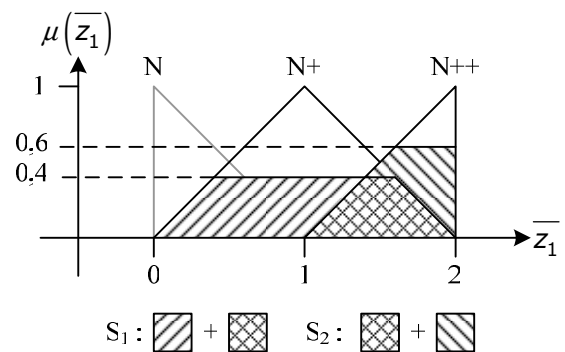


Figure 7. Fonction d'appartenance pour la sortie \bar{z}_{1B}

X_1 : Centre de gravité de la surface S_1
 X_2 : Centre de gravité de la surface S_2

$$\overline{z_{1B}} = \frac{(X_1 \cdot S_1) + (X_2 \cdot S_2)}{S_1 + S_2} \approx 1,629$$

La détermination du coefficient $\overline{z_{2B}}$ découle de l'application de quatre règles d'inférences :

Si (z_{2m}, N) et (d_m, C) et (z_{2m+1}, N) et (d_m, C)

Alors (z_{2B}, N)

Si (z_{2m}, N) et (d_m, M) et (z_{2m+1}, N) et (d_m, C)

Alors (z_{2B}, N)

Si $(z_{2m}, N+)$ et (d_m, C) et (z_{2m+1}, N) et (d_m, C)

Alors (z_{2B}, N)

Si $(z_{2m}, N+)$ et (d_m, M) et (z_{2m+1}, N) et (d_m, C)

Alors (z_{2B}, N)

D'après les fonctions d'appartenances, la durée de la mission A est courte à 60 % et moyenne à 40 %. Concernant le facteur de risque z_{2m} , il est nominal (N) à 61,8 % et nominal + (N+) à 38,2 %.

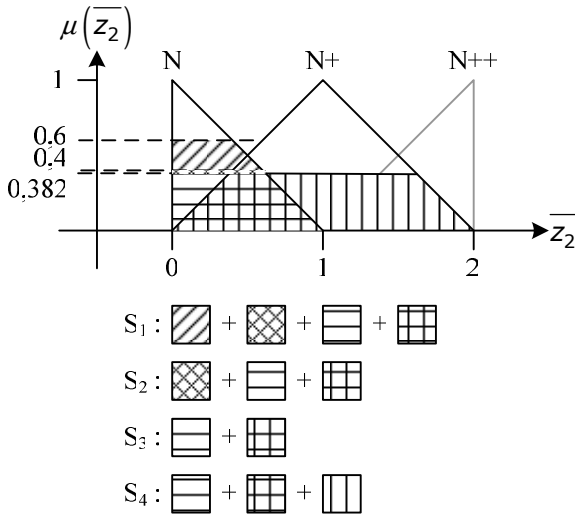


Figure 8. Fonction d'appartenance pour la sortie $\overline{z_{2B}}$

X_1 : Centre de gravité de la surface S_1
 X_2 : Centre de gravité de la surface S_2
 X_3 : Centre de gravité de la surface S_3
 X_4 : Centre de gravité de la surface S_4

$$\overline{z_{2B}} = \frac{(X_1 \cdot S_1) + (X_2 \cdot S_2) + (X_3 \cdot S_3) + (X_4 \cdot S_4)}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}$$

$$\overline{z_{2B}} \approx 0,618$$

La mission B, qui représente une moyenne des missions A et 3, a une durée moyenne égale à $\frac{11+58}{2} = 34,5$ ut.

La mission moyenne représentant l'ensemble des missions 1, 2 et 3 a pour caractéristiques :

- $\overline{z_{1B}} \approx 1,629$
- $\overline{z_{2B}} \approx 0,618$
- $d_B \approx 34,5$

3.2. Détermination des coefficients de pondération b_i

Dans le modèle de Cox, le taux de défaillance est multiplié par la fonction de risques de défaillances. Le modèle multiplicatif de régression, pour des données de survies, s'écrit donc sous la forme :

$$\lambda(t, z) = \lambda_0(t) \cdot g(z)$$

- $\lambda_0(t)$: taux de défaillances établi dans des conditions dites nominales.
- $\lambda(t, z)$: taux de défaillances représentant le risque instantané de défaillance à l'instant t, sous les conditions Z.
- $g(z)$: fonction environnementale de type exponentiel $g(z) = e^{\sum_i b_i \cdot z_i}$

En reprenant le modèle de Cox, il est désormais possible de déterminer les coefficients de pondération. Les paramètres b_i sont estimés en maximisant la vraisemblance de Cox. Celle-ci s'écrit comme le produit des probabilités conditionnelles calculées à chaque instant t_i . La contribution V_i du composant i défaillant en t_i à la vraisemblance partielle V^* est égale à la probabilité conditionnelle que ce soit le sujet soumis aux contraintes Z_i et pouvant être défaillant à t_i , tout en connaissant la composition de la population à risque en cet instant :

$$V_i = \frac{\lambda(t_i, Z_i)}{\sum_{k \in n(t_i)} \lambda(t_i, Z_k)}$$

Où :

- t_i ($i=1 \dots n$) : les n dates de défaillances observées
- $n(t_i)$: l'ensemble de la population « à risque » au moment de la défaillance t_i

Soit :

$$V_i = \frac{e^{b_i \cdot z_i}}{\sum_{k \in n(t_i)} e^{b_i \cdot z_k}}$$

La vraisemblance partielle se calcule alors comme le produit des contributions pour chaque date de défaillance :

$$V^* = \prod_{i=1}^n \frac{e^{b_i \cdot z_i}}{\sum_{k \in n(t_i)} e^{b_i \cdot z_k}}$$

En développant l'expression et en calculant la log-vraisemblance, on obtient :

$$L^* = \sum_{i=1}^n \left[b_i \cdot z_i - \ln \left(\sum_{j \in n(t_i)} e^{b_i \cdot z_j} \right) \right]$$

La vraisemblance de Cox est une fonction de b , l'estimateur \hat{b} du maximum de vraisemblance vérifie :

$$\frac{\partial L^*(\hat{b})}{\partial b} = 0$$

Ainsi, pour déterminer les valeurs des b_i , nous sommes amenés à résoudre le système d'équation aux dérivées partielles suivant :

$$\frac{\partial L}{\partial b_1} = 0 \text{ et } \frac{\partial L}{\partial b_2} = 0$$

Sans prendre en considération la méthode Cox, nous supposons que la densité des temps de bon fonctionnement peut être approximée par une fonction de Weibull avec deux paramètres. Comme cité précédemment, le taux de défaillances est multiplié par la fonction de risques de défaillances, ce qui permet d'établir directement le modèle général de la loi de densité de probabilité :

$$f(t, z) = g(z) \cdot \frac{\beta}{\eta} \cdot \left(\frac{t}{\eta} \right)^{\beta-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^\beta} \cdot g(z)$$

Où :

- β : paramètre de forme
- η : paramètre d'échelle

Connaissant la loi de défaillance caractérisant le système, il est désormais possible de déterminer la durée optimale durant laquelle le navire pourra exécuter ses missions et pour laquelle le coût des actions de maintenance par unité de temps (ut) sera minimal.

4. POLITIQUES DE MAINTENANCE

Comme nous venons de le démontrer dans la section précédente, il est possible de définir une loi de défaillance qui permet de pronostiquer le niveau de

défaillance du navire suivant l'ordre d'exécution des missions à réaliser. De ce fait, nous allons pouvoir déterminer le plan d'exploitation optimal qui permet de minimiser les coûts totaux liés aux actions de maintenance suivant deux politiques de maintenance, notées π^0 et π^1 . Pour ces deux politiques, nous posons comme hypothèse que les actions de maintenance corrective et préventive sont réalisées en temps masqué. Par ailleurs, nous considérons un ensemble de \mathcal{M} missions à réaliser sur un horizon fini (noté H) et dont les facteurs de risques sont différents. Étant donné que le navire doit effectuer \mathcal{M} missions de facteurs de risques différents, nous sommes amenés à calculer les coûts de maintenance pour les $\mathcal{M}!$ plans d'exploitation possibles. Pour la suite de l'article, les plans d'exploitation seront exprimés sous la forme P_i^E où i , variant de $i=1$ à $\mathcal{M}!$, représente les plans d'exploitation envisageables.

4.1. Détermination des coûts de maintenance suivant la politique de maintenance π^0

Suivant cette politique de maintenance, les coûts sont exprimés par :

$$\gamma^0(H) / P_i^E = C_{MC} \cdot H_i(H) + C_{MP}$$

Où :

- C_{MC} représente les coûts liés à une action de maintenance corrective,
- C_{MP} représente les coûts liés à la maintenance préventive réalisée au retour à quai du navire.
- $H_i(H)$ correspond à l'équation de renouvellement, c'est-à-dire au nombre moyen de pannes pouvant intervenir sur l'horizon de temps H, associé au plan d'exploitation i .

Comme les facteurs de risques des \mathcal{M} missions sont différents, l'équation de renouvellement s'établit sous la forme :

$$H_i(H) = \int_0^H \Lambda_i(t) dt = \sum_{k=1}^{\mathcal{M}} \int_{\alpha_k}^{\alpha_k + \Delta_k} \lambda_k(t) dt$$

Où :

- $\Lambda_i(t)$: loi de défaillance associée au plan d'exploitation i
- $\lambda_k(t)$: loi de défaillance associée à la mission k
- Δ_k : durée de la mission k
- α_k : date à laquelle le taux de défaillance de la mission k est égal au taux de défaillance à la fin de la mission $k-1$.

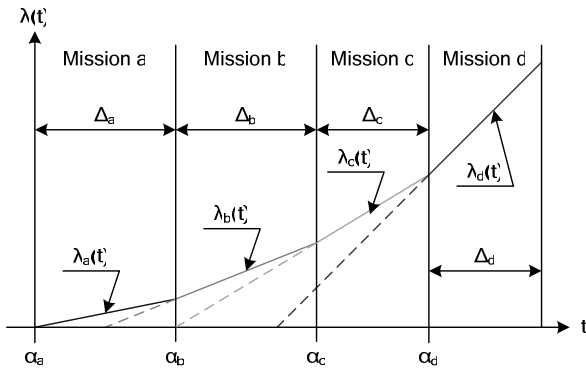


Figure 9. Définition des paramètres pour la réalisation de quatre missions

4.2. Détermination des coûts de maintenance suivant la politique de maintenance π^1

Pour cette politique de maintenance, les coûts sont obtenus par l'équation :

$$\gamma^1(H)/P_i^E = C_{MC} \cdot H_i(H) + C_{mp} \cdot N + C_{MP}$$

Où :

- C_{mp} représente les coûts liés à la maintenance préventive réalisée en mer.

Dans cette équation, le terme N caractérise le nombre de maintenances préventives qui seront réalisées en mer. Pour les déterminer, il est impératif de calculer les durées T_j^* qui séparent les maintenances préventives réalisées en mer. Néanmoins, comme la loi de défaillance n'est pas uniforme sur l'horizon H, l'intervalle entre les maintenances préventives réalisées en mer ne seront pas régulières. Pour résoudre ce problème, la méthodologie consiste à déterminer les différentes dates de maintenances préventives à partir des missions restantes à réaliser.

Les dates de maintenances préventives à réaliser en mer sont obtenues en minimisant le coût de maintenance par unité de temps.

$$c(T_j^*)/P_i^E = \frac{C_{MC} \cdot \left(H_i \left(\sum_{k=1}^j T_k^* \right) - H_i \left(\sum_{k=1}^{j-1} T_k^* \right) \right) + C_{mp}}{T_j^*}$$

sous la condition que $\sum_{k=1}^j T_k^* < \sum_{m=1}^M \Delta_m$

Le coût minimum est obtenu pour $\frac{\partial c(T_j^*)/P_i^E}{\partial T_j^*} = 0$

Pour la détermination de ces durées optimales T_j^* , l'équation de renouvellement dépend également de ces

durées. Le nombre moyen de pannes s'établit sous la

$$\text{forme } H_i \left(\sum_{k=1}^j T_k^* \right) = \int_0^{\sum_{k=1}^j T_k^*} \Lambda_i(t) dt$$

Comme pour la politique de maintenance π^0 , la fonction de risque $\Lambda_i(t)$ n'est pas uniforme sur l'intervalle

$\left[0; \sum_{k=1}^j T_k^* \right]$. Il est nécessaire de discrétiser cet intervalle

suivant les événements survenus jusqu'à la date $\sum_{k=1}^j T_k^*$.

Les sous intervalles sont donc bornés par :

- Le début et la fin d'une mission, si aucune maintenance préventive n'est réalisée durant cet intervalle
- Le début d'une mission et le début d'une maintenance préventive
- La fin d'une maintenance préventive et la fin d'une mission.

4.3. Comparaison des deux politiques de maintenance π^0 et π^1

Afin de comparer nos deux politiques de maintenances, nous nous baserons sur un exemple dont les paramètres sont donnés ci-dessous :

- Loi de défaillance de type Weibull (2 paramètres) associé au modèle de Cox
 - Paramètre de forme : 2
 - Paramètre d'échelle : 500
 - Coefficient du facteur d'environnement associé aux conditions opérationnelles : 0.7
 - Coefficient du facteur d'environnement associé aux conditions environnementales : 0.2
- Coût de maintenance corrective : $C_{MC} = 5000$ um
- Coût de maintenance préventive : $C_{MP} = 100$ um
- Coût de maintenance préventive en mer : $C_{mp} = 100 + (20 \times \text{Qualité de la maintenance})^2$
- Un ensemble de quatre missions possibles à réaliser sur un horizon fini, noté H.

Mission	Durée	z1	z2
1	59	0	0
2	84	0	1
3	74	1	1
4	69	0	2

Tableau 3. Matrice des missions utilisées pour la comparaison des politiques π^0 et π^1

L'exemple étant basé sur quatre missions de facteurs de risques différents, nous serons amenés à étudier 24 (!) plans d'exploitation différents (notés P_1^E, \dots, P_{24}^E). Par ailleurs, nous posons comme hypothèse que les actions

Ordre des missions	Politique π^0	Politique π^1								
		Qualité de la maintenance								
		10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%
1 ⇨ 2 ⇨ 3 ⇨ 4	3 278	3 378	3 178	3 066	2 877	2 854	2 922	2 752	2 748	2 861
1 ⇨ 2 ⇨ 4 ⇨ 3	3 081	3 215	3 038	2 869	2 785	2 765	2 835	2 701	2 713	2 774
1 ⇨ 3 ⇨ 2 ⇨ 4	3 586	3 626	3 367	3 215	3 006	2 965	3 025	2 859	2 866	2 898
1 ⇨ 3 ⇨ 4 ⇨ 2	3 649	3 675	3 406	3 247	3 031	2 993	3 052	2 863	2 844	2 901
1 ⇨ 4 ⇨ 2 ⇨ 3	3 143	3 264	3 076	2 904	2 816	2 795	2 868	2 725	2 719	2 752
1 ⇨ 4 ⇨ 3 ⇨ 2	3 451	3 521	3 286	3 148	2 948	2 930	2 992	2 795	2 764	2 909
2 ⇨ 1 ⇨ 3 ⇨ 4	3 322	3 416	3 212	3 093	2 897	2 873	2 947	2 775	2 787	2 960
2 ⇨ 1 ⇨ 4 ⇨ 3	3 125	3 253	3 073	2 894	2 804	2 783	2 860	2 722	2 748	2 834
2 ⇨ 3 ⇨ 1 ⇨ 4	3 577	3 604	3 353	3 241	3 043	2 968	3 004	2 875	2 924	2 967
2 ⇨ 3 ⇨ 4 ⇨ 1	3 657	3 668	3 401	3 280	3 066	3 007	3 076	2 881	2 878	2 924
2 ⇨ 4 ⇨ 1 ⇨ 3	3 205	3 317	3 125	2 936	2 840	2 832	2 934	2 763	2 758	2 792
2 ⇨ 4 ⇨ 3 ⇨ 1	3 460	3 515	3 271	3 178	2 981	2 916	3 032	2 828	2 801	2 826
3 ⇨ 1 ⇨ 2 ⇨ 4	3 841	3 826	3 536	3 388	3 150	3 074	3 078	2 880	2 929	3 031
3 ⇨ 1 ⇨ 4 ⇨ 2	3 904	3 875	3 577	3 421	3 176	3 103	3 106	2 888	2 925	3 068
3 ⇨ 2 ⇨ 1 ⇨ 4	3 885	3 858	3 560	3 404	3 164	3 082	3 099	2 910	2 950	3 016
3 ⇨ 2 ⇨ 4 ⇨ 1	3 965	3 918	3 608	3 442	3 189	3 130	3 170	2 923	2 925	3 005
3 ⇨ 4 ⇨ 1 ⇨ 2	3 984	3 935	3 621	3 453	3 193	3 110	3 158	2 951	2 968	3 034
3 ⇨ 4 ⇨ 2 ⇨ 1	4 028	3 967	3 646	3 471	3 210	3 136	3 185	2 947	2 957	3 038
4 ⇨ 1 ⇨ 2 ⇨ 3	3 224	3 332	3 133	2 943	2 848	2 831	2 925	2 767	2 790	2 856
4 ⇨ 1 ⇨ 3 ⇨ 2	3 531	3 588	3 341	3 189	2 984	2 969	3 048	2 841	2 901	3 058
4 ⇨ 2 ⇨ 1 ⇨ 3	3 267	3 367	3 166	2 968	2 868	2 854	2 956	2 779	2 782	2 830
4 ⇨ 2 ⇨ 3 ⇨ 1	3 522	3 565	3 312	3 212	3 010	2 940	3 056	2 849	2 831	2 873
4 ⇨ 3 ⇨ 1 ⇨ 2	3 786	3 779	3 500	3 363	3 118	3 022	3 105	2 939	2 955	3 003
4 ⇨ 3 ⇨ 2 ⇨ 1	3 830	3 811	3 524	3 380	3 134	3 044	3 132	2 932	2 937	2 990

Tableau 4. Coûts totaux de maintenance suivant les politiques π^0 et π^1 pour les 24 plans d'exploitation envisageable

de maintenance corrective et préventive sont réalisées en temps masqué.

Les résultats obtenus à partir des deux politiques de maintenance π^0 et π^1 sont regroupés dans le tableau 3. Comme nous pouvons le remarquer, le coût de maintenance minimal est obtenu pour le plan d'exploitation ordonnancé par les missions 1, 2, 4 et 3 et pour la politique π^1 . L'obtention de ce coût minimal nécessite la réalisation de deux maintenances préventives en mer, aux dates et coûts :

- $T_1^* = 112,91$ ut avec un coût de 4,99 um/ut
- $T_2^* = T_1^* + 99,90$ ut avec un coût de 7,17 um/ut

Il est également nécessaire de tenir compte du coût lié aux actions de maintenance corrective proportionnellement au risque de pannes pouvant se produire entre la date de la dernière maintenance préventive réalisée en mer et la date de fin de réalisation de la dernière mission du plan d'exploitation P_2^E :

- $\sum_{i=1}^4 \Delta_i - \sum_{i=1}^2 T_i^* = 73,19$ ut avec un coût de 5,75 um/ut.

Si, pour ce plan d'exploitation et la qualité de maintenance donnés, la maintenance préventive était réalisée à intervalle régulier de durée $T_i^* = 112,91$ ut, le coût total de maintenance aurait été de 2712 um, réparti comme suit :

- $T_1^* = 112,91$ ut avec un coût de 4,99 um/ut
- $T_2^* = T_1^* + 112,91$ ut avec un coût de 7,24 um/ut
- $\sum_{i=1}^4 \Delta_i - \sum_{i=1}^2 T_i^* = 60,18$ ut avec un coût de 5,49 um/ut

Pour la politique π^0 , le coût minimal est obtenu pour le même plan d'exploitation, mais il reste néanmoins plus élevé que pour la politique π^1 .

5. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons proposé une méthodologie pour tenir compte de conditions environnementales et/ou opérationnelles d'un dispositif, qui peuvent varier au cours du temps. La prise en considération de ces facteurs est réalisée par le modèle de Cox, c'est-à-dire par l'ajout d'une fonction de risque de défaillance à la loi de défaillance nominale. Par l'intermédiaire d'un raisonnement par logique floue, il a été possible d'adapter l'historique du navire, afin de le rendre

compatible avec le modèle de Cox Il s'agissait de modéliser une mission générique de paramètres z_i représentant un ensemble de missions, de paramètres différents, qui se sont déroulées durant un cycle de temps de bon fonctionnement. Grâce au modèle de loi de défaillance proposé, nous avons pu, à partir d'un exemple, déterminer l'ordre optimal des missions à réaliser suivant les deux politiques de maintenance dans le but de minimiser les coûts totaux de maintenance. Notre étude, basée sur la réalisation de quatre missions, permettait de tester les différents plans d'exploitation envisageables. Néanmoins, nous sommes confrontés à un problème d'explosion combinatoire lorsque le nombre de missions devient plus conséquent, Pour remédier à ce problème, il est nécessaire de faire appel à des heuristiques tels que les algorithmes génétiques.

6. BIBLIOGRAPHIE

Arango G., Hennequin S., Rezg N., 2007, Fuzzy modeling and optimization of imperfect maintenance, *International Conference on Industrial Engineering and Systems Management*.

Barlow, R.E., Proschan, F., 1965. *Mathematical Theory of Reliability*. John Wiley and Sons, New York, pp. 108–117.

Byington C., Watson M., Roemer M. and Galie T., 2003, Prognostic Enhancements to Diagnostic Systems for Improved Condition-Based Maintenance, *IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, USA.

Doyen L., Gaudoin O., 2004, Classes of imperfect repair models based on reduction of failure intensity or virtual age, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 84, Issue 1, Pages 45-56.

Jardine A., Lin D., Banjevic D., 2006, A review on machinery diagnostics and prognostics implementing condition-based maintenance, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 20, Issue 7, Pages 1483-1510.

Lyonnet P., 2000, *La maintenance : mathématiques et méthodes*, Ed. Tec & Doc.

Martorell S., Ana Sanchez S., Serradell V., 1999, Age-dependent reliability model considering effects of maintenance and working conditions, *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 64, Issue 1, Pages 19-31.

Nakagawa T., 2005, *Maintenance Theory of Reliability*, Springer Series in Reliability Engineering.

Özekici, S., 1995, Optimal maintenance policies in random environments, *European Journal of Operational Research*, Volume 82, Issue 2, Pages 283-294.