

MODELE SEQUENTIEL D'INSPECTION POUR LA MAINTENANCE PREDICTIVE

M. NOOMANE DARGHOUTH, ANIS CHELBI

Centre de Recherche en Productique (CEREP)
Ecole Supérieure des Sciences et Techniques de Tunis,
Tunisie
Darghouth.noomane@planet.tn, anis.chelbi@planet.tn

DAOUD AIT-KADI

Département de génie mécanique
Centre de recherche CIRRELT
Université Laval, Québec, Canada
daouda@gmc.ulaval.ca

RESUME : Ce travail traite d'une stratégie de maintenance prédictive pour des équipements sujets à des défaillances aléatoires et dont l'état ne peut être connu qu'après inspection. Les inspections sont effectuées à des instants prédéterminés. Lors de chaque inspection, si l'équipement est état d'opération, on mesure une ou plusieurs caractéristiques révélatrices du niveau d'endommagement de l'équipement. Une action de maintenance préventive est planifiée si l'inspection révèle que le niveau d'endommagement excède un seuil préétabli. Un coût est encouru pour effectuer chaque inspection et pour entreprendre, le cas échéant, les actions de maintenance qui s'imposent. Le modèle mathématique proposé permet de générer les instants où les inspections doivent être effectuées de manière à minimiser le coût total moyen par cycle de remplacement. Le modèle prend en compte les fonctions de distribution associées aux durées de vie et aux instants où le seuil d'endommagement sera franchi. Si l'inspection effectuée à un instant $x(i)$ ne conduit pas au remplacement de l'équipement, l'instant $x(i+1)$ sera fixé en tenant compte des informations disponibles à $x(i)$. Les instants d'inspection sont alors déterminés d'une façon dynamique.

MOTS-CLES : *Maintenance prédictive, inspection, processus de dégradation.*

1. INTRODUCTION

Les stratégies de maintenance préventive de type périodique ont permis de réduire considérablement la fréquence des pannes accidentelles des équipements dont les caractéristiques opératoires se détériorent avec l'âge. Ces stratégies suggèrent de remplacer l'équipement d'une manière préventive après un âge prédéterminé ou à des instants spécifiques indépendamment de l'âge. Il est bien entendu que d'un point de vue économique, il est souhaitable de remplacer l'équipement juste avant que la panne ne se produise. Ceci ne peut être envisagé que si on peut suivre l'état de dégradation de l'équipement et qu'on maîtrise parfaitement les paramètres de l'environnement pour éviter toute panne aléatoire reliée aux conditions d'exploitation de l'équipement

Contrairement aux stratégies de remplacement préventif de type périodique, les actions suggérées par la maintenance conditionnelle ou prédictive sont subordonnées à l'état de l'équipement. Le remplacement préventif a lieu seulement lorsque la caractéristique contrôlée franchit un seuil d'alerte prédéfini. Ceci permet de remplacer l'équipement moins fréquemment et d'assurer une disponibilité plus élevée.

Généralement, l'état d'usure d'un équipement peut être connu en faisant des mesures directes ou indirectes. C'est à dire que dans certains cas, on est capable d'évaluer l'usure en la mesurant directement tandis que

dans d'autres cas, on agit indirectement en mesurant un paramètre de contrôle qui est fortement corrélé avec l'état de l'équipement. Plusieurs modèles ont été développés dans la littérature dans le but d'identifier ces paramètres de contrôle d'une part, et de concevoir et d'implanter les systèmes d'acquisition de données et de diagnostic d'autre part (Scarf P. (1997a) et Scarf P. (1997b)). L'amplitude des vibrations, le degré d'acidité d'un lubrifiant ou sa concentration en chrome sont des exemples de tels paramètres de contrôle dont la variation dans le temps est intimement liée au processus de dégradation de l'équipement.

Dans ce contexte plusieurs politiques d'inspection ont été proposées. Citons par exemple : {Hopp et Kyo (1998), Turco et Parolini (1984), Pellegrini (1992), Park (1988a, 1988b), Chelbi et Ait-Kadi (1998), Christer et Wang W (1995), Barbera et al. (1996), Wang (2000)}. L'objectif de ces modèles est généralement la détermination de la séquence optimale des instants d'inspection pour un seuil d'alerte donné ou bien l'optimisation du seuil d'alerte lorsque les instants d'inspection sont prédéterminés. L'approche la plus utilisée consiste à modéliser la durée de vie résiduelle du système en fonction du degré de détérioration atteint, et ensuite utiliser ce modèle dans un modèle économique en considérant les différents coûts de maintenance.

La très grande majorité des modèles de maintenance conditionnelle qu'on retrouve dans la littérature

considèrent des systèmes dont les caractéristiques de fiabilité sont basées sur un échantillon de données relatives à l'historique des pannes à partir desquelles sont déterminées des fonctions de distribution de probabilité associées aux durées de vie ou aux durées d'atteinte de certains seuils d'alerte. Il est intéressant de remarquer dans ces modèles que les fonctions de distribution une fois fixées ne sont aucunement affectées par le processus physique de dégradation d'un système donné durant son cycle de vie et pour lequel on veut appliquer un modèle de maintenance. Ceci implique une plus faible prévision des instants de pannes et donc de moins bonnes décisions relatives à la maintenance du système en question, par rapport à une situation où l'on pourrait mesurer la dégradation du système au fur et à mesure de son cycle de vie et mettre à jour la fonction de distribution de sa durée de vie résiduelle.

Les progrès réalisés dans les technologies relatives aux capteurs et à l'analyse des signaux offrent aujourd'hui de grandes possibilités pour développer de nouvelles stratégies de maintenance combinant ces technologies avec les modèles classiques de maintenance. Ceci en rendant possible la mise à jour (périodique ou continue) des fonctions de distribution des durées de vie utilisées dans les modèles classiques et qui ne changent pas pour un système donné pris individuellement.

Ainsi, dans cette perspective on se propose dans ce travail d'étudier, sur le plan théorique, le développement d'un modèle de maintenance conditionnelle, utilisant au départ une fonction de distribution associée aux durées d'atteinte d'un seuil d'alerte, issue d'un échantillon de données de l'historique, et offrant par la suite la possibilité de mettre à jour cette fonction de distribution suite à chaque inspection réalisée, de la réinjecter dans le modèle et recalculer l'instant de la prochaine inspection .

Nous considérerons dans ce qui suit le modèle d'inspection de Chelbi et Ait-Kadi (1998). Nous apporterons deux modifications à ce modèle. La première considère, contrairement au modèle initial, que les inspections n'altèrent pas l'état de l'équipement. La deuxième contribution consiste à mettre en œuvre la stratégie d'inspection proposée par Chelbi et Ait-Kadi (1998) dans un contexte où l'on profite de chaque inspection pour mesurer l'état de dégradation de l'équipement et suite à cela réaliser une mise à jour de la fonction de distribution ϕ associée à la durée d'atteinte du seuil d'alerte.

2. MODÈLE DE MAINTENANCE CONDITIONNELLE

Dans cette section nous reprenons le modèle de Chelbi et Ait-Kadi (1998), mais cette fois dans un contexte différent dans le sens où l'action d'inspection n'affecte d'aucune façon l'état de dégradation de l'équipement.

2.1. Définition de la stratégie et hypothèses de travail

On considère un équipement dont l'état ne peut être connu que suite à une inspection. Cet équipement est inspecté à des instants prédéterminés ($x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$), une caractéristique révélatrice de son état est alors mesurée. L'équipement est remplacé soit dans le cas où l'inspection révèle qu'il est hors d'usage (remplacement à la panne) ou si les valeurs mesurées du paramètre de contrôle dépassent un certain seuil préalablement fixé (remplacement préventif).

A la durée de vie de l'équipement sont associées deux fonctions de densité de probabilité distinctes. La première, $\phi(\cdot)$, est associée à la durée avant que le seuil ne soit franchi et la seconde, $f(\cdot)$, est associée à la durée de vie résiduelle une fois le seuil franchi.

Soient τ la variable aléatoire associée à la durée de vie avant que le seuil ne soit franchi et t celle associée à la durée de vie résiduelle à partir du dépassement du seuil. Si à la $i^{\text{ème}}$ inspection effectuée à l'instant x_i , on constate que le seuil a été franchi ou que l'équipement est hors d'usage, une action préventive ou corrective est alors entreprise à l'instant $x_i + H$. La durée H correspond au temps requis pour compléter les procédures administratives et rendre disponibles les ressources appropriées (les personnes, les pièces et l'outillage). On supposera que la durée de l'intervention est négligeable étant donné que toutes les dispositions ont été prises pour minimiser la durée d'interruption de service due au remplacement.

Par ailleurs, on suppose que :

- 1- $\phi(\cdot)$ et $f(\cdot)$ ainsi que les fonctions de distribution correspondantes $\Phi(\cdot)$ et $F(\cdot)$ sont connues et $\phi^l(\cdot)$ existe;
- 2- Les inspections n'altèrent pas l'état de l'équipement (inspection sans influence) ;
- 3- La durée de chaque inspection est négligeable;
- 4- L'état de l'équipement, y compris l'état de défaillance, ne peut être connu qu'après inspection.

la durée d'interruption de service due au remplacement.

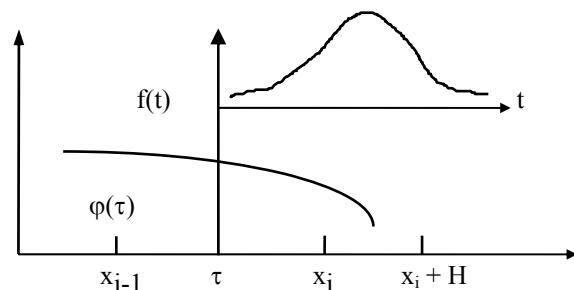


Figure 1 : Les fonctions de densité $\phi(\tau)$ et $f(t)$.

2.2. Modèle mathématique

Soient C_i le coût moyen d'une inspection, C_p le coût moyen d'un remplacement préventif et C_g le coût constant d'un remplacement à la panne. Comme la panne ne peut être détectée qu'après inspection, si elle se produit à un instant t appartenant à l'intervalle $]x_i, x_{i+1}]$, il en résulte une période d'inactivité égale à $(x_{i+1} - t)$. Un coût constant C_d est associé à chaque unité de temps durant laquelle l'équipement est inactif. La séquence optimale d'inspection (x_1, x_2, \dots) est celle qui minimise le coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini. Ce coût est donné par :

$$R_c = \frac{E(C)}{E(T)} \quad (1)$$

où $E(C)$ représente le coût total moyen durant un cycle, et $E(T)$ la durée moyenne d'un cycle. Un cycle est défini par l'intervalle de temps entre deux remplacements consécutifs.

Le coût, $E(C)$, englobe les coûts d'inspection, des remplacements préventifs et correctifs et les coûts associés à l'inactivité.

$$E(C) = C_i E(I) + C_g P_g + C_p P_p + C_d A \quad (2)$$

où

$E(I)$ est le nombre moyen d'inspections durant un cycle.

P_g est la probabilité que le cycle se termine par un remplacement à la panne.

P_p est la probabilité que le cycle se termine par un remplacement préventif.

A , représente la période moyenne d'inactivité.

À la fin d'un cycle, l'équipement est soit en état d'opération et le seuil d'alerte est franchi, ou bien complètement hors d'usage et ce, quelle que soit la cause qui a provoqué la défaillance.

Par conséquent, après le dernier test, l'équipement est soit en état d'opération auquel cas un remplacement préventif est planifié, ou hors d'usage et dans ce cas, un remplacement à la panne est entrepris H unités de temps plus tard. Ces événements étant indépendants et mutuellement exclusifs, il s'ensuit que :

$$P_g + P_p = 1 \quad (3)$$

Exposons maintenant les expressions analytiques des différents composants du coût total moyen par unité de temps sur un horizon infini (équations (1) et (2)) telles que données par Chelbi et Ait-Kadi (1998).

i) Le nombre moyen d'inspections dans un cycle, $E(I)$:

$$E(I) = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot h(i) \quad (4)$$

où la probabilité $h(i)$ que i inspections soient réalisées dans un cycle est donnée par: (voir Turco et Parolini (1984))

$$h(i) = \int_0^{x_{i+1}} \varphi(\tau) \cdot F(x_{i+1} - \tau) d\tau - \int_0^{x_i} \varphi(\tau) \cdot F(x_i - \tau) d\tau \quad (5)$$

ii) La probabilité P_g que le cycle finisse par un remplacement à la panne :

$$P_g = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(\tau) F(H + x_i - \tau) d\tau \quad (6)$$

iii) La période d'inactivité moyenne, A , est exprimée comme suit :

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^{x_i + H - \tau} \varphi(\tau) \cdot \{(x_i + H - (\tau + t)) \cdot f(t)\} dt d\tau \quad (7)$$

iv) La durée moyenne d'un cycle, $E(T)$ est donnée par :

$$E[T] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(\tau) \int_0^{x_i + H - \tau} (x_i + H) \cdot f(t) dt d\tau + (H + x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi(\tau) \cdot [1 - F(H + x_i - \tau)] d\tau \right] \quad (8)$$

Pour générer les instants d'inspection x_i ($i = 1, 2, \dots$), considérons la probabilité conditionnelle p_s que le seuil d'alerte soit dépassé dans l'intervalle $]x_{i-1}, x_i]$:

$$p_s = \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})}{1 - \phi(x_{i-1})} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \quad (9)$$

On suppose dans ce travail que cette probabilité p_s demeure constante sur tous les intervalles d'inspection. Chelbi et Ait-Kadi (1998) considèrent que p_s est croissante vu que l'inspection altère l'état de l'équipement selon leurs hypothèses de travail.

Les instants d'inspection x_i peuvent alors être générés en utilisant les équations (8) et (9):

$$x_i = \phi^{-1} \{ p_s + (1 - p_s) \phi(x_{i-1}) \} \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots \quad (10)$$

Avec $x_0 = 0$, $\phi(0) = 0$ et $p_s = \phi(x_1)$

Ainsi, en combinant les équations (1) à (8), il est possible d'exprimer le coût total moyen par unité de temps, R_c , en fonction d'un seul paramètre, p_s . Ceci se fait en remplaçant, dans chaque équation, x_i par son expression donnée par (9). La valeur optimale de p_s sera celle qui minimise le coût R_c .

Dans le cas général, il est difficile d'établir une forme explicite du coût R_c , une méthode itérative a été mise au point par Chelbi et Ait-Kadi (1998) pour générer une séquence optimale d'inspection pour n'importe quelle instance du problème. Nous utiliserons la même procédure dans ce travail.

2.3. Exemple d'illustration

Pour des fins d'illustration, nous considérons l'exemple suivant se basant sur des données arbitrairement choisies mais inspirées du cas des outils de coupe traité par Chelbi et Ait-Kadi (1998).

La durée de vie du système considéré suit une distribution normale $N \equiv (\mu = 1050 \text{ min}, \sigma = 106 \text{ min})$. Nous supposons que les tests de fiabilité ont permis de déterminer sa décomposition en une somme de deux autres distributions normales:

$$\phi \equiv (\mu_1 = 850, \sigma_1 = 100)$$

et

$$F \equiv (\mu_2 = 200, \sigma_2 = 35).$$

Bien entendu, cette décomposition est déterminée en analysant les durées de vie observées avant et après le dépassement du seuil d'alerte.

Les calculs ont été effectués avec les données suivantes :

$$C_i = 210 \$, C_p = 3000 \$, C_g = 5500 \$,$$

$$C_d = 375 \$/\text{minute}, H = 10 \text{ minutes}.$$

i	x_i	$x_{i+1} - x_i$
0	0	
1	765.7	765.7
2	813.9	48.2
3	846.9	33.0
4	873	26.1
5	894.9	21.9
6	914.1	19.2
7	931.3	17.2
8	947	15.7
9	961.5	14.5

Tableau 1. Séquence optimale des instants d'inspection (contexte où l'action d'inspection est sans influence)

Le coût total moyen par unité de temps correspondant est de 4,326 \$/minute et la probabilité p_s que le seuil soit dépassé avant 766 minutes ($x_1 \approx 766$) est de 25%.

Le cycle de remplacement a une durée moyenne de 771.3 minutes, ce qui est inférieur à la durée de vie moyenne de l'outil ($\mu = 1050$). Il est aussi intéressant de mentionner que dans ce cas, il y a 95.4 % de chances d'éviter de faire un remplacement à la panne ($P_p = 95.38$ %).

3. MODELE DE MAINTENANCE CONDITIONNELLE AVEC MISE À JOUR DE LA FONCTION DE DISTRIBUTION ASSOCIEE AU DUREES D'ATTEINTE DU SEUIL D'ALERTE

Nous proposons dans ce qui suit une stratégie de maintenance conditionnelle basée sur le modèle décrit précédemment (Chelbi et Ait-Kadi (1998)) avec mise à jour de la fonction de distribution ϕ suite à chaque inspection. Pour réaliser cette mise à jour, notre démarche sera basée sur le modèle de dégradation exponentielle de N. Gebraeel et Alaa Alwani (2007).

Etant donné que la fonction de distribution de probabilités associée aux durées d'atteinte du seuil d'alerte est mise à jour à chaque instant d'inspection,

cette nouvelle approche permettra d'avoir des résultats plus précis et plus adaptés à chaque système inspecté pris individuellement.

3.1. Stratégie modifiée: définition et hypothèses de travail

La stratégie modifiée suggère d'inspecter l'équipement à des instants prédéterminés (x_1, x_2, \dots) en mesurant à chaque fois la valeur du signal de dégradation acquise à l'aide d'instruments branchés sur l'équipement. Celui-ci est alors remplacé soit dans le cas où l'inspection révèle qu'il est hors d'usage (remplacement à la panne) ou si les valeurs mesurées du paramètre de contrôle dépassent un certain seuil préalablement fixé (remplacement préventif).

Profitant des résultats de cette inspection et dans le cas où l'équipement est trouvé en bon état de marche, la valeur acquise du signal sera exploitée pour mettre à jour la fonction de distribution de probabilités d'atteinte du seuil d'alerte à l'aide du modèle de dégradation exponentielle que l'on décrira plus loin. Une fois la nouvelle distribution obtenue, elle sera réinjectée dans le modèle mathématique pour générer une nouvelle séquence optimale d'inspection dont le premier instant sera l'instant de la prochaine inspection.

Etant donné que nous ne disposons pas d'un dispositif expérimental avec un système réel, nous nous sommes inspirés du système considéré dans Gebraeel et A. Alwani (2007) qui consiste en une population de roulements dont la dégradation de chacun est suivie à l'aide d'une instrumentation spécifique permettant de mesurer un paramètre de contrôle qui est l'amplitude des vibrations. Cette amplitude est mesurée en *Vrms* signifiant *Volt Root Mean Square* qui est synonyme de la tension efficace figure 2.

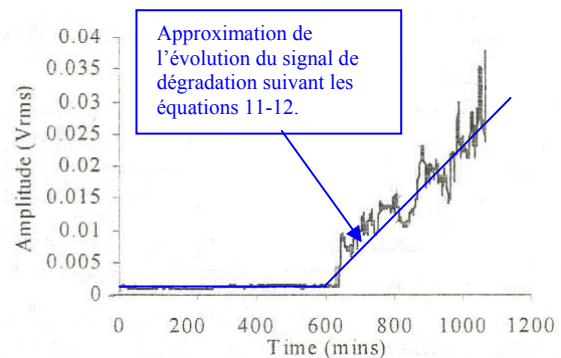


Figure 2 : Évolution de l'amplitude de vibrations en fonction du temps dans le cas d'un ensemble de roulements (N. Gebraeel et A. Alwani (2007)).

Nous allons considérer hypothétiquement ce signal pour proposer une formulation théorique de l'évolution du signal en fonction du temps. Sans perte de généralité, on se basera sur la formule suivante comme exemple du comportement de ce signal en fonction du temps :

$$\text{Si } t < 600 \text{ alors } S(t) = 0.002 \text{ Vrms} \quad (11)$$

Si $t \geq 600$ alors $S(t) = 5.6.10^{-5} * t - 0.03256$ (12)
 Cette formulation correspond à une approximation linéaire du signal de la figure 2.

3.2. Modèle mathématique de la stratégie modifiée

Le modèle mathématique correspondant à la nouvelle situation où on réalise une mise à jour de la fonction de distribution ϕ à chaque inspection est en fait une variante du modèle original de Chelbi et Ait-Kadi (1998). En effet, les expressions relatives à la période moyenne d'inactivité (équation 7) et à la durée moyenne du cycle (équation 8) vont changer. De plus, le modèle de dégradation exponentielle utilisé par N.Gabreeal et Alaa Alwani (2007) devra être intégré au niveau de la mise à jour de la fonction de distribution ϕ .

En considérant $\varphi = \varphi_j$, à chaque mise à jour j :

La période moyenne d'inactivité, $A(j)$, sera exprimée comme suit :

$$A(j) = \sum_{i=j}^{\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_0^{x_i + H - \tau} \varphi_j(\tau) \cdot \{(x_i + H - (\tau + t)) \cdot f(t) dt\} d\tau \quad (13)$$

avec ($j = 1, 2, \dots, n$).

La durée moyenne d'un cycle, $E(T)$, sera donnée par :

$$E[T] = \sum_{i=j}^{\infty} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j(\tau) \int_0^{x_i + H - \tau} (x_i + H) \cdot f(t) dt d\tau + (H + x_i) \cdot \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_j(\tau) \cdot [1 - F(H + x_i - \tau)] d\tau \right] \quad (14)$$

3.2.1 Modèle de dégradation exponentielle

Le modèle de dégradation exponentielle est le plus souvent utilisé dans le cas de dégradation due à une usure cumulée (N.Gabreeal et Alaa Alwani (2007), T. Harris (2001), Y. Shao et K. Nezu (2000), K.Goode et al (1998)). Selon ce modèle, le signal de dégradation est supposé suivre une forme exponentielle donnée par :

$$S(t_k) = \lambda + \theta e^{\beta t_k + \varepsilon(t_k) - \frac{\sigma^2 t_k}{2}} = \lambda + (\theta e^{\beta t_k}) \left(e^{\varepsilon(t_k) - \frac{\sigma^2 t_k}{2}} \right) \quad (15)$$

où, $S(t_k)$ est la valeur du signal à l'instant t_k , λ est un paramètre constant déterministe, θ et β sont des variables aléatoires, et le terme $\varepsilon(t_k)$ représente l'erreur sur la lecture du signal du aux bruits.

En général, dans le cas d'un modèle exponentiel il est plus facile de travailler avec la valeur logarithmique du signal de dégradation noté par $L(t)$,

$$L(t_k) = \ln(S(t_k) - \lambda) = \ln \theta + \beta t_k + \varepsilon(t_k) - \frac{\sigma^2 t_k}{2} \quad (16)$$

$$L(t_k) = \ln \theta + t_k \left(\beta - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \varepsilon(t_k) \quad (17)$$

$$L(t_k) = \theta' + t_k \beta' + \varepsilon(t_k) \quad (18)$$

Avec $\theta' = \ln(\theta)$ et $\beta' = \beta - (\sigma^2/2)$, qui sont supposés suivre une distribution normale à deux variables, $\pi(\theta', \beta')$ de

moyenne (μ_0, μ'_1) , de variance (σ_0^2, σ_1^2) et avec un facteur de corrélation ρ_0 .

A noter que $\mu'_1 = \mu_1 - (\sigma_1^2/2)$, avec μ_1 dénotant la moyenne de la variable aléatoire β .

Les paramètres a priori $(\mu_0, \mu'_1, \sigma_0^2, \sigma_1^2, \rho_0)$ de la distribution $\pi(\theta', \beta')$, sont obtenus à partir des données expérimentales provenant de tests de dégradation effectués sur des échantillons. Un lissage de données est effectué par rapport au modèle de l'équation (16) dans le but d'obtenir les paramètres de la distribution $\pi(\theta', \beta')$.

Pour plus de détail concernant cette procédure de détermination des paramètres se référer à T. Harris (2001) et aussi à N. Gebraeel (2006).

3.2.2 Détermination de la fonction de distribution de probabilités des durées résiduelles avant l'atteinte du seuil d'alerte

Après avoir déterminé les paramètres de la distribution a priori $\pi(\theta', \beta')$ à l'aide d'essais de dégradation sur un échantillon, les paramètres a posteriori sont alors calculés en fonction des paramètres a priori et de la valeur logarithmique du signal $L(t_k)$ suivant les équations suivantes décrites dans N. Gebraeel et A. Elwany (2007) :

$$\mu_{\theta'} = \frac{(t_k + B\sigma^2) \left(\frac{L_1}{t_1} + C\sigma^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^k Li + D\sigma^2 \right) (1 + E\sigma^2)}{\left(\frac{1}{t_1} + A\sigma^2 \right) (t_k + B\sigma^2) - \left(\frac{1}{\sigma^2} + E(E\sigma^2 + 2) \right)} \quad (19)$$

$$\mu_{\beta'} = \frac{\left(\sum_{i=1}^k Li + D\sigma^2 \right) \left[\left(\frac{1}{t_1} + A\sigma^2 \right) - (1 + E\sigma^2) \right]}{\left(\frac{1}{t_1} + A\sigma^2 \right) (t_k + B\sigma^2) - \left(\frac{1}{\sigma^2} + E(E\sigma^2 + 2) \right)} \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta'}^2 = \frac{[t_k \sigma_1^2 (1 - \rho_0^2) + \sigma^2] (\sigma_0^2 \sigma_1^2 t_1)}{\sigma^2 (\sigma_0^2 + \sigma_1^2 t_k t_1 + \sigma^2 t_1 + 2\sigma_0 \sigma_1 t_1) - [\sigma^2 \sigma_1^2 (1 - \rho_0^2) (t_1 - t_k)]} \quad (21)$$

$$\sigma_{\beta'}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma^2 [\sigma_0^2 (1 - \rho_0^2) + \sigma^2 t_1]}{\sigma^2 (\sigma_0^2 + \sigma_1^2 t_k t_1 + \sigma^2 t_1 + 2\sigma_0 \sigma_1 t_1) - [\sigma^2 \sigma_1^2 (1 - \rho_0^2) (t_1 - t_k)]} \quad (22)$$

$$\rho = \frac{\sigma^2 \rho_0 - \sigma_0 \sigma_1 (1 - \rho_0^2) \sqrt{t_1}}{\sqrt{[\sigma_0^2 (1 - \rho_0^2) + \sigma^2 t_1] (t_k \sigma_1^2 (1 - \rho_0^2) + \sigma^2)}} \quad (23)$$

avec :

L_i désignant la différence de la valeur logarithmique du signal entre l'instant t_i et t_{i-1} , $L_i = L(t_i) - L(t_{i-1})$ pour $i=1, 2, 3, \dots$ avec $L_1 = L(t_1)$.

$$A = \frac{1}{\sigma_0^2 (1 - \rho_0^2)}, \quad B = \frac{1}{\sigma_1^2 (1 - \rho_0^2)}$$

$$C = \frac{\mu_0}{\sigma_0^2 (1 - \rho_0^2)} - \frac{\mu_1 \rho_0}{\sigma_0 \sigma_1 (1 - \rho_0^2)}$$

$$D = \frac{\mu_1}{\sigma_1^2 (1 - \rho_0^2)} - \frac{\mu_0 \rho_0}{\sigma_0 \sigma_1 (1 - \rho_0^2)}, \quad E = \frac{-\rho_0}{\sigma_0 \sigma_1 (1 - \rho_0^2)}$$

Étant données les observations du signal de dégradation partielle $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_k)$ jusqu'à l'instant t_k , on définit la variable aléatoire, $S(t_k+t)$, comme la valeur du signal de dégradation après t unités de temps. N. Gebraeel et al. (2007) mentionnent que $S(t_k+t)$ suit une distribution normale avec une moyenne et une variance données comme suit :

$$\tilde{\mu}(t+t_k) = \sum_{i=1}^k L_i + \mu_{\beta'} t = L(t_k) + \mu_{\beta'} t \quad (24)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t+t_k) = \sigma_{\beta'}^2 t^2 + \sigma^2 t \quad (25)$$

Soit T une variable aléatoire dénotant la durée résiduelle jusqu'à l'atteinte du seuil V étant données les observations $S(t_1), S(t_2), \dots, S(t_k)$. T satisfait donc: $S(t_k+T) = V$.

Selon N. Gebraeel et A. Elwany (2007), la distribution de probabilités associée à la durée résiduelle avant l'atteinte du seuil est donnée par :

$$\begin{aligned} P(T \leq t / L_1, \dots, L_k) &= P(L(t+t_k) \geq \ln(V) / L_1, \dots, L_k), \\ &= 1 - P\left(Z \leq \frac{\ln(V) - \tilde{\mu}(t+t_k)}{\tilde{\sigma}^2(t+t_k)}\right) \\ &= 1 - (P(L(t+t_k) \leq \ln(V) / L_1, \dots, L_k)) \\ &= \Phi\left(\frac{\tilde{\mu}(t+t_k) - \ln(V)}{\tilde{\sigma}(t+t_k)}\right) \end{aligned} \quad (26)$$

Φ étant la loi Normale centrée réduite associée à la variable aléatoire Z .

A noter que cette formulation utilise la valeur logarithmique du signal de dégradation $L(t_k+T)$.

3.3. Algorithme de résolution

Nous proposons l'algorithme suivant pour générer la séquence optimale d'inspection selon la nouvelle stratégie impliquant la mise à jour de la fonction de distribution, ϕ , à l'issue de chaque inspection ayant révélé que le système est en bon état de marche.

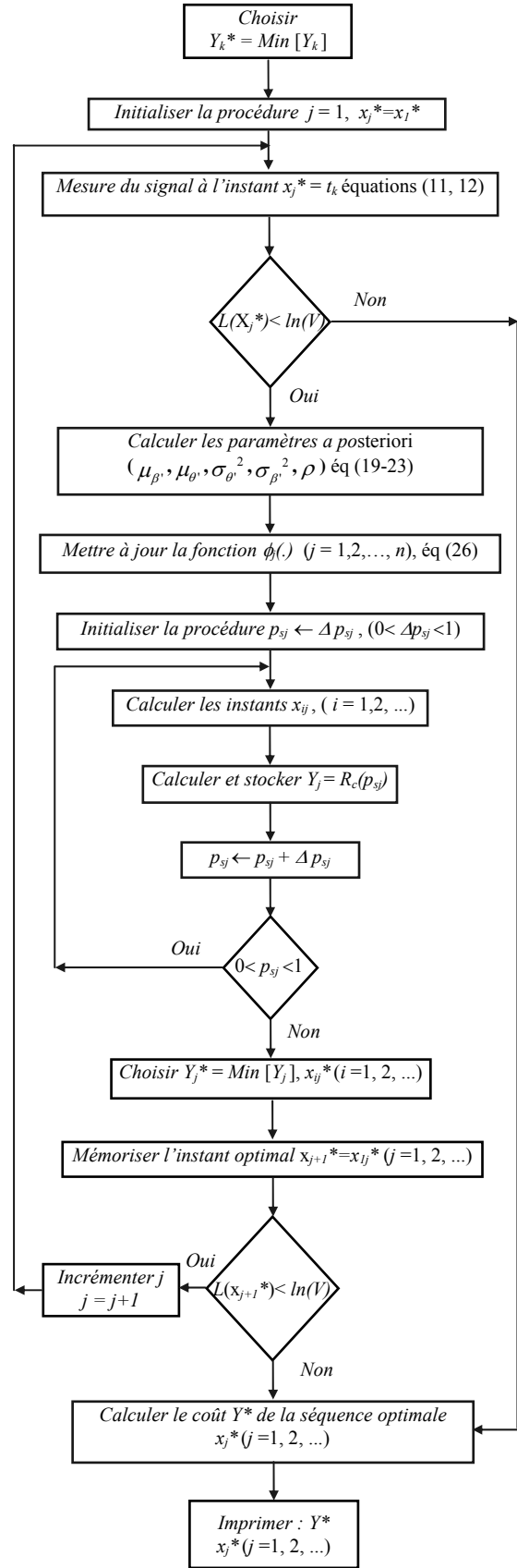
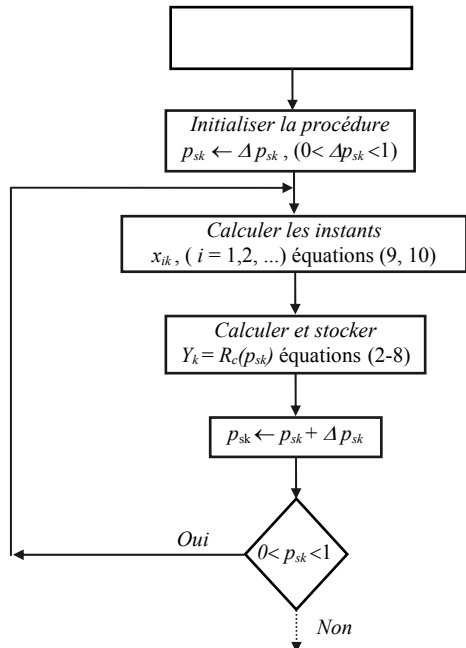


Figure 3. Algorithme de calcul pour un modèle de surveillance et de remplacement conditionnel avec mise à jour de la fonction de distribution des durées d'atteinte du seuil limite d'alerte

L'utilisateur introduit les deux distributions $\phi_1(.)$ et $F(.)$. Il introduit ensuite les coûts C_b, C_d, C_g, C_p ainsi que la durée H . La procédure est alors initialisée avec une petite valeur de p_s voisine de 0.1, ainsi que les paramètres a priori $\mu_0, \mu'_1, \sigma^2_0, \sigma^2_1, \rho_0$ issus de l'expérience (tels que décrits dans la section 3.2.1).

Une première séquence optimale d'inspection ($x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots$) est alors déterminée. L'algorithme retient la valeur du premier instant x_1^* , le signal de dégradation est alors mesuré à cet instant. Si le système est trouvé en état de marche, la valeur mesurée du signal est utilisée pour la mise à jour de la fonction de distribution $\phi_1(.)$ pour obtenir $\phi_2(.)$ en utilisant la procédure décrite dans la section 3 et aboutissant à l'équation (26). Cette logique de fonctionnement continue au fur et à mesure des inspections tant que l'inspection révèle que le système est en état de marche. A chaque étape, une nouvelle séquence optimale est obtenue et le premier instant de cette séquence représente l'instant de la prochaine inspection.

Rappelons enfin que la prise effective de mesure du signal et la valeur de celui-ci à chaque mesure est remplacée dans notre démarche par la formulation hypothétique que nous avons proposée dans les équations (11) et (12). Bien que ce soit une fonction arbitrairement choisie, cela ne change rien à l'approche développée. Cette approche pourra être appliquée avec n'importe quel dispositif d'inspection de tout système dont l'état ne peut être révélé que par la mesure d'un paramètre de contrôle et sa comparaison à un seuil d'alerte.

3.4. Exemple d'illustration de la stratégie modifiée

Considérons par exemple un ensemble de roulements que l'on voudrait inspecter en mesurant l'amplitude des vibrations. Cette caractéristique s'avère être un très bon indicateur de l'état actuel de détérioration de tels composants (ceci est très fréquent dans le cas des machines tournantes : moteurs, centrifugeuses, tours, turbines, etc.). Le signal vibratoire peut être capté, filtré et mesuré à l'aide d'un appareillage spécialisé.

Supposons que les différents coûts sont les mêmes que l'exemple cité à la section 2.3. La valeur du seuil d'alerte étant fixée à 0.03 VRMS, des tests de fiabilité peuvent être entrepris afin d'identifier les fonctions ϕ_1 (fonction de départ) et $F(.)$.

Nous considérons les distributions suivantes respectivement pour la durée d'atteinte du signal et pour la durée de vie résiduelle suite au franchissement du seuil :

$$\phi_1 \equiv (\mu_1 = 850, \sigma_1 = 100) \text{ en minutes et } F \equiv (\mu_2 = 200, \sigma_2 = 35) \text{ en minutes}$$

Nous reprenons exactement les paramètres de l'exemple présenté par N.Gebraeel et A. Elwany (2007). Ces derniers prennent en considération un échantillon de 25 roulements identiques. Les tests de dégradation ont

permis de déterminer les valeurs suivantes des paramètres relatifs au modèle de dégradation exponentiel :

$$\mu_0 = 6.031, \mu'_1 = 0.00806, \sigma^2_0 = 0.3464, \sigma^2_1 = 1.0347 \times 10^{-5}$$

$$\rho_0 = -0.3625, \lambda = 0$$

En appliquant la première phase de l'algorithme développé de Chelbi et Ait-Kadi (1998), on obtient la première séquence d'inspection qui est celle déjà obtenue dans (voir le tableau 1 de la section 2.3).

L'instant x_1^* correspond au premier instant d'inspection (765.7 minutes). Supposons maintenant que le système est inspecté à cet instant et qu'il est trouvé en bon état. On mesure alors la valeur du signal (amplitude de vibrations). En utilisant la forme proposée dans l'équation (12), la valeur estimée du signal à cet instant est de 0.010 VRMS, ainsi la nouvelle fonction de distribution de probabilités associée à la durée résiduelle d'atteinte du seuil d'alerte ϕ_2 équation (27) est déterminée à l'aide de l'équation (26) :

$$\phi_2 = \Phi \left(\frac{\tilde{\mu}(t+t_k) - \ln(V)}{\tilde{\sigma}(t+t_k)} \right) = \Phi \left(\frac{\tilde{\mu}(t+t_1) - \ln(V)}{\tilde{\sigma}(t+t_1)} \right) \quad (27)$$

avec $t_1 = x_1$ de la séquence optimale obtenue (tableau 1).

$$\phi_2 = \Phi \left(\frac{\tilde{\mu}(t + 765.7) - \ln(0.03)}{\tilde{\sigma}(t + 765.7)} \right)$$

Φ étant la loi Normale centrée réduite.

En réinjectant cette fonction dans le modèle du coût en en prenant soin d'utiliser, entre autres, les équations (13) et (14), on obtient la séquence suivante :

i	x_i	$x_{i+1} - x_i$
0	0	
1	815.7	815.7
2	863.9	48.2
3	896.9	33.0
4	923.0	26.1
5	944.9	21.9
6	964.1	19.2
7	997.7	33.6
8	1012.2	14.5
9	1025.7	13.5

Tableau 2. Séquence optimale d'inspection avec la fonction de distribution de probabilités d'atteinte du seuil d'alerte ϕ_2

Ainsi, l'instant optimal de la deuxième inspection est fixé à 815,7 minutes (considérant toujours le même référentiel temporel).

Tant que l'inspection révélera que le système est en bon état, on peut continuer à procéder de la même façon pour

générer à chaque fois l'instant de la prochaine inspection tenant compte de l'évolution de la dégradation du système à travers la mise à jour de la fonction de distribution ϕ . Le tableau suivant montre la séquence optimale obtenue en continuant la procédure de mise à jour.

i	x_i	$x_{i+1} - x_i$
0	0	
1	765.7	765.7
2	815.7	50.0
3	863.4	47.7
4	906.2	42.8
5	942.5	36.3
6	972.4	29.9
7	996.5	24.1
8	1015.0	18.5
9	1028.4	13.4

Tableau 3. Séquence optimale d'inspection avec mise à jour de la fonction de distribution de probabilités d'atteinte du seuil d'alerte à chaque inspection

En comparant les séquences optimales d'inspection obtenues sans mise à jour (tableau 1) et celles obtenues en faisant la mise à jour (tableau 3), il est intéressant de remarquer que dans le cas de la mise à jour les inspections sont plus éloignées les unes des autres. Le tableau suivant montre les différences aux niveaux du coût total moyen par unité de temps, de la durée du cycle et de la probabilité que ce dernier finisse par une intervention préventive. On note essentiellement que dans le cas de la mise à jour, le cycle est plus long avec un coût moyen par unité de temps moins élevé et une probabilité plus forte d'éviter un remplacement à la panne.

	Sans mise à jour de la fonction de distribution des durées d'atteinte du seuil d'alerte	Avec mise à jour de la fonction de distribution des durées d'atteinte du seuil d'alerte
Coût total moyen par unité de temps	4,326 \$/minute	4,293 \$/minute
La durée moyenne d'un cycle de remplacement	771.3 minutes	753.81 minutes
La probabilité d'éviter de faire un remplacement à la panne	95.4 %	96.87 %

Tableau 4. Tableau comparatif des résultats obtenus dans les contextes avec mise à jour et sans mise à jour de la fonction de distribution des durées d'atteinte du seuil d'alerte

4. CONCLUSION

Dans ce travail nous avons proposé une stratégie de maintenance conditionnelle de systèmes sujets à des défaillances aléatoires et dont l'état ne peut être connu que suite à une inspection. Cette stratégie se distingue par le fait que suite à toute inspection révélant que le système est en bon état, on réalise une mise à jour de la fonction de distribution associée à la durée d'atteinte du seuil d'alerte. Ceci à l'aide d'instruments de contrôle et de surveillance montés directement sur l'équipement en question. Lorsqu'elle s'avère possible, une telle démarche de surveillance et de remplacement conditionnel est recommandée en vue de prendre des décisions plus précises et plus adaptées au système sous surveillance pris individuellement en ce qui a trait à sa maintenance et en particulier aux instants optimaux où il faudra l'inspecter.

REFERENCES

- Barbera, F., Schneider, H., Kelle, P., 1996. *A condition based maintenance model with exponential failures and fixed inspection intervals*. J Oper Res Soc, 47(8), p. 1037-45.
- Christer, A., Wang, W., 1995. *A simple condition monitoring model for a direct monitoring process*, Eur J Oper Res, (82), p. 258-69.
- Chelbi, A., Ait-Kadi D., 1998. *Inspection and Predictive Maintenance Strategies*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol.11, No 3, p. 226-231.
- Gebraeel, N., Lawly, M., Lie, R., and Ryan, J., 2006. *Residual-life distribution from component degradation signals: A bayesian approach*, IIE Transactions on reliability, Vol. 37, p. 543-557.
- Gebraeel, N., Elwany, A., 2007. *Sensor-driven prognostic models for equipment replacement and spare parts inventory*. IIE Transactions, article sous presse.
- Goetsch, Roylance, B., and Moore, J., 1998. *Development of a predictive model for monitoring condition of hot strip mill*. Ironmaking and Steelmaking, Vol. 25, p. 42-46.
- Hopp, W., Kuo Y-L., 1998. *An optimal structured policy for maintenance of partially observable aircraft engine components*. Nval Res Logist, 45, p. 335-52.
- Harris, T., 2001. *Rolling Bearing analysis*, Wiley, NY.
- Pellegrini C., 1992. *Choice of a periodic on-condition maintenance policy*. Int J Prod Res, 30(5), p. 1153-73.
- Park, Kyung. S., 1988a. *Optimal Continuous-Wear Limit Replacement under Periodic Inspections*, IEEE Transaction On Reliability, Vol, 37, No.1, APRIL.
- Park, Kyung. S., 1988b. *Optimal Wear Limit Replacement with wear-dependant failures*, IEEE Transaction On Reliability, Vol, 37, p. 97-102.
- Scarf, P., 1997a. *On the modeling of condition-based maintenance*. In: Guedes Sources C, editor. *Advances in safety and reliability*. Proceedings of the ESREL'97 International Conference on safety and Reliability, June 17-20 1997, Lisbon Portugal, New York: Pergamon Press, p. 1701-8.

- Scarf, P., 1997b. *On the application of mathematical models in maintenance*. Eur J Oper Res, 99(3), p. 493-506.
- Shao, Y., and Nezu, K., 2000. *Prognosis of remaining bearing life using neural networks*, Proceeding of the Institute of Mechanical Engineer, Part I, Journal of systems and Control Engineering, Vol. 214, No. 3, p. 217-230.
- Turco, T., et Parolini, P., 1984. *A nearly optimal inspection policy for productive equipment*, International Journal of Production Research, Vol 22, No. 5, p. 1200-1208.
- Wang, J., et al., 2008. *A model to determine the optimal critical level and the monitoring intervals in condition-based maintenance*, International Journal of Production Research 38 (6), p. 1425-1436.

