

IDENTIFICATION DES MODELES D'ETAT D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Tounsia Djamah, Rachid Mansouri , Said Djennoune,

Laboratoire de Conception et Conduite des systèmes de
Production
Université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou, Algeria
djamaht_ummto@yahoo.fr;
rachid_mansouri_ummto@yahoo.fr; s_djennoune@yahoo.fr

Maamar Bettayeb

Department of Electrical & Computer Engineering
University of
Sharjah, United Arab Emirates
maamar@sharjah.ac.ae

RESUME : *Cet article traite de l'identification de modèle d'état d'ordre fractionnaire par erreur de sortie. Une méthode de optimisation non linéaire est utilisée , basée sur le calcul des fonctions de sensibilité paramétriques. Un modèle d'état fractionnaire multivariable des fonctions de sensibilité est développé et sa simulation est basée sur l'opérateur d'intégration fractionnaire. Différentes simulations illustrent les performances de la méthode.*

MOTS_CLES: *système d'ordre fractionnaire (non entier), identification, erreur de sortie, algorithme de Marquardt, fonction de sensibilité.*

1- INTRODUCTION

Les systèmes d'ordre non entier connus aussi sous le nom de filtres fractionnaires interviennent dans les processus de diffusion [1-3] présents dans divers domaines: acoustique (Matignon, 1994), électrochimie (Sabatier *et al.*, 2006), thermique (Battaglia *et al.*, 2000 ; Malti *et al.*, 2006), contrôle (Tenreiro Machado, 2002 ; Vinagre *et al.*, 2002)... Ils présentent une dynamique complexe caractérisée par la propriété de mémoire longue et une structure de dimension infinie (Oustaloup, 1995; Aoun, 2005). L'utilisation des systèmes d'ordre fractionnaire s'impose naturellement pour la modélisation, la simulation, l'identification de ces processus. Dans le but de la simulation des systèmes fractionnaires, différentes approches ont été proposées à savoir :

L'approche directe, basée sur la discrétisation numérique de la dérivée fractionnaire (Oustaloup, 1995; Samko *et al.*, 1993), permet d'obtenir une équation récurrente de type mémoire longue.

L'approche indirecte, basée sur une approximation entière continue du système à simuler, à partir de la synthèse d'opérateur de dérivation ou intégration fractionnaire fondé sur le concept de fractale à travers la récursivité (Oustaloup, 1995 ; Poinot *et al.*, 2003) .

Au-delà de la modélisation théorique et de la simulation, se pose le problème de l'identification nettement plus complexe que dans le cas entier où, l'ordre maximum du modèle étant fixé, les ordres sont distribués implicitement avec un écart unitaire et l'estimation des paramètres du modèle entier suffit pour sa description .

Dans le cas fractionnaire, l'estimation des ordres fractionnaires s'avère nécessaire au même titre que les paramètres du modèle de plus, ils interviennent non linéairement par rapport à la sortie du modèle. Deux approches d'identification sont alors à distinguer :

la première, basée sur une méthode à erreur d'équation où les ordres de dérivation d'une équation différentielle fractionnaire sont supposés connus a priori, et l'estimation paramétrique est effectuée soit par une technique moindres carrés linéaires (Le Lay, 1998 ; Lin, 2001), soit par la méthode des filtres de variables d'état continus (Cois, 2001) .

Dans la deuxième approche, les ordres de dérivation doivent être estimés au même titre que les coefficients et une méthode à erreur de sortie basée sur une technique d'optimisation non linéaire s'impose, en l'occurrence l'algorithme de Marquardt. Dans (Benchellal *et al.*, 2005) le modèle non entier est approximé par un modèle d'état entier de grande dimension, basé sur l'opérateur d'intégration fractionnaire borné en fréquence (Poinot *et al.*, 2003; Aoun 2005). L'identification consiste alors à estimer conventionnellement les paramètres de l'approximation entière. Une deuxième méthode repose sur l'estimation paramétrique d'un modèle d'état non entier sous forme modale, la sortie étant une combinaison linéaire des modes propres (Cois *et al.*, 2002). L'inconvénient des approches précédentes réside dans la complexité du calcul des fonctions de sensibilité paramétrique, nécessaire à la minimisation du critère quadratique. Le modèle de ces dernières simulé à chaque itération, diffère selon la variante de la structure du modèle considéré, et leur écriture dans le cas général ne peut pas être déduite; de même, si un modèle de dimension supérieure est considéré, le modèle des fonctions de sensibilité n'est plus valable.

C'est dans ce cadre que s'inscrit la contribution de notre papier. Elle consiste à développer une méthode d'identification à erreur de sortie, d'un modèle d'état fractionnaire basé sur l'algorithme de Marquardt. Celui-ci repose sur le calcul des fonctions de sensibilité paramétriques nécessaires pour le calcul du gradient et hessien.

Le modèle des fonctions de sensibilité paramétriques est développé sous forme d'un modèle d'état fractionnaire multivariable. Sa simulation, basée sur l'opérateur d'intégration fractionnaire bornée en fréquence, permet à chaque itération d'ajuster le vecteur de paramètres à estimer ; de cette façon l'algorithme de Marquardt est généralisé au cas fractionnaire. L'identification est effectuée sur les paramètres du modèle et non sur l'approximation elle-même. Son avantage majeur, réside dans la simplicité de formulation des fonctions de sensibilité et son applicabilité aux modèles d'ordre fractionnaire sous forme représentation d'état indépendamment de leur dimension ; de ce fait, elle permet l'identification d'un grand nombre de systèmes d'ordre fractionnaire.

Cet article est organisé comme suit : la deuxième partie rappelle les principales définitions des systèmes non entiers et leur modélisation est présentée.

La troisième partie est consacrée à l'identification par la méthode à erreur de sortie et la méthode proposée est développée en détail ; Enfin la dernière partie présente différentes simulations numériques permettant de tester les performances de la méthode, et des perspectives de recherche sont proposées.

2- MODELISATION DES SYSTEMES D'ORDRE FRACTIONNAIRE

Un système fractionnaire, monovarié, linéaire invariant, relaxé à $t = 0$, peut être décrit par l'équation différentielle d'ordre fractionnaire suivante (Oldham, and Spanier, 1974; Oustaloup, 1995; Samko *et al.*, 1993):

$$\sum_{i=1}^n a_i D^{\alpha_i} y(t) = \sum_{j=1}^m b_j D^{\beta_j} u(t) \quad (1)$$

Où $a_i, b_i \in R$; $\alpha_i, \beta_i \in R^+$; $u(t) \in R$ étant l'entrée et $y(t) \in R$ la sortie.

La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire suivant la définition de Caputo donne:

$$L[D^{\alpha} y(t)] = s^{\alpha} Y(s) - \sum_{k=0}^{r-1} s^{\alpha-1-k} y^{(k)}(0) \quad (2)$$

Pour $r-1 < \alpha < r$, r entier. $Y(s)$ représente la transformée de Laplace de $y(t)$ et $y^{(k)}(0)$ la condition initiale de la $k^{\text{ème}}$ dérivée. Utilisant ce résultat dans le cas de conditions initiales nulles, la fonction de transfert du système en est déduite :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \sum_{j=1}^m b_j s^{\beta_j} / \sum_{i=1}^n a_i s^{\alpha_i} \quad (3)$$

Dans le cas de système commensurable, les ordres de dérivation sont tous multiples d'un même nombre réel α . On a $\alpha_i = i\alpha$ et $\beta_j = j\alpha$. La fonction de transfert s'écrit :

$$G(s) = \sum_{j=1}^m b_j s^{j\alpha} / \sum_{i=1}^n a_i s^{i\alpha} \quad (4)$$

Le modèle d'état fractionnaire est défini, comme dans le cas entier, par deux équations :

Une équation d'état, dans laquelle chaque état $x_i(t)$ est dérivé à un ordre non entier α .

Une équation de sortie comme dans le cas conventionnel.

Le modèle représentation d'état du système fractionnaire s'écrit sous la forme (Oustaloup, 1995; Raynaud and Zergainoh, 1998):

$$\begin{cases} D^{\alpha} x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (5)$$

où $u \in \mathfrak{R}, y \in \mathfrak{R}, \alpha \in \mathfrak{R}^+, x \in \mathfrak{R}^n$ et $D^{\alpha} x = [D^{\alpha} x_1 \dots D^{\alpha} x_n]^T$

Dans le cas d'un système fractionnaire multivariable, la représentation d'état (5) reste valable avec $u \in R^p, y \in R^q, \alpha \in R$ et $x \in R^n$ (Mansouri *et al.*, 2007).

Un système fractionnaire (5) est dit BIBO stable (bounded input, bounded output), si les valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ de la matrice A du modèle (5), vérifient la condition de stabilité (Matignon, 1998):

$$|\arg(\lambda_i)| > \alpha \pi / 2$$

3- IDENTIFICATION DES SYSTEMES FRACTIONNAIRES

Soit le modèle d'état fractionnaire (5) à identifier, l'objectif de l'identification consiste à estimer non seulement les matrices du modèle d'état (5) mais aussi l'ordre non entier α , commun à toutes les variables d'état dans le cas commensurable. Pour réduire le nombre de paramètres à estimer, sans perte de généralité, la forme canonique commandable (6) est considérée.

$$D^{\alpha} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (6)$$

$$y = [c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n] x + [d] u$$

Le vecteur θ de paramètres à estimer comprend alors $(2n+2)$ éléments et est donné par :

$$\theta = [\tilde{\theta}, \alpha] = [a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n, d, \alpha]$$

La sortie du modèle étant non linéaire par rapport au vecteur θ , l'identification est réalisée par une méthode à erreur de sortie basée sur un algorithme de programmation non linéaire : l'algorithme de Marquardt (Marquardt, 1963).

3.1- Algorithme à erreur de sortie

Cette méthode appelée aussi méthode du modèle est caractérisée par la simulation de la sortie à partir de la

seule connaissance de l'excitation et du modèle. En conséquence, la sortie simulée est indépendante de la perturbation affectant le système (s'il n'y a pas de bouclage), (Richalet *et al.*, 1971).

L'ensemble des données est composé de K observations $\{u_k, y_k^*\}$ avec $t = kT_e$ (T_e étant la période d'échantillonnage) et $y_k^* = y_k + b_k$ où b_k est le bruit de sortie.

Soit $\hat{\theta}$ l'estimation du vecteur de paramètres exact θ . La valeur optimale de $\hat{\theta}$ est obtenue en minimisant le critère quadratique $J = \sum_{k=1}^K \varepsilon_k^2$ où $\varepsilon_k = y_k^* - \hat{y}_k$ est le résidu.

L'algorithme de L. Marquardt est utilisé pour estimer $\hat{\theta}$ itérativement (Marquardt, 1963).

$$\begin{aligned} \theta^{(i+1)} &= \theta^{(i)} - \left\{ [J_{\theta\theta}^n + \lambda I]^{-1} J_{\theta}^n \right\}_{\theta=\theta^{(i)}} \\ J_{\theta}^n &= -2 \sum_{k=1}^K \varepsilon_k \sigma_{k,\theta} \text{ le gradient à la } i^{\text{ème}} \text{ iteration} \\ J_{\theta\theta}^n &= 2 \sum_{k=1}^K \sigma_{k,\theta} (\sigma_{k,\theta})^T \text{ le Hessian à la } i^{\text{ème}} \text{ iteration} \end{aligned} \quad (8)$$

Avec λ paramètre de contrôle.

$\sigma_{k,\theta} = \partial \hat{y}(k, \theta) / \partial \theta$ la fonction de sensibilité de la sortie à l'échantillon k.

Cette technique est basée sur le calcul du gradient et du hessien, eux même dépendant de l'intégration numérique des fonctions de sensibilité. Le paragraphe suivant s'attache donc à présenter une nouvelle méthode de calcul des fonctions de sensibilité pour le cas fractionnaire.

3.1.1. Calcul des fonctions de sensibilité paramétriques

Les fonctions de sensibilité $\sigma_{y_k/\theta}$ sont les indicateurs essentiels du conditionnement de l'identification, elles traduisent l'effet de la variation d'un paramètre sur la sortie du système. Le développement en série de Taylor du 1^{er} ordre de la sortie autour de l'espace paramétrique θ , donne :

$$y(\theta + \delta\theta) - y(\theta) = \delta\theta [\partial y / \partial \theta] = \delta\theta \sigma_{y/\theta} \quad (9)$$

Il indique que la variation de la sortie du modèle peut être projetée sur la base des fonctions de sensibilité, avec une pondération égale à la variation $\delta\theta$ (Richalet *et al.*, 1971).

Etant donné, la représentation d'état (6), la méthode proposée calcule les sensibilités par rapport aux éléments des matrices A, C, D : $\sigma_{y/\tilde{\theta}_j}, j=1, 2n+1$, la sensibilité par rapport à l'ordre α étant calculée numériquement.

En pratique, il convient de définir deux sortes de fonctions de sensibilité par différentiation par rapport à $\tilde{\theta}$ de (6)

$\sigma_{y/\tilde{\theta}} = \partial y / \partial \tilde{\theta}$ où $\sigma_{y/\tilde{\theta}} \in \mathfrak{R}^{2n+1}$ la fonction de sensibilité de la sortie par rapport à $\tilde{\theta}$

$\sigma_{x/\tilde{\theta}} = \partial x / \partial \tilde{\theta}$ où $\sigma_{x/\tilde{\theta}} \in \mathfrak{R}^{n(2n+1)}$ la fonction de sensibilité de l'état par rapport à $\tilde{\theta}$

La différentiation du modèle d'état (6) par rapport à chacune des composante θ_j de $\tilde{\theta}$ donne :

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} [D^\alpha x] = \frac{\partial A}{\partial \theta_j} x + A \frac{\partial x}{\partial \theta_j} + \frac{\partial B}{\partial \theta_j} u + B \frac{\partial u}{\partial \theta_j} \text{ avec } j = 1, 2n+1 \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_j} = C \frac{\partial x}{\partial \theta_j} + \frac{\partial C}{\partial \theta_j} x + \frac{\partial D}{\partial \theta_j} u \quad (11)$$

Les équations (10) et (11) définissent un modèle d'état non entier des fonctions de sensibilité (12).

$$\begin{cases} D^\alpha \begin{bmatrix} \sigma_{x/\tilde{\theta}} \\ \sigma_{y/\tilde{\theta}} \end{bmatrix} = A_s \sigma_{x/\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial B}{\partial \tilde{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \\ \sigma_{y/\tilde{\theta}} = C_s \sigma_{x/\tilde{\theta}} + \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial \tilde{\theta}} & \frac{\partial D}{\partial \tilde{\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \end{cases} \quad (12)$$

Par simplification d'écriture nous écrivons (12) sous forme :

$$\begin{cases} D^\alpha X_s = A_s X_s + B_s U_s \\ Y_s = C_s X_s + D_s U_s \end{cases} \quad (13)$$

Avec :

$$\begin{aligned} X_s &= \sigma_{x/\tilde{\theta}} = [\sigma_{x/\theta_1} \quad \sigma_{x/\theta_2} \quad \dots \quad \sigma_{x/\theta_{2n+1}}]^T \\ X_s &= [\sigma_{x_1/\theta_1} \quad \dots \quad \sigma_{x_n/\theta_1} \quad \sigma_{x_1/\theta_2} \quad \dots \quad \sigma_{x_n/\theta_2} \quad \dots \quad \sigma_{x_1/\theta_{2n+1}} \quad \dots \quad \sigma_{x_n/\theta_{2n+1}}]^T \\ Y_s &= \sigma_{y/\tilde{\theta}} = [\sigma_{y/\theta_1} \quad \sigma_{y/\theta_2} \quad \dots \quad \sigma_{y/\theta_{2n+1}}]^T \\ U_s &= [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n \quad u]^T \\ A_s &= \begin{bmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{bmatrix}; \quad C_s = \begin{bmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ & & & C \end{bmatrix} \\ B_s &= \begin{bmatrix} \frac{\partial A}{\partial \theta_1} & \frac{\partial A}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial A}{\partial \theta_{(2n+1)}} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^{-T}, \text{ avec } \frac{\partial B}{\partial \theta_i} = 0 \\ D_s &= \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial \theta_1} & \frac{\partial C}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial C}{\partial \theta_{(2n+1)}} \\ \frac{\partial D}{\partial \theta_1} & \frac{\partial D}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial D}{\partial \theta_{(2n+1)}} \end{bmatrix}^{-T} \end{aligned}$$

Il faut noter que le modèle d'état non entier des fonctions de sensibilité est un modèle multivariable ayant pour entrées le vecteur d'état x et l'entrée u du modèle fractionnaire à identifier (6), et pour sorties les fonctions de sensibilité de la sortie par rapport à $\tilde{\theta}$. De plus il est toujours non propre (ie : $D_s \neq 0$), même dans le cas particulier, où le système à identifier (6) est propre ($D = 0$)

Pour la matrice A_s , les valeurs propres de (13) sont les valeurs propres de (6); et la stabilité de (13) est assurée. Pour la dernière composante du vecteur θ , à savoir l'ordre α , la représentation d'état ne donne pas accès au calcul de sa sensibilité par la méthode proposée, cette dernière est approximée numériquement :

$$y(k, \alpha + \delta\alpha) - y(k, \alpha) \approx \delta\alpha \cdot \partial y / \partial \alpha = \delta\alpha \cdot \sigma_{y/\alpha}$$

Pour une variation $\delta\alpha$ suffisamment faible une bonne approximation de la sensibilité $\sigma_{y/\alpha}$ est obtenue.

3.2. Mise en œuvre de la méthode d'identification

Pour la mise en œuvre de la méthode d'identification à erreur de sortie, deux modèles d'état non entiers sont simulés à chaque itération, à savoir : le modèle monovarié du système à estimer (6), permettant le calcul de la sortie y et du vecteur d'état x , et le modèle des sensibilité (13), multivarié nécessaire pour le calcul du gradient et hessien.

La simulation des deux modèles d'état fractionnaires (6) et (13) est réalisée par une approche indirecte basée sur la synthèse d'un opérateur d'intégration fractionnaire (Poinot *et al*, 2003 ; Djama *et al*, 2007 ; Mansouri *et al*, 2007), simulé avec un nombre de cellules $N_c = 30$ cellules sur une bande de fréquences $[10^{-5}, 10^5]$; Celui-ci est approximé par sa représentation d'état entière d'ordre $(N_c + 1)$.

L'approximation des systèmes non entiers s'obtient en introduisant la représentation d'état de l'opérateur d'intégration fractionnaire dans la macro représentation d'état du système à estimer. Elle est sous la forme d'un modèle d'état entier de grande dimension et peut être simulée en utilisant les méthodes classiques de simulation des systèmes entiers.

Du fait de la non linéarité de la sortie par rapport aux paramètres, le critère quadratique $J(\hat{\theta})$ n'est plus

parabolique comme dans le cas linéaire et l'unicité de l'optimum θ_{opt} n'est plus garantie (Richalet *et al.*, 1971; Ljung 1987). Une mauvaise initialisation de θ peut faire converger l'algorithme de Marquardt vers des optima secondaires. Pour résoudre ce problème, l'algorithme est implémenté à deux niveaux. Le premier niveau permet une analyse globale des optima, en utilisant une méthode 'simple search' par intervalle (l'ordre α étant limité à $]0, 2[$). Cela permet d'établir une «cartographie» du critère et des différents optima. Pour le deuxième niveau le vecteur de paramètres θ est initialisé près d'un optimum et la recherche de l'optimum global est alors affinée grâce à la méthode présentée.

Les étapes principales de l'algorithme sont données ci dessous :

1. Pour $\alpha = 0.1 : \Delta\alpha : 1$
 - a. initialiser $\tilde{\theta} = 0$
 - b. Appliquer l'algorithme Marquardt pour obtenir le critère minimum J_{local} et la solution locale correspondante $\theta_{local} = [\tilde{\theta}_{local} \ \alpha_{local}]$

- c. Garder seulement les 3 meilleures solutions locales $\theta_{i,local}$ présentant les plus petits critères J_{local} :
OPT = $[\theta_{1,local} \ \theta_{2,local} \ \theta_{3,local}]$.

2. Pour chaque élément dans OPT

- a. Récupérer ses composantes $\theta_{i,local} = [\tilde{\theta}_{i,local} \ \alpha_{local}]$
- b. affiner la recherche autour de α_{local} en utilisant un pas plus petit (par exemple $\Delta\alpha / 10$) et trouver J_{local} et θ_{local} en utilisant l'algorithme Marquardt.
- c. Garder seulement la meilleure solution = $\theta_{Optimal}$

3.3. Validation des paramètres estimés

En supposant que la séquence des erreurs de prédiction est blanche, le vecteur des paramètres estimés est un vecteur aléatoire centré sur θ , dont une estimation de sa matrice de covariance est donnée par (Ljung, 1987):

$$\text{cov}(\hat{\theta}_{opt}) = \sigma_b^2 \left[\sum_{k=1}^N \sigma_{k,\theta}^T \sigma_{k,\theta} \right]^{-1}$$

où σ_b^2 est la variance du bruit de sortie.

Les éléments de la diagonale de la matrice de covariance représentent les variances de chaque paramètre alors que les éléments hors diagonale sont les coefficients de corrélation entre deux paramètres.

4. EXEMPLES DE SIMULATION

Différentes simulations sont réalisées sur 2 modèles d'état de dimension 1: le premier apériodique ($0 < \alpha < 1$), le deuxième oscillatoire ($1 < \alpha < 2$), et sur un modèle d'état de dimension 2, pour différents rapports signal sur bruit (SNR)..

Exemple 1: Système apériodique.

$A = [-4]$; $C = [2]$; $\alpha = [0.5]$ correspondant à la fonction de transfert: $H(s) = 4/(2 + s^{0.5})$.

Le tableau 1 donne les résultats des simulations, pour différents SNR et les figures 1 à 3 montrent les réponses temporelles correspondantes.

Paramètres	A	C	α	Critère	
Réels	-4	2	0.5	/	
Estimés	Sans bruit	-4	2	0.5	3.735e-30
	SNR = 2	-4.0111	2.0089	0.49003	0.56446
	SNR = 1	-3.762	1.8913	0.49905	1.1274

Tableau 1 : Résultats des simulations

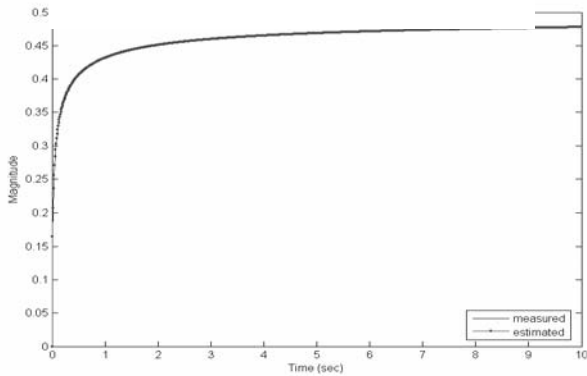


Figure 1. Réponse du système 1, cas sans bruit

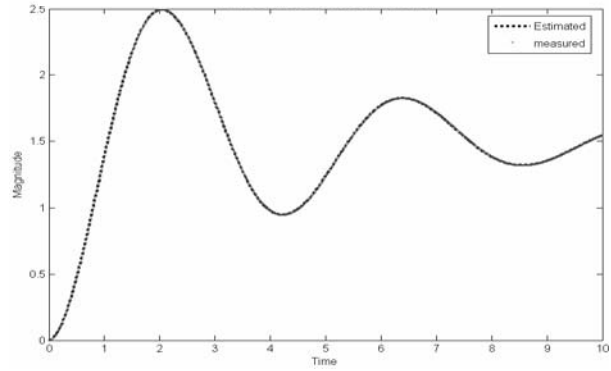


Figure 4. Réponse du système 2, cas sans bruit

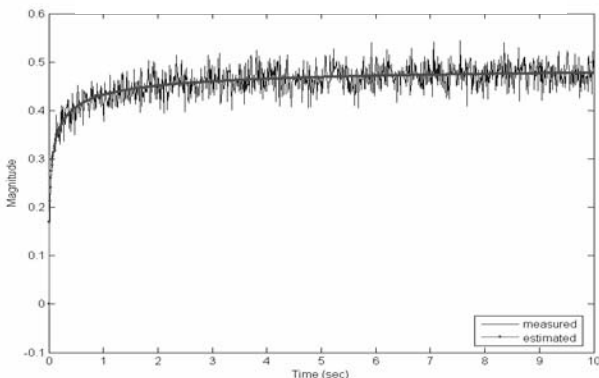


Figure 2. Réponse du système 1, cas SNR=2

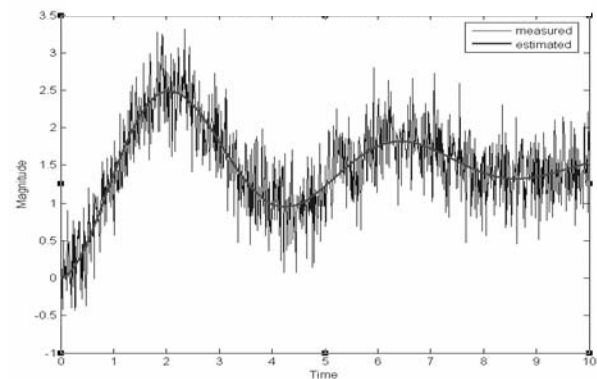


Figure 5. Réponse du système 2, SNR=2

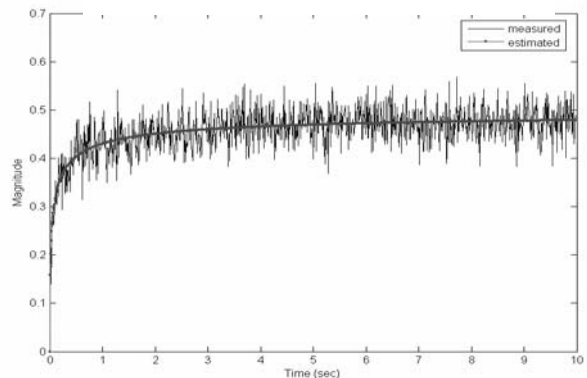


Figure 3. Réponse du système 1, cas SNR=1

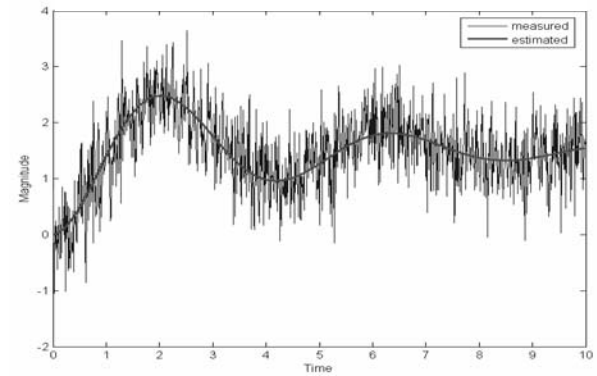


Figure 6. Réponse du système 2, SNR=1

Exemple 2: Système oscillatoire.

$A = [-2]$; $C = [3]$; $\alpha = [1.8]$; correspondant à la fonction de transfert : $H(s) = 2/(3+s^{1.8})$

Le tableau 2 donne les résultats des simulations pour différents SNR, suivent les réponses temporelles des systèmes simulé et estimé données par les figures 4, 5, 6.

Paramètres	A	C	α	Critère	
Réels	-2	3	1.8	/	
Estimés	Sans bruit	-2	3	1.8	1.2766e-26
	SNR = 2	-1.9718	2.9522	1.7988	132.22
	SNR = 1	-2.0217	3.0266	1.796	264.67

Tableau 2 : Résultats des simulations

Ces exemples montrent que l'algorithme d'identification reconstruit avec une bonne précision les caractéristiques du système fractionnaires simulé même en présence d'un pourcentage important de bruit (100%).

Exemple 3: Modèle d'état fractionnaire de dimension 2. $A = [0 \ 1; -2 \ -1]$; $C = [2 \ 3]$; $\alpha = [0.6 \ 0.6]$, correspondant à la fonction de transfert :

$$H(s) = (2 + 3s^{0.6}) / (2 + s^{0.6} + s^{1.2})$$

Le tableau 3 donne les résultats des simulations, et l'écart type des paramètres estimés pour le cas SNR=10. Les figures 7 et 8 illustrent les réponses temporelles des systèmes simulé et estimé. La figure 9 donne la réponse fréquentielle pour le cas SNR = 10.

Paramètres mesurés	Paramètres estimés		Ecart type
	Sans bruit	SNR=10	
a1 = -2	-2	-2.0187	0.00250
a2 = -1	-1	-0.9695	0.04294
c1 = 2	2	2.0101	0.00477
c2 = 3	3	2.9717	0.05005
$\alpha = 0.6$	0.6	0.5979	0.00402
Critère	5.292e-23	2.0017	/

Tableau 3 : Résultats des simulations

On note que les courbes des systèmes mesuré et estimé correspondent dans les domaines temporel et fréquentiel.

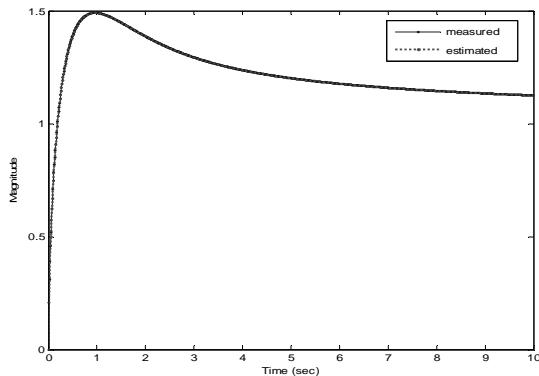


Figure 7. Réponse temporelle de l'exemple 3. Cas sans bruit

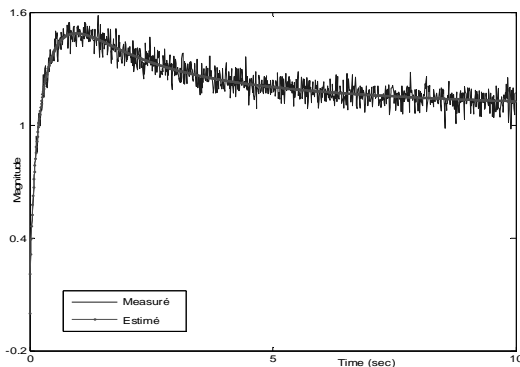


Fig 8. Réponse temporelle de l'exemple 3. Cas SNR = 10

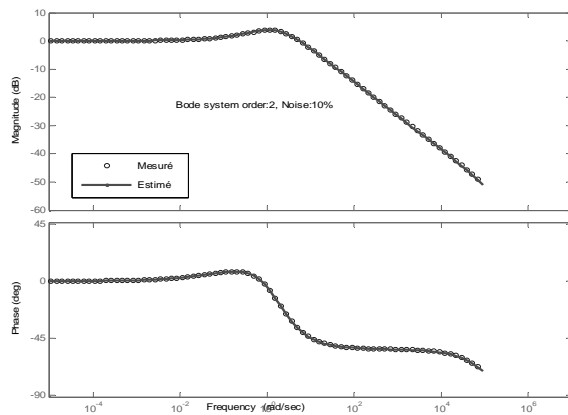


Figure 9. Réponse fréquentielle de l'exemple 3. Cas SNR = 10

Les simulations numériques effectuées, montrent l'efficacité de la méthode, pour les modèles d'état de dimension 1 et 2.

5- CONCLUSION

Une méthode d'identification à erreur de sortie d'un modèle d'état d'ordre fractionnaire est présentée dans cet article. Elle permet l'estimation des paramètres ainsi que l'ordre non entier du système. L'algorithme de Marquardt connu pour assurer une estimation non biaisée est utilisé; cependant, le point névralgique de cet algorithme est le calcul des fonctions de sensibilité paramétriques, nécessaires pour la procédure de minimisation du critère.

Dans le but de résoudre ce problème, un modèle d'état non entier, multivariable des fonctions de sensibilité est développé, et sa simulation repose sur l'opérateur d'intégration fractionnaire. Ceci permet de généraliser l'algorithme de Marquardt au cas fractionnaire. L'intérêt de la méthode est sa flexibilité d'application à différentes structures de systèmes de systèmes fractionnaires, du fait de la possibilité de conversion à un modèle d'état non entier. De plus le modèle des fonctions de sensibilité développé reste valable, indépendamment de la dimension du modèle d'état considéré ; de cette façon, permet l'identification d'un nombre important de de systèmes d'ordre fractionnaires. Les simulations numériques effectuées, montrent l'efficacité de la méthode même en présence d'un pourcentage important de bruit.

La prochaine étape de ce travail consistera à généraliser la méthode au cas de systèmes non commensurables.

REFERENCES

- Aoun, M. (2005). *Systèmes linéaires non entiers et identification par bases orthogonales non entières*. Thèse de doctorat, université de Bordeaux I, Talence, France, oct. 2005.
- Battaglia, J.L., L. Le Lay, J.C. Batsale, A. Oustaloup, O. Cois (2000). *Heat flow estimate through inverted not integer identification models* In Int. J. of Thermal Science, **39** (3), pp. 374-389.
- Benchellal A., T. Poinot, J. C. Trigeassou (2005) *Approximation and identification of fractional systems*, In: International Design Engineering Technical Conferences (ASME, IDETC). September 2005. Long Beach, California, USA.
- Cois, O., A. Oustaloup, E. Battaglia, and J.L. Battaglia, (2002). *Not integer model from modal decomposition for time domain identification*, 41st IEEE CDC' 2002 Tutorial Workshop 2, Las Vegas.
- Cois, O., A. Oustaloup, T. Poinot, J.L. Battaglia (2001). *fractional state variable filter for system identification by fractional model*. In conf proc. ECC 2001. Porto, Portugal.
- Djamah, T., R. Mansouri, S. Djenoune, S. Guermah, M. Bettayeb (2007). *Identification of fractional system with optimal reduced integer order model*. 2nd Int.

- Conf. on modeling, simulation and applied optimization ICMSAO'07, Abu Dhabi, UAE.
- Le Lay L., (1998). *Identification fréquentielle et temporelle par modèle non entier*. These de Doctorat, Université de Bordeaux 1, France.
- Lin, J., (2001), *Modélisation et identification de systèmes d'ordre non entier*. Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, France.
- Ljung, L., (1987). *System identification: theory for the user*. Prentice Hall, London.
- Malti R., M. Aoun, J. Sabatier, A. Oustaloup (2006). *Tutorial on system identification using fractional differentiation models*. In 14 IFAC symposium on system identification, New Castle, Australia.
- Mansouri R., M. Bettayeb, T. Djama, S. Djenounne (2007). *Multivariable fractional order system approximation using the integral representation*. accepted at 46 IEEE conf on decision and control, New Orleans, Louisiana USA. December 12-14.
- Marquardt D.W. (1963). *An algorithm for least squares estimation of non linear parameters*. J. Soc. Industr. Appl. Math, 11(2), pp. 431-448, Paris France.
- Matignon D. (1994). *Représentations en variables d'état de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, France.
- Matignon D., (1998) *Stability properties for generalized fractional differential systems*, In Proc. of the colloquium FDS' 98: Fractional differential systems: Model, Methods and Applications, n° 5, Paris, pp. 145-158.
- Oldham, K. B. and J. Spanier, (1974). *The fractional calculus*. Academic Press, New York.
- Oustaloup A. (1995). *La dérivation non entière: Théorie, synthèse et applications*. Hermès, Paris.
- Poinot, T., and J.C. Trigeassou (2003). *Modelling and simulation of fractional systems using a non integer integrator*. 1st symposium on fractional derivatives and their applications at 19th Biennial conf. on mechanical vibration and noise, ASME-DETC, Chicago.
- Raynaud H. and A. Zergainoh, (1998). *State-space representation of fractional linear filters*, in Proc. IFAC System Conference, Structure and Control, Nantes France.
- Richalet, J., A. Rault, R. Pouliquen, (1971). *Identification des processus par la méthode du modèle*. Gordon and Breach.
- Sabatier J., M. Aoun, A. Oustaloup, G. Gregoire, F. Ragot, P. Roy, (2006). *Estimation of lead acid battery state of charge with a novel fractional model*, In proc IFAC workshop on fractional differentiation and its applications, pp.362-67, Porto, Portugal.
- Samko S. G., A. Kilbas, O.I. Marichev (1993). *Fractional integrals and derivatives: theory and applications*. Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam.
- Tenreiro Machado J.A., (2002) *Special issue on fractional calculus and applications*, In: Non linear dynamics, 29, pp. 1-385.
- Vinagre B.M., Y.Q. Chen, (2002). *Lecture note on fractional calculus in automatic control and robotics*, In 41st IEEE CDC Tutorial Workshop 2, Las Vegas, USA.