

ANALYSE PAR SIMULATION DE L'IMPACT DE LA MODELISATION DU TEMPS DE SERVICE AVEC UNE DISTRIBUTION HEAVY-TAILED : ETUDE DE CAS D'UN ATELIER DE MAINTENANCE AUTOMOBILE

Jorge A. ALVARADO VALENCIA

Departamento de Procesos Productivos
Pontificia Universidad Javeriana
Kra. 7 No. 40 – 62, Bogotá, COLOMBIE
jorge.alvarado@javeriana.edu.co

Jairo R. MONTOYA-TORRES

Escuela de Ciencias Económicas y Administrativas
Universidad de La Sabana
Km. 21 autopista norte de Bogotá, Chía, COLOMBIE
jairo.montoya@unisabana.edu.co

Lina M. RANGEL MARTINEZ

Departamento de Procesos Productivos
Pontificia Universidad Javeriana
Kra. 7 No. 40 – 62, Bogotá, COLOMBIE
lina.rangel@gmail.com

RESUME : *L'utilisation des modèles de lois de potence pour représenter le temps de service dans les modèles de files d'attente fait possible l'analyse de situations atypiques non modélisables avec les distributions de probabilité traditionnelles (par exemple, la loi exponentielle). À partir d'un modèle préliminaire d'un atelier de maintenance automobile dont les temps de service avaient été modélisés avec des distributions exponentielles, notre étude montre qu'un modèle basé sur les lois de potence est bien beaucoup plus cohérent avec le comportement réel du système et avec la théorie de files d'attente et permet de mieux étudier le comportement du système à partir des données recueillies.*

MOTS-CLES : *files d'attente, modélisation, simulation, temps de service, lois de potence.*

1 INTRODUCTION

La théorie de files d'attente a un rôle très important dans l'analyse de performances d'une grande variété de systèmes de production, logistiques et de communication. L'un des piliers de la théorie de files d'attentes est le fait que les files peuvent être modélisées par des chaînes de Markov à temps continu. Ceci permet l'utilisation de la distribution exponentielle afin de faciliter le traitement mathématique et informatique du modèle et le calcul des indicateurs de performance.

Toutefois, les résultats récents ont montré que les hypothèses statistiques que cette approche sous-entend peuvent ne pas toujours être satisfaites dans la pratique. Un exemple crucial est le constat empirique que les distributions « heavy-tailed » sont bien plus appropriés pour modéliser le trafic des réseaux de communication (Zwart, 2001) et d'autres applications souvent retrouvées dans la pratique en télécommunications, finance, transport de produits dangereux, etc. (Adler et al., 1998, Benson, 1999, Hosking, 1999, Schmitt et al., 1999, Brill, 2000, Zwart, 2001, Barbási, 2005).

Ces nouvelles perspectives théoriques pour la modélisation des temps de service dans les systèmes de

files d'attente permettent de réviser des travaux pour les lesquelles les données n'avaient pas été modélisées correctement (Barabási, 2005). Dans cet article, nous étudions le cas des ateliers de maintenance automobile de General Motors en Colombie. Dans des travaux précédents (Alvarado, 2004), ces ateliers avaient été étudiés à l'aide d'un modèle de simulation en modélisant les temps de service avec des distributions classiques de type exponentielles. Cependant, en observant en détail le comportement des données recueillies, il est possible de constater que la loi exponentielle n'est pas le modèle qui représente le mieux le comportement du système. Dans cet article, nous proposons un modèle alternative du système en mieux représentant les temps de service avec des lois de potence « heavy-tailed ». Nous comparons les résultats de simulation obtenus avec le premier modèle basé sur les lois exponentielle et le notre. Ainsi donc, cet article permet d'analyser par simulation de l'impact d'un modèle de lois de potence pour représenter les temps de service avec des données atypiques sur les performances du système.

Cet article est organisé comme suit. La section 2 présente quelques concepts de base sur les lois de potence « heavy-tailed ». Le cas d'étude industriel est présenté dans la section 3. La section 4 est dédiée au modèle de

simulation développé sous Arena®. La section 5 présente les résultats des simulations. Cet article termine dans la section 6 avec une discussion et les conclusions du travail.

2 LES LOIS DE POTENCE « HEAVY TAILED »

L'un des principaux intérêts de la théorie des files d'attente est l'estimation des distributions de probabilités pour le temps d'attente et les longueurs des files de clients en état stable. Ceci permettra de concevoir de façon optimale le système et calculer ses performances. Cependant, il n'y a qu'un petit nombre de cas théoriques pour lesquels il est possible de trouver des distributions de probabilités ou des expressions précises permettant de modéliser les paramètres de temps d'attente et/ou la longueur de la file d'attente en fonction des six éléments fondamentaux du système définis par Kendall et Lee en 1955 (Hillier et Lieberman, 2002). Deux des distributions très largement utilisées pour modéliser aussi bien les temps de service que les temps inter-arrivées dans un système de files d'attente sont la distribution exponentielle et la distribution Erlang. Elles sont toutes les deux basées sur un processus d'arrivée de Poisson.

En ce qui concerne les temps inter-arrivées, la justification théorique du modèle de Poisson est bien connue (Gross, 1998). Cependant, cette justification n'est pas aussi évidente pour expliquer le comportement des temps de service comme un processus de Poisson (Hillier et Lieberman, 2002). Pour cela, la raison pour que les modèles M/M ou M/E soient les plus utilisés est principalement basée sur le traitement mathématique relativement facile, et non pas en raison de l'utilité pour modéliser le comportement réel. Ce problème fut étudié par Cohen (1973) et Pakes (1975), qui ont montré que pour les systèmes M/G/1/FIFO/ ∞/∞ (système avec arrivée exponentielles, temps de service suivant une distribution générale, un seul serveur, politique de service « premier arrivé, premier servi » et capacités de service et population infinies) les distributions de probabilité des temps inter-arrivées et de service étaient bornées, mais pas définies de manière fermée, si et seulement si le temps de service a des valeurs finies pour la moyenne et la variance.

Le modèle de probabilité proposé par Barabási (2005) suggère un traitement des temps de service à partir de lois de potence. La communauté académique est de plus en plus intéressée par l'étude de celles-ci dans l'analyse des files d'attente pour au moins deux raisons. D'une part, les lois de potence permettent d'approcher le modèle au comportement réel du système étudié. D'autre part, d'un point de vue théorique, les lois de potence sont un véritable challenge car sa moyenne et sa variance ne convergent pas (Stidham, 2002). Les fonctions régies par

les lois de potence sont un sous-ensemble des fonctions dites « heavy tailed », où se trouvent aussi les lois sous-exponentielles et les lois stables (« stable laws ») (Stidman, 2002).

Définition : Soit X une variable aléatoire non négative, sa fonction de répartition est donnée par $F(x) = \Pr(X \leq x)$ et sa fonction de répartition complémentaire $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \Pr(X > x)$. Une fonction de distribution pour la variable aléatoire X est dite « heavy tailed » si $\bar{F}(x) > 0$, $x \geq 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \Pr(X > x + y | X > x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x + y)}{\bar{F}(x)} = 1,$$

avec $y \geq 0$. ◀

Si $a(x) \sim b(x)$ veut dire que $[a(x)/b(x)] \rightarrow 1$ tel que $x \rightarrow \infty$, alors il est possible de réécrire l'expression précédente comme $\bar{F}(x + y) \sim \bar{F}(x)$, $\forall y \geq 0$.

L'ensemble de distribution « heavy tailed » est noté par \mathcal{L} et on utilise la notation $F \in \mathcal{L}$ ou $X \in \mathcal{L}$.

Whitt (2000) a démontré que si le temps de service suit une loi de distribution de probabilité « heavy tailed », alors la longueur de la file et le temps d'attente suivront aussi une distribution « heavy tailed » bornée par certains paramètres.

3 PRESENTATION DU CAS D'ÉTUDE : UN ATELIER DE MAINTENANCE AUTOMOBILE

Afin d'étudier expérimentalement l'impact de la modélisation des temps de service sur la performance globale d'un système de files d'attente, nous prenons comme cas d'étude les ateliers de maintenance automobile de la compagnie General Motors localisés à Bogotá, Colombie. Comme indiqué avant, les travaux présentés dans cet article sont une extension des travaux présentés dans (Alvarado, 2004) sur ces mêmes ateliers.

Selon le type de maintenance pouvant être réalisée, les ateliers sont classifiés soit de type I, où il n'y a qu'une seule entrée et segmentation des activités effectuées dans l'atelier, soit de type II, avec multiples entrées indépendantes pour les services de maintenance de châssis et peinture, ChevyExpress et mécanique (voir figura 1).

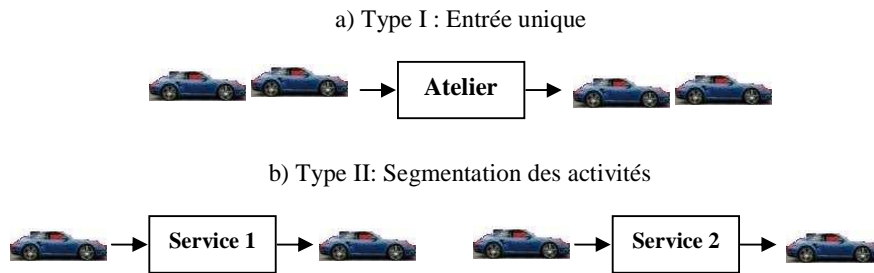


Figure 1. Types d'ateliers chez General Motors Colombie

Dans les travaux précédents réalisés sur ces ateliers, l'objectif d'Alavado (2004) était de trouver des stratégies permettant la spécialisation des techniciens et la conception de leurs programmes de formation correspondants. Pour la conception des stratégies de formation des techniciens de maintenance des ateliers, il était nécessaire d'étudier le comportement des files d'attente générée à chaque type de service et le niveau d'utilisation des ressources (personnel de maintenance) selon les demandes de service de maintenance. Cette analyse fut réalisée à l'aide d'un modèle de simulation à événements discrets sous Arena®. La façon dont ce modèle a été développée, ainsi que les modifications apportées par notre étude sont décrites en détail dans la section suivante. La figure 2 illustre le modèle construit.

Afin de réaliser les simulations, il était nécessaire de définir les paramètres du modèle, et en particulier de définir la distribution de probabilité permettant de modéliser le comportement des temps de service lors d'une demande de maintenance dans l'atelier. Pour ce faire, le travail d'Alvarado (2004) avait trouvé une approximation des temps de service dans l'atelier par une distribution exponentielle, générée à partir d'un processus de Poisson. Cette conclusion fut obtenue grâce au test de Kolmogorov-Smirnov en analysant un échantillon composé de 84 données prises de façon aléatoire. Avant de mettre en place ce test, un groupe de 15 données ont été supprimé de l'échantillon en raison de son comportement atypique *vis-à-vis* du modèle de Poisson proposé (Hair, 2006).

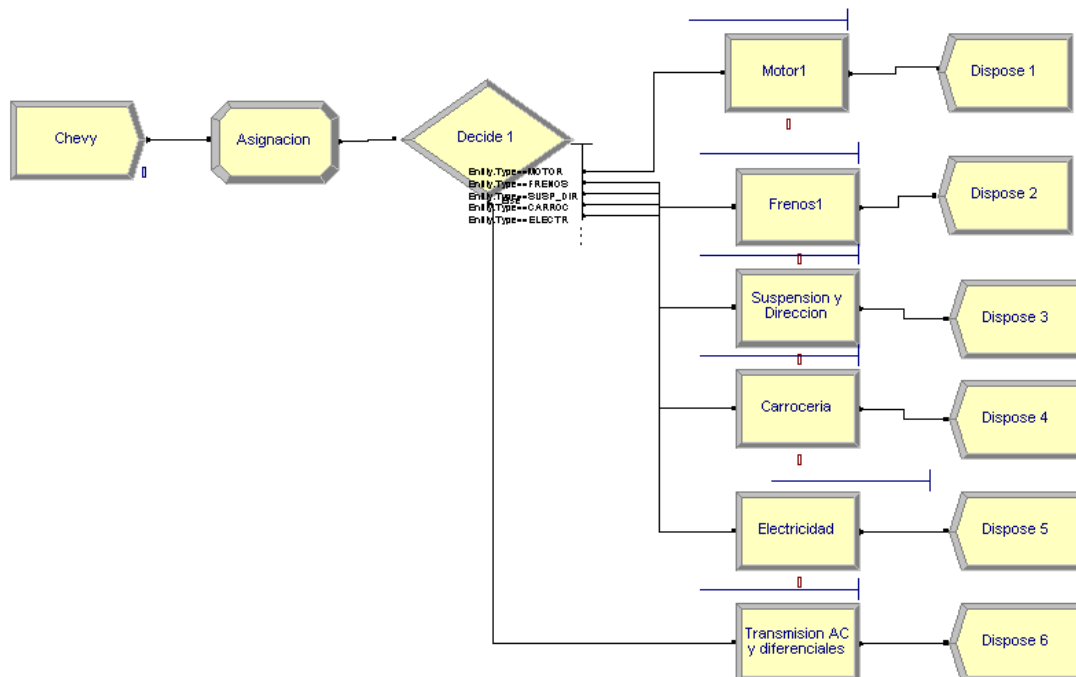


Figure 2. Modèle sous Arena® de l'atelier de maintenance automobile étudié

La théorie dans la littérature sur les nouvelles possibilités de modélisation fournie par les lois de puissance, et en particulier les distributions « heavy tailed », permet le développement d'une autre analyse de cette situation. La figure 3 présente la graphique log-log des 84 données originales obtenues pour modéliser le temps de service dans l'atelier de maintenance automobile. Le graphique a été ajusté à des intervalles de classe logarithmiques (« logarithmic binning ») comme suggéré par plusieurs auteurs (Newman, 2006 ; Adamic, 2006). Le fait d'avoir obtenu une droite suggère une représentation des données par une distribution de lois de puissance. Cette hypothèse fut ensuite constatée par un coefficient de corrélation élevé entre les logarithmes de marques de classe des temps de service et les logarithmes des fréquences observées pour chaque classe ($r^2 = 0.98$).

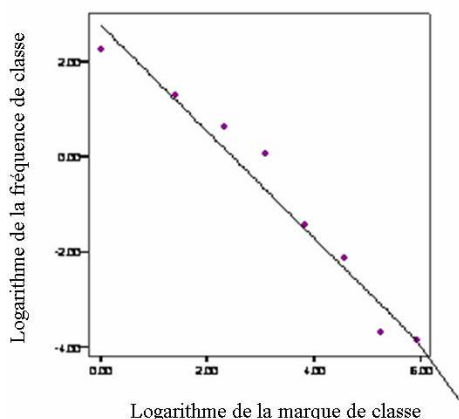


Figure 3. Graphique log-log pour le temps de service

4 SIMULATION DE L'ATELIER

Comme indiqué plus haut, le développement du modèle de simulation est basé sur le même échantillon de 84 données recueillies par Alvarado (2004). Nous avons effectué le test de Kolmogorov-Smirnov (K-S) afin de tester l'approximation des données aux distributions exponentielle, Pareto (très utilisée par les lois de puissance) et lognormal. Il est important de remarquer qu'il y a une forte relation entre ces deux dernières (Mitzenmacher, 2004). Le tableau 1 ci-après présente les résultats obtenus des tests. La figure 3 précédente correspond au graphique log-log des données, ajusté par intervalles de classe logarithmiques (« logarithmic binning »), tel que suggéré par Newman (2005) et Adamic (2006). D'après les résultats, il est possible d'observer que les distributions lognormal et Pareto sont les meilleures candidates pour représenter le comportement des données du temps de service dans l'atelier. Notre objectif est donc d'analyser la pertinence de ces distributions par rapport à la distribution exponentielle utilisée dans la première étude.

	Distribution		
	Exponentielle	Pareto	Lognormal
p-value	0,01744	0,2	>0,15
Valeur K-S	0,268		0,144

Tableau 1. Résultats du test de Kolmogorov-Smirnov

A partir de ces résultats, nous avons conçu un plan d'expériences afin de comparer les résultats obtenus par le modèle d'Alvarado (2004) et le nôtre. Comme expliqué précédemment, le modèle d'Alvarado est basé sur une représentation des temps de service dans l'atelier à partir d'une distribution exponentielle, alors que le nôtre considère les lois de puissance pour modéliser ces temps de service. Afin de mieux approcher les deux expériences de simulation, nous avons considéré un modèle d'atelier identique à celui d'Alvarado (2004), comme illustré par la figure 2 préalablement présentée. La distribution pour le temps inter-arrivées est exponentielle de moyenne 0.42 heures par automobile. Les pourcentages définis dans le modèle pour déterminer le type de maintenance à effectuer sont présentés dans le tableau 2 et ont été obtenus à partir de données historiques.

Type de maintenance	Pourcentage
Moteur	89%
Freins	5%
Suspension ou direction	3%
Châssis	2%
Electricité	1%
Transmission, climatisation	1%
TOTAL	100%

Tableau 2. Type de maintenance

Nous avons effectué un total de 300 répliques avec une longueur de 65 heures de travail simulé pour chaque réplique. La période de montée en puissance du modèle est considéré comme étant une semaine ; par conséquent, les données obtenues pendant cette période n'ont pas été prises en compte dans l'analyse des résultats.

La génération de nombres aléatoires pour obtenir les réalisations des temps de service dans le modèle ont été effectuées à partir des distributions de probabilité Pareto et lognormal. La distribution de Pareto n'étant pas disponible dans la configuration standard d'Arena®, pour obtenir les réalisations des temps de service dans l'atelier, nous avons dû générer les nombres aléatoires en utilisant une estimation des paramètres. Les estimateurs du maximum de vraisemblance sont obtenus à partir des expressions $\hat{a} = \min_i x_i$ et $\hat{b} = n / \sum_i (\ln x_i - \ln \hat{a})$.

La distribution de densité de probabilité est donnée par $1 - (x/a)^{-b}$, avec $x \geq a$, alors que l'expression pour la génération des nombre aléatoires est définies par $b / (1 - UNIF[0,1])^{1/a}$.

La distribution lognormal étant disponible sous Arena®, les paramètres requis, moyenne μ et écart-type σ , sont estimés à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance comme suit :

$$\hat{\mu} = \exp \left[\frac{\sum_i \ln x_i}{n} + \frac{\sum_i \left(\ln x_i - \frac{\sum \ln x_i}{n} \right)^2}{2n} \right]$$

Et

$$\hat{\sigma}^2 = e^{-1} \left[\frac{\sum_i \left(\ln x_i - \frac{\sum \ln x_i}{n} \right)^2}{n} \right] - 1 * e^{-\frac{2 * \sum_i \ln x_i}{n} + \frac{\sum_i \left(\ln x_i - \frac{\sum \ln x_i}{n} \right)^2}{n}}$$

Les processus et composants utilisés dans les modèles sont identiques dans les deux cas : modèle d'Alvarado et le nôtre. Les changements essentiels se trouvent uniquement dans la configuration de chaque section quant à l'expression génératrice des nombres aléatoires.

5 RESULTATS

Les résultats obtenus des simulations sont analysés ci-après. Le tableau 3 présente le nombre de répliques où un type de service demandé a été effectivement terminé à la fin de la simulation. En général, remarquons que le plus petit nombre de répliques se trouve dans la colonne correspondant à la distribution de Pareto, dans cinq des six types de service. L'exception se trouve être la maintenance de la transmission de la voiture : il est possible qu'en raison de la nature de leur distribution génératrice, les temps de service soient trop long provoquant que la finalisation du premier service ne s'effectue pas avant la fin de la réplique.

Type de maintenance	Type de distribution pour le temps de service			Total
	Lognormal	Pareto	Expo.	
Moteur	300	290	300	890
Freins	54	26	46	126
Suspension ou direction	206	140	199	545
Châssis	174	114	168	456
Electricité	56	30	49	135
Transmission, climatisation	4	8	9	21
Total	794	608	771	2173

Tableau 3. Fréquence de services effectués par type de service et distribution

Une analyse de variance (ANOVA) à facteur unique a été réalisée. Le facteur d'entrée considéré a été la distribution d'origine pour le temps de service et la variable de sortie a été le temps d'attente moyen (Wq). Cette procédure a été appliquée à chacune des six types de service de maintenance. Lorsque les variances n'étaient pas homogènes, nous avons utilisé le test robuste de Brown-Forsythe afin de comparer l'égalité des moyennes de temps de service pour chaque niveau du facteur. Les valeurs p et d'autres informations pertinentes du test pour chaque temps de service sont présentées au tableau 4.

Type de maintenance	Test d'égalité des moyennes	Test de Levene
Moteur	< 0.001	< 0.001
Freins	0.656	0.496
Suspension ou direction	0.94	< 0.001
Châssis	0.275	0.01
Electricité	0.369	0.430
Transmission, climatisation	0.611	0.341

Tableau 4. Valeurs p (« p -value ») des tests d'égalité de moyennes et homogénéité de variances

Les résultats de ces tests ont permis de classer les services dans trois groupes :

- 1- Services avec faible nombre de répliques effectives (inférieure à 100 pour toutes les distributions) et avec égalité de moyennes et homogénéité de variances : maintenance au niveau du système électrique, des freins et de la transmission.
- 2- Services avec un nombre de répliques effectives légèrement supérieur à la catégorie précédente (entre 100 et 210) et égalité de moyennes, mais avec non homogénéité de variances : maintenance du châssis et de la suspension.
- 3- Un service avec le plus grand nombre de répliques effectives (entre 290 et 300) et avec inégalité de moyennes et non homogénéité de variances : maintenance du moteur.

Dans le cas du premier groupe, la modélisation avec n'importe laquelle des trois distributions ne génère pas de différence significative dans les résultats obtenus par simulation. Il est important de remarquer que la puissance du test est proche au 90% pour une différence significative de 3.5 heures d'attente entre les moyennes de traitement d'électricité et freins (14.8% et 12.9% de la moyenne globale). Dans le cas du service de transmission, la différence significative détectable avec puissance du 90% est proche de 1.07 heures (269.4% de la moyenne globale). Ceci fait que les résultats du service de maintenance de transmission soient véritablement inacceptables, en comparaison avec les résultats obtenus en électricité et freins. A partir de cette analyse, on peut

conclure que pour les services de maintenance d'électricité et freins, la modélisation des temps de service avec n'importe laquelle de ces trois distributions ne présente pas de différence statistiquement significative dans les moyennes de temps d'attente avec $\alpha = 5\%$ et $\beta = 90\%$. Également, nous n'avons pas trouvé de différence significative entre les variances des temps d'attente simulés à partir des trois distributions testées (valeurs $p > 0.3$) pour les services d'électricité, freins et transmission.

D'un autre coté, les services de maintenance du châssis et de la suspension n'ont pas présenté de différence significative des moyennes de temps d'attente lors de la modélisation avec les trois distribution testées, avec $\alpha = 5\%$ et $\beta = 90\%$, et différence significative de 2.8 heures (c'est à dire, 12.86% et 12.24% de la moyenne globale, respectivement). Néanmoins, il y a eu de différence significative entre les variances des temps d'attente. En particulier, avec une niveau de confiance de 95%, la variance du temps de service modélisé avec la distribution Pareto est supérieure à celui modélisé avec la distribution lognormal pour le service de châssis, alors que la variance avec la distribution Pareto est supérieure à toutes les autres distributions pour le service de maintenance de suspension Cette variabilité implique que la probabilité d'avoir une plus longue attente augmente, même si le temps moyen d'attente est le même.

Un cas particulier est la maintenance du moteur, qui correspond au 90% de tous les services de maintenance fournis par l'atelier. Pour ce type de service, un temps d'attente significativement supérieur est obtenu lorsque le temps de service est modélisé avec les distributions lognormal et exponentielle qu'avec la distribution Pareto (voir tableau 5). Néanmoins, la variance des temps d'attente avec la distribution Pareto est significativement plus élevée qu'avec les distributions lognormal et exponentielle. En fait, lorsque le service de maintenance doit être effectué sur le moteur, le temps d'attente modélisé avec est supérieur à celui modélisé avec la distribution lognormal dans le percentile 70, et supérieure à celui de la distribution exponentielle dans le percentile 75, comme illustré dans la figure 4.

Dist. <i>i</i>	Dist. <i>j</i>	Intervalle de confiance	
		Lim. Inf.	Lim. Sup.
Lognormal	Pareto	2.548	5.471
Exponentielle	Pareto	2.817	5.770
Exponentielle	Lognormal	-0.398	0.967

Variable dépendante : moyenne des observations

Type de service : Moteur

Test : Tamhane

Unités : heures

Tableau 5. Intervalle de confiance pour la différence de moyennes des temps d'attente pour le service de maintenance moteur

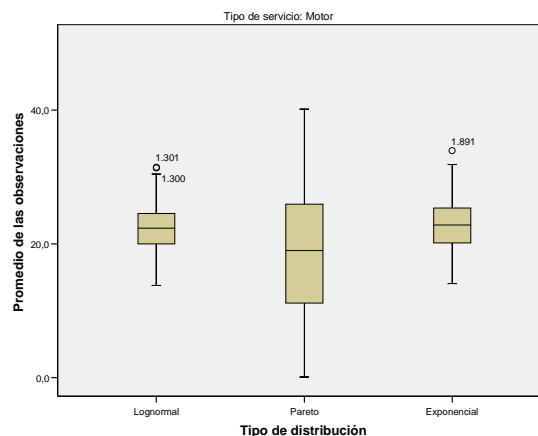


Figure 4. Diagramme de temps d'attente pour le service de maintenance du moteur

6 CONDITIONS POUR LA GENERALISATION DES NOS RESULTATS

La généralisation de nos résultats et la possibilité de la modélisation de temps de service à l'aide des lois de potences dépendra en grande mesure si l'objectif est de représenter un service avec des priorités perçues. Ces cas sont fréquemment retrouvés lorsque le service à rendre n'est pas complètement défini lors de l'arrivée des entités (par exemple, ateliers de maintenance, service après-vente, service juridiques) ou lorsque le service de l'entité qui est en première position dans la file peut être retardé sans générer abandons ou surcoûts (par exemple, les courriers électroniques) (Rangel Martínez, 2007).

7 CONCLUSIONS

Dans cet article, nous avons analysé, à l'aide de la simulation, l'impact d'un modèle de lois de potence « heavy-tailed » pour représenter les temps de service avec des données atypiques sur les performances d'un système à événements discrets. Nous avons étudié le cas des ateliers de maintenance automobile de la compagnie General Motors en Colombie. L'implémentation des nouvelles théories proposées par Barabási (2005) sur les lois de potence nous a permis d'observer des différences significatives pour le temps de service dans certains types de service de maintenance dans l'atelier, et en particulier, sur le service les plus fréquemment demandé par les clients : la réparation du moteur. L'affectation des travaux aux techniciens basée sur des priorités définie à l'aide d'une distribution Pareto (au lieu d'une distribution exponentielle) pour le temps de service moteur conduit à un plus petit temps moyen d'attente des véhicules, mais la variabilité observée du temps de d'attente est plus élevée. L'équilibrage entre le profit moyen et l'augmentation de la variabilité des temps d'attente devrait ainsi être pris en compte lors de la conception de services de maintenance automobile.

D'autre part, la distribution lognormal et la distribution Pareto ont présenté une meilleure approximation aux données obtenues lors de l'étude de terrain dans l'atelier. Ainsi donc, comme illustré par les résultats de la mise en œuvre industrielle, le développement théorique des lois de puissance ouvre des nouvelles perspectives pour l'utilisation de ces type de distribution de probabilité pour une modélisation plus précise permettant une meilleure approximation au véritable comportement des données atypiques.

REFERENCES

- Adamic L.A. 2006. Zipf, Power-laws, and Pareto – A ranking tutorial.
- Adler, R., R. Feldman, M.S. Taqqu, 1998. *A Practical Guide to Heavy Tails*. Birkhäuser, Boston.
- Alvarado S. 2004. *Design of a quality improvement strategy in General Motors' maintenance shops* (in Spanish). BSc in Industrial Engineering degree thesis, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.
- Barabási, A.L. 2005. The origin of bursts and heavy tailed in human dynamics. *Nature*, 435, 435 – 439.
- Benson D. 1999. Simple and Accurate Solutions of Heavy-Tailed Contaminant Transport in Aquifers. *Conference on Applications of Heavy Tailed Distributions in Economics, Engineering and Statistics*. American University, Washington. <http://academic2.american.edu/~jpnolan/HeavyTailsConference/HeavyTailsProgram.html>.
- Brill, P. H. Fischer, J. Martin, C. Harris, 2000. Internet-type queues with power-tailed interarrival times and computational methods for their analysis. *Interfaces*, 12 (4), 261-262.
- Cohen, J.W. 1973. Some results on regular variation for distributions in queueing and fluctuations theory. *Journal of Applied Probability*, 10, 343–353.
- Gross, D. 1998. *Fundamentals of queueing theory. Tercera edición*. New York: John Wiley
- Hair, J. 2006. *Multivariate data analysis*. New Jersey: Pearson Prentice Hall.
- Hillier, F. Lieberman, G.J. 2002. *Operations Research*. McGraw-Hill.
- Hosking J. *L-moments and their applications in the analysis of financial data*. *Conference on Applications of Heavy Tailed Distributions in Economics, Engineering and Statistics*. Available at: <http://academic2.american.edu/~jpnolan/HeavyTailsConference/HeavyTailsProgram.html>.
- Mitzenmacher, M. 2004. A brief history of generative models for power law and lognormal distributions. *Internet Algorithms*, 1, 226 – 251.
- Newman M. 2005. Power laws, Pareto distributions and Zipf's law. *Contemporary Physics*, 46, 323-351.
- Pakes, A.G. 1975. On the tails of waiting-time distributions. *Journal of Applied Probability*, 12, 555–564.
- Rangel Martínez, L. 2007. *Review of queueing models with heavy-tailed distributions-based service times as input of quality of service measures* (in Spanish). BSc in Industrial Engineering degree thesis, Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.
- Schmitt F., D. Schertzer, S. Lovejoy, 1999. Multifractal Stochastic Dynamics and Heavy Tails in Finance. *Conference on Applications of Heavy Tailed Distributions in Economics, Engineering and Statistics*. American University, Washington. <http://academic2.american.edu/~jpnolan/HeavyTailsConference/HeavyTailsProgram.html>.
- Stidham, S. 2002. Analysis, Design, and Control of Queueing Systems. *Operation research*, 50, 197-216.
- Whitt, W. 2000. The impact of a heavy-tailed service-time distribution upon the M/G/s waiting time distribution. *Queueing Systems*, 36, 71-87.
- Zwart, A.P. 2001. *Queueing Systems with Heavy Tails*. Ph.D. thesis, Eindhoven University of Technology. Eindhoven, The Netherlands.