

MODELE POUR LA LINEARISATION DE SYSTEMES A EVENEMENTS DISCRETS NON LINEAIRES DANS L'ALGEBRE (MIN, +)

APPLICATION : EVALUATION DE PERFORMANCES

Samir HAMACI

Jean-Louis BOIMOND, Sébastien LAHAYE

EPMI/ECS

13, BVD de l'Hautil 95092 Cergy-Pontoise
s.hamaci@epmi.fr

LISA

62 avenue Notre Dame du Lac 49000 Angers
{boimond, lahaye}@univ-angers.fr

RÉSUMÉ : *Cet article traite l'analyse de performances des systèmes à événements discrets modélisables par des graphes d'événements temporisés avec multiplicateurs. Ces modèles n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre (min, +). Cette non linéarité est due à la présence des poids sur les arcs. Pour pallier à ce problème de non linéarité, on propose une méthode de linéarisation de ces graphes, dans le but d'obtenir des représentations linéaires dans l'algèbre (min, +), ceci afin d'appliquer certains résultats développés dans le cadre de l'analyse de performances des systèmes linéaires dans les dioïdes.*

1. INTRODUCTION

Les réseaux de Petri sont des modèles graphiques souvent utilisés pour représenter les systèmes à événements discrets. Ils sont largement utilisés pour modéliser, évaluer, voire piloter de tels systèmes.

Les systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par des réseaux de Petri particuliers, appelés graphes d'événements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique appelée l'algèbre des dioïdes (l'algèbre (min, +) étant un exemple de dioïde) (Baccelli et al., 1992). Cette représentation est bien adaptée pour aborder notamment les problèmes d'évaluation de performances ou de commande.

Néanmoins, les techniques développées dans le cadre des systèmes à événements discrets atteignent leur limite lorsque la taille du système considéré est importante (du fait du nombre important d'entités). Il s'avère alors utile d'utiliser des GET à arcs pondérés, encore appelés GET avec multiplicateurs (GETM), ce qui permet de réduire la taille du modèle. Ces graphes permettent également de modéliser de façon simple des opérations d'assemblage et de désassemblage de produits présentes dans certains systèmes de production.

Contrairement aux GET, les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre (min, +).

Cette non linéarité est due à la présence des poids sur les arcs.

Pour pouvoir appliquer certains résultats développés dans le cadre de la théorie des dioïdes, inspirée de (Cohen et al., 1998), on utilise une approche de modélisation basée sur une algèbre particulière, analogue à l'algèbre (min, +). Elle est définie sur un dioïde d'opérateurs muni de deux lois internes : loi additive (\oplus) correspondant à l'opération min, et loi multiplicative (\otimes) équivalente à la loi de composition usuelle.

Le modèle d'état obtenu, sera utilisé, par la suite, pour l'analyse de performances des GETM.

De manière analogue aux GET, l'analyse de performances des GETM revient à calculer le temps de cycle du graphe et la fréquence de franchissement associée à chaque transition. Par exemple, pour un système de production, ces performances correspondent aux calculs : du temps de cycle (temps séparant deux pièces produites par une machine) et de la fréquence de franchissement (au nombre de pièces produites par unité de temps, par une machine). Si la théorie spectrale (Gaubert, 1995) permet de calculer ces performances pour les GET, le problème est toujours ouvert pour les GETM. L'étude bibliographique effectuée dans ce domaine, a montré qu'il n'existait pas de méthode analytique générale permettant d'évaluer ces performances directement à partir des GETM.

Les méthodes existantes se basent, soit sur la linéari-

sation de ces graphes avec une augmentation de nombre de transition (Munier, 1993), soit sur des conditions restrictives sur le marquage initial (Chao et al., 1993).

Dans ce papier, on propose une nouvelle méthode de linéarisation, qui est une généralisation de la méthode présentée dans (Hamaci et al., 2004a)¹. Son principe consiste à linéariser le modèle mathématique qui représente l'évolution dynamique du graphe en synchronisant l'évolution d'un compteur associé à une transition avec une entrée implusionnelle. Cette dernière présente un intérêt mathématique. Elle permet de linéariser toute équation récurrente non linéaire associée à une transition du graphe. Le modèle mathématique obtenu est $(\min, +)$ linéaire et permet d'utiliser les résultats développés dans le cadre de l'analyse de performances des GET ordinaires.

Ce papier est organisé comme suit : après quelques concepts sur les GETM et leur fonctionnement, la modélisation du comportement des GETM est établie en section 2. On présente la méthode de linéarisation en section 3. A partir d'un GET équivalent obtenu après linéarisation, les performances d'un GETM sont calculées en section 4.

2. EQUATION RECURRENTE DES GETM's

On introduit brièvement la définition et quelques propriétés de base d'un RdP. Pour plus de détails (Murata, 1989).

Un RdP est un graphe biparti défini par un 5-tuplet $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, M, m, \tau)$ où :

1. \mathcal{P} (resp., \mathcal{T}) est un ensemble non vide et fini de places (resp., transitions) ;
2. $M \in \mathbb{N}^{(\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P})}$ définit le poids des arcs : pour $p \in \mathcal{P}$ et $q \in \mathcal{T}$, le multiplicateur M_{pq} (resp., M_{qp}) spécifie le poids de l'arc allant de la transition n_q vers la place p (resp., de la place p vers la transition n_q) ;
3. $m \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ définit le marquage initial : m_p désigne le nombre de jetons initialement contenus dans la place p ;
4. $\tau \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ définit les temporisations associées aux places : τ_p désigne la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p .

On note $\bullet q$ (resp., q^\bullet) l'ensemble des places situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la transition n_q . Similairement, $\bullet p$ (resp., p^\bullet) représente

¹Un graphe est linéarisable s'il contient au moins une composante de T-invariant égale à un

l'ensemble des transitions situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la place p .

Un graphe d'événements temporisé (GET) est un réseau de Petri tel que toute place a exactement une transition en amont et une transition en aval. Les poids des arcs sont tous unitaires. Ces modèles modélisent les systèmes à événements discrets mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation. Ils admettent une représentation linéaire sur une structure algébrique appelée l'algèbre des dioïdes (Baccelli et al., 1992).

• Un dioïde \mathcal{D} est un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées \oplus (addition) et \otimes (multiplication), associatives et ayant chacune un élément neutre, noté respectivement ε et e , telles que \oplus est commutative et idempotente (*c'est-à-dire*, $a \oplus a = a$). De plus, la loi \otimes est distributive par rapport à la loi \oplus , et l'élément neutre ε est absorbant pour le produit (*c'est-à-dire*, $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$). Notons que le symbole \otimes est souvent omis.

Exemple 1 • $\mathbb{Z}_{min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ est un dioïde commutatif où, la loi additive \oplus correspond à l'opération \min ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle. L'élément zéro de \mathbb{Z}_{min} est $\varepsilon = +\infty$ et l'élément identité est $e = 0$. Ce dioïde est appelé *l'algèbre* $(\min, +)$.

Un dioïde \mathcal{D} est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la multiplication est distributive sur les sommes infinies, *c'est-à-dire* : $\forall c \in \mathcal{D}$ et $\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$, $c \otimes (\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x) = \bigoplus_{x \in \mathcal{A}} c \otimes x$.

Si \mathcal{D} est un dioïde, l'ensemble $\mathcal{D}^{n \times n}$ constitué des matrices de dimension $n \times n$ à coefficient dans \mathcal{D} où la somme et le produit matriciels sont définis par : $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ et $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}$, est un dioïde.

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un RdP, l'état est associé non plus aux places d'un GET mais à ses transitions. La variable d'état considérée est un compteur d'événements $x_q(t)$, défini de $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$, $t \mapsto x_q(t)$, où $x_q(t) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ correspond au nombre de tirs de la transition n_q ayant lieu jusqu'à la date t .

Pour illustrer l'évolution d'un compteur associé à la transition n_q d'un GET, considérons le GET élémentaire suivant :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p + x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (1)$$

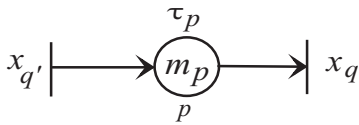


Figure.1 GET élémentaire

On remarque que cette équation est non linéaire dans l'algèbre usuelle de par la présence de l'opérateur \min qui modélise le phénomène de synchronisation² au niveau de la transition x_q . En revanche, elle se décrit de façon linéaire dans le dioïde \mathbb{Z}_{min} .

Dans le cas où le poids d'un arcs est supérieur à 1, le GET devient pondéré. Ce type de modèle est appelé graphe d'événements temporisés avec multipliers, noté GETM.

Assertion 1 *L'évolution du compteur associé à la transition n_q du GETM élémentaire est donnée par l'équation suivante :*

$$n_q(t) = \lfloor M_{qp}^{-1}(m_p + M_{pq}n_{q\prime}(t - \tau_p)) \rfloor. \quad (2)$$

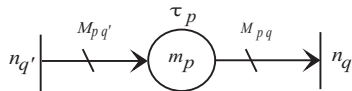


Figure.2 GETM élémentaire

La présence de la partie entière inférieure dans l'équation 2 assure la valeur discrète du compteur indépendamment de la valeur M_{qp} . En général, une transition n_q peut avoir plusieurs transitions en amont $\{n_{q\prime} \in \bullet\bullet q\}$, ce qui implique que l'équation compteur associée fasse intervenir le \min entre les compteurs associés aux transitions en amont.

Les GETM considérés dans ce papier sont *consistant* (c'est-à-dire, il existe un T-invariant³ θ couvrant toutes les transitions : $\{q \in T | \theta(q) > 0\} = T$) et *conservatif* (c'est-à-dire il existe un P-invariant⁴ Y couvrant toutes les places : $\{p \in P | Y(p) > 0\} = P$).

Ce type de graphes vérifie les propriétés suivantes (Teruel et al., 1992):

- Un GETM admet un marquage initial vivant et borné si, est seulement si, il est consistant et conservatif.

²Dans un GET, le phénomène de synchronisation se produit lorsque plusieurs arcs convergent sur une même transition.

³Un vecteur $\theta \in \mathbb{N}^T$ tel que $\theta \neq 0$ et $W\theta = 0$ est un T-invariant (W est la matrice d'incidence).

⁴Un vecteur $Y \in \mathbb{N}^P$ tel que $Y \neq 0$ et $Y^t W = 0$ est un P-invariant.

- Un GETM consistant est fortement connexe si, est seulement si, il est conservatif.
- Dans un GETM fortement connexe, dans chaque circuit, le produit des poids est égal à un.

Pour l'étude des GETM, les conditions initiales considérées ici sont *faiblement compatible*, c'est-à-dire tout jeton du marquage initial est disponible qu'à partir de $t = 0$. Pour $t < 0$, le graphe est considéré comme étant "gelé".

Les jetons visibles à l'instant initial d'observation $t = 0$ sont alors ceux du marquage initial. Ces jetons sont supposés avoir été introduits dans le graphe avant l'instant 0, de telle sorte qu'à $t = 0$ un jeton du marquage initial est :

- soit en train de subir la temporisation de la place dans laquelle il a été introduit,
- soit tout juste disponible pour le tir de la transition en aval.

Cette hypothèse est classique dans la théorie des réseaux de Petri. En effet, dans ce papier, chaque compteur du GETM est synchronisé avec un compteur correspondant à une entrée impulsionnelle e ($e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) \mapsto +\infty$ pour $t \geq 0$, voir [§5.2 Lahaye, 2000] pour plus de détails.

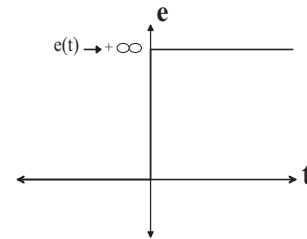


Figure.3 Impulsion (point de vue compteur)

Exemple 2 *L'évolution dynamique du GETM représenté par la figure 4 est décrite par les équations récurrentes suivantes :*

$$\begin{cases} n_1(t) &= \min(3n_3(t-2), e_1(t)), \\ n_2(t) &= \min(\lfloor \frac{4+n_1(t-1)}{2} \rfloor, 3 + n_2(t-1), \lfloor \frac{4+3n_3(t-1)}{2} \rfloor, e_2(t)), \\ n_3(t) &= \min(\lfloor \frac{2n_2(t-1)}{3} \rfloor, e_3(t)). \end{cases}$$

Les entrées e_q correspondent aux entrées impulsionnelles. Elles n'ont aucune influence sur l'évolution du graphe. En effet, $\forall x_q \in \mathcal{T}$, $\min(x_q(t), e_q(t)) = x_q(t)$, puisque $e(t) \mapsto +\infty$.

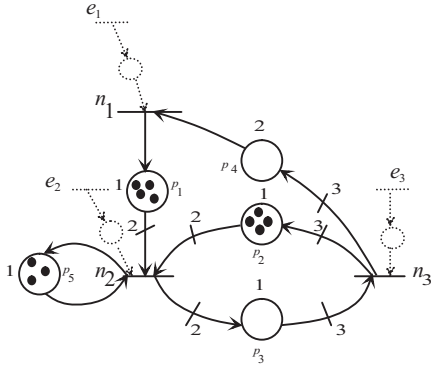


Figure.4 Un GETM

Contrairement aux GET, les GETM n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min, +)$. Cette non linéarité - de par les poids sur les arcs - est due à la présence de parties entières dans le modèle $(\min, +)$ régissant l'évolution dynamique de ces graphes.

Pour pallier à ce problème de non linéarité et pouvoir, en suite, appliquer les résultats développés dans le cadre de l'analyse de performances des GET dans l'algèbre $(\min, +)$, on utilise une approche de modélisation à base d'opérateur développée en détail dans (Hamaci et al., 2004b).

2.1. Représentation à base d'opérateurs des GETM's

Avant de présenter les opérateurs utilisés pour modéliser les GETM's, on introduit la définition d'un signal et d'un opérateur qui nous seront utiles pour la suite.

- On appelle *signal* une application u définie de $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{D}, \oplus, \otimes), t \mapsto u(t)$. Sachant que \mathcal{D} est un dioïde complet.
- On appelle opérateur, noté Σ , défini d'un ensemble de signaux vers un ensemble de signaux. Il est linéaire si :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \quad \Sigma(u \oplus v) = \Sigma(u) \oplus \Sigma(v),$$

$$\forall u \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, \forall \lambda \in \mathcal{D}, \quad \Sigma(\lambda \otimes u) = \lambda \otimes \Sigma(u).$$

Trois types d'opérateurs définis de $\mathbb{Z}_{min}^{\mathbb{Z}}$ vers $\mathbb{Z}_{min}^{\mathbb{Z}}$ sont utilisés pour modéliser les GETM.

$$1. \quad \gamma^{\nu} : n(t) \mapsto n(t) + \nu \quad (\nu \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}),$$

$$2. \quad \delta^{\tau} : n(t) \mapsto n(t - \tau) \quad (\tau \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}),$$

$$3. \quad \mu_r : n(t) \mapsto \lfloor r \times n(t) \rfloor \quad (r \in \mathbb{Q}^+).$$

On introduit le dioïde, noté \mathcal{D}_{min} , non commutatif de sommes finies de composition d'opérateurs μ, γ , muni des deux lois suivantes : \min pour l'opération (\oplus) et la composition pour l'opération (\otimes) , avec pour éléments neutres $\varepsilon = \mu_{+\infty} \gamma^{+\infty}$ et $e = \mu_1 \gamma^0$. Ainsi, un élément de \mathcal{D}_{min} est une application, notée $p = \bigoplus_{i=1}^k \mu_{r_i} \gamma^{\nu_i}$, définie de $\mathbb{Z}_{min}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{Z}_{min}^{\mathbb{Z}}$, telle que :

$$\forall t \in \mathbb{Z}, p(x(t)) = \min_{1 \leq i \leq k} (\lfloor r_i (\nu_i + x(t)) \rfloor).$$

On note $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$ le dioïde de séries formelles à coefficients dans \mathcal{D}_{min} avec pour éléments neutres $\varepsilon = \mu_{+\infty} \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$ et $e = \mu_1 \gamma^0 \delta^0$. Pour les détails voir (Hamaci et al., 2004b)

Un élément de $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$ permet de coder un signal $n(t)$ sous forme d'une série formelle en δ et il permet, également, de modéliser la relation liant deux transitions d'un GETM.

Exemple 3 Dans le dioïde $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$, le compteur $n_q(t)$ associé à la transition n_q du GETM élémentaire de la figure 2 satisfait l'équation suivante :

$$N_q(\delta) = \mu_{M_{qp}^{-1}} \gamma^{m_p} \delta^{\tau_p} \mu_{M_{pq}} N_{q'}(\delta). \quad (3)$$

Assertion 2 L'évolution de la dynamique d'un GETM est donnée par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} N(\delta) &= A N(\delta) \oplus B U(\delta), \\ Y(\delta) &= C N(\delta) \oplus D U(\delta), \end{cases} \quad (4)$$

où $N(\delta)$ est le vecteur d'état composé des compteurs associés aux transitions internes du graphe, codés dans le dioïde $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$. $U(\delta)$ et $Y(\delta)$ sont les vecteurs d'entrées et de sorties codés dans $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$.

Les matrices A, B, C, D sont composées de monômes de séries formelles en δ , chaque monôme modélise une relation liant deux transitions du graphe dans $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$.

Exemple 4 Dans le dioïde $\mathcal{D}_{min}[[\delta]]$, l'évolution dynamique du GETM représenté par la figure 4 est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \mu_3 \delta^2 \\ \mu_{1/2} \gamma^4 \delta & \gamma^3 \delta & \mu_{1/2} \gamma^4 \delta \mu_3 \\ \varepsilon & \mu_{1/3} \delta \mu_2 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} E \\ E \\ E \end{pmatrix}.$$

En remarque la présence de l'opérateur μ qui modélise la non linéarité dans l'algèbre $(\min, +)$.

La proposition suivante fournit les règles de commutation entre opérateurs utiles pour la méthode de linéarisation que nous allons proposer.

Proposition 1 Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

1. $\gamma^a \delta^b = \delta^b \gamma^a$, $\mu_a \delta^b = \delta^b \mu_a$ (propriété de commutativité).
2. $\mu_{a^{-1}} \mu_b = \mu_{(a^{-1}b)}$.
3. Soit $N(\delta)$ tel que, $\forall t \in \mathbb{Z}$, $n(t)$ est un multiple de a , alors $\mu_{a^{-1}} \gamma^b N(\delta) = \gamma^{\lfloor a^{-1}b \rfloor} \mu_{a^{-1}} N(\delta)$.

Preuve 1

1. Point 1 est évident.
2. $\mu_{a^{-1}} \mu_b N(\delta)$ correspond à $\lfloor a^{-1} \lfloor b n(t) \rfloor \rfloor = \lfloor a^{-1} b n(t) \rfloor$, ce qui équivaut à $\mu_{(a^{-1}b)} N(\delta)$.
3. $\mu_{a^{-1}} \gamma^b N(\delta)$ correspond à $\lfloor a^{-1} (b + n(t)) \rfloor = \lfloor a^{-1} b \rfloor + a^{-1} n(t)$ sachant que $n(t) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ est un multiple de a , ce qui est équivalent à $\gamma^{\lfloor a^{-1}b \rfloor} \mu_{a^{-1}} N(\delta)$.

3. LINEARISATION DES GETM's

3.1. Principe

Un GETM consistant possède un T-invariant dans lequel toutes ses composantes appartiennent à \mathbb{N}^* . Le principe de linéarisation consiste à normaliser le T-invariant du GETM de façon que les transitions aient le même nombre de franchissements par cycle (Trouillet et al., 2001).

La méthode proposée se base sur un changement de variables diagonal. soit $\theta = (\theta_1 \theta_2 \dots \theta_n)^t$ le vecteur T-invariant du GETM avec $n = \text{card}(\mathcal{T})$.

On note $\text{ppcm}(\theta_i)$ le plus petit commun multiple des entiers θ_i . Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe un entier α_i tel que $\theta_i \alpha_i = \text{ppcm}(\theta_i)$. On introduit le vecteur d'état $X = (x_1 \ x_2 \dots x_n)^t$ défini par $x_i = \alpha_i n_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

Proposition 2 Considérons le changement de variable suivant : $x_i(t) = \alpha_i n_i(t)$; $\forall i = 1, \dots, n$ tel que $\alpha_i \theta_i = \text{ppcm}(\theta_i)$. Les composantes x_i peuvent s'exprimer, dans le dioïde $\mathcal{D}_{\min}[\delta]$, comme suit :

$$X_q(\delta) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \mu_{\alpha_q} \mu_{M_{qp}^{-1}} \gamma^{m_p} \delta^{\tau_p} \mu_{\alpha_q^{-1}} \mu_{M_{qp}} X_{q'}(\delta). \quad (5)$$

Preuve 2 On a $X_q(\delta) = \mu_{\alpha_q} N_q(\delta)$ avec $\alpha_q \in \mathbb{N}^*$, aussi on déduit de l'équation 3 : $X_q(\delta) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \mu_{\alpha_q} \mu_{M_{qp}^{-1}} \gamma^{m_p} \delta^{\tau_p} \mu_{M_{pq'}} N_{q'}(\delta)$. De la définition de θ (c'est-à-dire $\theta \neq 0$ et $W \times \theta = 0$ sachant que W correspond à la matrice d'incidence), on déduit que $M_{pq'} \theta_{q'} = M_{qp} \theta_q$. Cependant, sachant que $\theta_q = \alpha_q^{-1} \text{ppcm}(\theta_i)$ et $\theta_{q'} = \alpha_{q'}^{-1} \text{ppcm}(\theta_i)$, on déduit que : $M_{qp}^{-1} M_{pq'} = \alpha_q^{-1} \alpha_{q'}$ et $M_{pq'} = \alpha_{q'}^{-1} M_{qp} \alpha_q$. En remplaçant $M_{pq'}$ dans l'expression de $X_q(\delta)$ et $\mu_{\alpha_{q'}} N_{q'}(\delta)$ par $X_{q'}(\delta)$, on obtient l'expression de $X_q(\delta)$ donnée par l'équation 5.

Pour pouvoir linéariser cette équation, on exprime chaque compteur en fonction d'une entrée impulsionnelle. Cette dernière va permettre, comme indiqué par la suite, de linéariser le modèle mathématique régissant l'évolution dynamique d'un GETM.

Proposition 3 Soit E une entrée impulsionnelle, on a : $\forall a \in \mathbb{N}, \beta \in Q^+, \forall q = 1, \dots, n$,

$$\mu_{\beta} \gamma^a \delta^{\tau} E_q(\delta) = \gamma^{\lfloor \beta a \rfloor} \delta^{\tau} E_q(\delta). \quad (6)$$

Preuve 3 Utilisons le point 3 de la proposition 1. $\mu_{\beta} \gamma^a \delta^{\tau} E_q(\delta)$ correspond à $\lfloor \beta \times (a + e_q(t - \tau)) \rfloor = \lfloor \beta \times a \rfloor + e_q(t - \tau)$ puisque pour $t \geq 0$, $e_q(t) \mapsto +\infty$, donc $e_q(t)$ est un multiple de α , qui est équivalent à $\gamma^{\lfloor \beta a \rfloor} \delta^{\tau} E_q(\delta)$.

Dans la suite, on donne le modèle d'état obtenu après le changement de variables donné par la proposition 2. Considérons le vecteur X composé des compteurs décrits par la proposition 2. Les compteurs E correspondent aux entrées impulsionnelles. Finalement, on obtient :

$$X(\delta) = F \otimes X(\delta) \oplus E(\delta). \quad (7)$$

Ce type d'équations admet la plus petite solution suivante ⁵:

$$X(\delta) = F^* \otimes E(\delta), \quad (8)$$

avec $F^* = e \oplus F \oplus F^2 \oplus \dots$.

⁵L'équation implicite $x = ax \oplus b$ admet la plus petite solution a^*b

Proposition 4 *Pour des conditions initiales faiblement compatible, Un GETM consistant et conservatif est linéarisable sans augmenter le nombre de ses transitions.*

Preuve 4 *Un GETM consistant et conservatif se représente par l'équation $X(\delta) = F \otimes X(\delta) \oplus E(\delta)$. En utilisant l'équation 8 et appliquer, ensuite, la proposition 3, On obtient une relation linéaire entre deux transitions du graphe (correspondant à un GET). Cette procédure de linéarisation peut être appliquée pour toutes les transitions du graphe, puisque pour toute transition, on peut associer une entrée impulsionnelle.*

4. EVALUATION DE PERFORMANCES

De manière analogue aux GET, l'analyse de performances des GETM revient à calculer le temps de cycle et la fréquence de franchissement associée à chaque transition du graphe.

Définition 1 (Sauer, 2003) *Le temps de cycle, noté TC, d'un GETM fortement connexe, obtenu à partir d'un marquage initial M_0 , est le temps moyen nécessaire pour franchir une fois le T-invariant minimal en mode de fonctionnement au plus tôt à partir de M_0 .*

Ce temps de cycle, qui est identique pour toutes les transitions du graphe, est aussi équivalent au temps moyen séparant deux tirs successifs d'une transition. Il se calcule par la relation suivante :

$$TC = \frac{\theta_q}{\lambda_q}, \quad (9)$$

où :

- θ_q est la composante du T-invariant associée à la transition n_q ,
- λ_q est la fréquence de franchissement associée à la transition n_q . Elle correspond au nombre moyen de tirs de la transition n_q par unité de temps.

On rappelle que les composantes de T-invariant associées à un GET ordinaire sont toutes unitaires. En effet, en utilisant l'équation 9, on déduit que la fréquence de franchissement λ_q est identique pour toutes les transitions du graphe. Dans la suite, pour un GET, cette fréquence de franchissement, aussi appelée *taux de production*, sera notée λ .

4.1. Evaluation de performances des GET

Soit un graphe d'événements temporisé fortement connexe fonctionnant en régime autonome. Un tel graphe se représente par l'équation récurrente $X(t) = A \otimes X(t-1)$ dans l'algèbre $(\min, +)$. La valeur propre λ associée à la matrice irréductible ⁶ A correspond à la fréquence de franchissement associée à chaque transition du GET.

Le théorème suivant donne une méthode de calcul de la valeur propre d'une matrice irréductible.

Théorème 1 (Gondran et Minoux, 1979)

La valeur propre d'une matrice A irréductible ⁷, notée λ , égale au rayon spectral de la matrice A , soit :

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (tr A^k)^{\otimes 1/k},$$

où $tr A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$ correspond à la trace de la matrice A .

Cette valeur propre peut se déduire directement à partir du GET à travers le résultat donné par le théorème suivant.

Théorème 2 (Gaubert, 1995) *La fréquence de franchissement λ associée à chaque transition d'un GET fortement connexe est caractérisée par :*

$$\lambda = \min_{c \text{ circuit élémentaire}} \frac{N(c)}{T(c)}, \quad (10)$$

où $N(c)$ correspond au nombre total de jetons du circuit c et $T(c)$ correspond à la somme des temporisations des places du circuit c .

4.2. Evaluation de performances des GETM's

Si le calcul de performances des GET a pu être réalisé grâce à la théorie spectrale (Gaubert, 1995), le problème reste, à notre connaissance, ouvert pour les GETM. La difficulté de ces modèles réside dans la

⁶Une matrice irréductible $A \in D^{n \times n}$ est une matrice pour laquelle, pour toute paire (i, j) , il existe un entier k tel que $(A^k)_{ij} \neq \varepsilon$. Ou bien, pour toute paire de sommets (i, j) , il existe au moins un chemin allant de j à i et de i à j .

⁷Pour une matrice A réductible, l'unicité de la valeur propre n'est pas assurée. Les résultats énoncés dans ce cas s'appuient sur une décomposition du graphe en composantes fortement connexes.

présence des poids sur les arcs. Ces poids engendrent, comme on a vu précédemment, une non linéarité dans le modèle mathématique régissant l'évolution dynamique de ces modèles. Cette non linéarité, dans l'algèbre $(\min, +)$, empêche l'utilisation des théorèmes 1 et 2.

En utilisant la méthode de linéarisation proposée en section 3, on définit le modèle linéaire équivalent, et en déduit les performances du GETM. En effet, la fréquence de franchissement associée à chaque transition du GETM, λ_{m_q} , peut être calculée à partir du modèle $(\min, +)$ linéaire obtenu *via* le changement de variable posé précédemment (proposition 2):

$$\lambda_{m_q} = \frac{\lambda}{\alpha_q}, \quad (11)$$

où λ est la valeur propre du modèle $(\min, +)$ linéaire obtenu après linéarisation.

4.3. Exemple

On détermine le temps de cycle du GETM de la figure 2 à partir d'un modèle linéaire. Ce GETM admet le T-invariant suivant : $\theta^t = (6 \ 3 \ 2)$.

La proposition 2 permet de définir le nouveau vecteur d'état $X = (X_1 \ X_2 \ X_3)^t$ sachant que $X_i(\delta) = \mu_{\alpha_i} N_i(\delta)$, $i = 1, 2, 3$ avec $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3$ et $\text{ppcm}(\theta_i) = 6$, $1 \leq i \leq 3$.

On obtient la matrices F :

$$F = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 \\ \mu_2 \mu_{1/2} \gamma^4 \delta & \gamma^6 \delta & \mu_2 \mu_{1/2} \gamma^4 \delta \\ \varepsilon & \mu_3 \mu_{1/3} \delta & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Le calcul de F^*E se base sur l'utilisation de la proposition 3.

$$F^*E = (e \oplus F \oplus F^2 \oplus F^3 \oplus \dots)E$$

$$= (E \oplus FE \oplus \underbrace{F \otimes FE}_{F^2 E} \oplus \underbrace{F \otimes F^2 E}_{F^3 E} \oplus \dots).$$

L'utilisation du système d'équation 8 permet d'obtenir :

$$F^*E = \begin{pmatrix} (\gamma^3 \delta^4)^* \\ \gamma^4 \delta^4 (\gamma^6 \delta^8)^* \\ \delta (\gamma^3 \delta^4)^* \end{pmatrix} E,$$

laquelle est la plus petite solution du système d'équations implicite suivant :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^3 \delta^4 \\ \gamma^6 \delta^8 \\ \gamma^3 \delta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ \gamma^4 \delta^4 \\ \delta \end{pmatrix} E. \end{cases}$$

Ces équations admettent une représentation $(\min, +)$ linéaire dans le dioïde \mathbb{Z}_{\min} :

$$\begin{cases} x_1(t) = 3 \otimes x_1(t-4) \oplus e(t), \\ x_2(t) = 6 \otimes x_2(t-8) \oplus 4 \otimes e(t-4), \\ x_3(t) = 3 \otimes x_3(t-4) \oplus e(t-1), \end{cases}$$

lesquelles peut se représenter par le GET de la figure 5 .

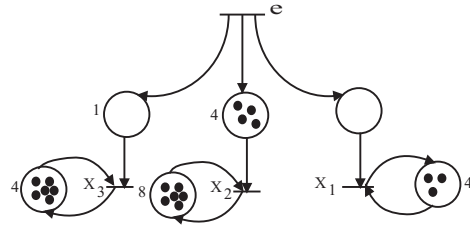


Figure 5. GET (GETM linéarisé)

Il reste à établir le lien entre le GETM et le GET résultant de la linéarisation. Ce lien est donné par le changement de variable posé précédemment qui lie le vecteur d'état N au vecteur d'état X . Pour cet exemple, nous avons $x_3(t) = 3n_3(t)$, autrement dit, à un tir de la transition n_3 correspond à trois tirs de la transition x_3 . Ainsi, le comportement du GETM se déduit facilement de celui du GET projeté sur les transitions x_1, x_2, x_3 .

Pour évaluer les performances du GETM de la figure 4, on utilise son modèle $(\min, +)$ linéaire, ce qui permet de calculer les fréquences de franchissement de chacune de ses transitions, ainsi que son temps de cycle.

En utilisant le théorème 2, on trouve un taux de production du GET de la figure 2, obtenu après linéarisation, égal à $3/4$. De l'équation 11, on déduit la fréquence de franchissement de chaque transition du GETM, à savoir : $\lambda_{m_1} = \frac{4}{3}, \lambda_{m_2} = \frac{8}{6}, \lambda_{m_3} = \frac{4}{3}$.

Par conséquent, l'équation 9 permet de déduire que $TC_m = 8$ unités de temps.

Une confirmation de ces résultats peut être faite directement à travers le graphe d'évolution du marquage du GETM, soit :

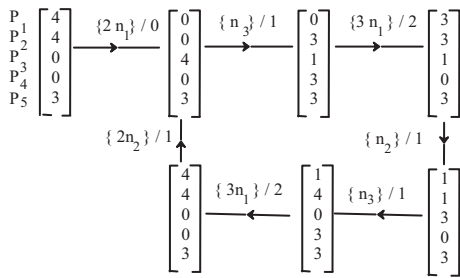


Figure 6. Graphe d'évolution du marquage de la figure 4

5. CONCLUSION

Dans ce papier, on propose une méthode de linéarisation des GETM dans le but d'évaluer les performances de ces modèles. La méthode considère un changement de variable sans augmenter le nombre de transition du graphe. Pour chaque transition est ajouté une entrée impulsionnelle. Cette dernière permet de linéariser toute équation récurrente non linéaire associée à une transition du graphe. Le modèle d'état obtenu, qui est $(\min, +)$ linéaire, est utilisé pour appliquer certains résultats de base de la théorie spectrale, habituellement utilisée pour évaluer les performances des graphes d'événements temporisés ordinaires.

6. BIBLIOGRAPHIE

Baccelli, F. and G. Cohen and G.J. Olsder and J.-P. Quadrat *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley 1992.

Chao, D.T, M. Zhou and D.T. Wang, Multiple Weighted Marked Graphs, *IFAC 12th Triennial World Congress*, 13, 6, 1994, 371-374, Australie.

Cohen, G and S. Gaubert, and J.-P. Quadrat Timed-Event Graphs with Multipliers and Homogeneous Min-Plus Systems, *IEEE TAC*, 43, 9, 1998, 1296–1302.

Gondran, M and M. Minoux *Graphes et algorithmes*, Eyrolles 1985.

Gaubert, S. Resource Optimization and $(\min, +)$ Spectral Theory, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1995, 1930-1934.

Hamaci, S., J.-L. Boimond and S. Lahaye On the Linearizability of Discrete Timed Event Graphs with Multipliers Using $(\min, +)$ Algebra, *IFAC, 7th International Workshop on Discrete Event Systems*

(*WODES'04*), 2004, 367-372, France.

Hamaci, S., J.-L. Boimond and S. Lahaye On modeling and Control Of Timed Graphs With Multipliers Using $(\min, +)$ Algebra, *IEEE, 1st International Conference on Informatics in Control (ICINCO'04)*, 2004, 3, 32-37, Portugal.

Lahaye, S., *Contribution à l'étude des systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*, Thèse, Université d'Angers, 2000.

Munier, A. Régime Asymptotique Optimal d'un graphe d'Événements Temporisé Généralisé : application à un Problème d'Assemblage, *RAIPO-APII*, 27, 5, 1993, 487-513.

Murata, T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications, *IEEE Proceedings*, 1989, 541-580.

Sauer, N. Marking Optimization of Weighted Marked Graphs, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 2003, 13, 245-262,

Teruel, E., J. Chrzastowski-Wachtel and J.M. Colom, J.M. and Silva, M. On Weighted T-Systems, *Advances in Petri nets, Lecture Notes in Computer Science*, 616, 1992, 348-367, France.

Trouillet, B., A. Benasser and Gentina, J.-C., *Sur la modélisation du comportement dynamique des graphes d'événements pondérés*, editor = G. Juanole and R. Valette, 2001, 447-462, France.