

## DETERMINATION DES DATES D'APPROVISIONNEMENT OPTIMALES POUR UN SYSTEME D'ASSEMBLAGE A DEUX NIVEAUX

Faïcel Hnaïen, Hélène Marian et Alexandre Dolgui

Ecole des Mines Saint Etienne

158 cours Fauriel

42023 Saint Etienne

hnaïen@emse.fr, marian@emse.fr et dolgui@emse.fr

**RESUME :** Notre étude concerne la planification des systèmes d'assemblage. Nous considérons un produit fini fabriqué à partir de plusieurs composants, ces composants étant eux-mêmes obtenus à partir d'autres composants ; nous parlons donc de système d'assemblage à deux niveaux. Nous supposons que la demande en produit fini est déterministe, mais les délais d'approvisionnement des composants sont aléatoires. Notre objectif est alors de minimiser les coûts moyens composés de coûts de stockage des composants et de coûts de rupture en produit fini. Notre approche se base sur une décomposition du problème par niveau de nomenclature afin de déterminer la fonction coût. Nous recherchons des propriétés de dominance pour réduire l'espace de recherche de solutions ainsi que des bornes inférieures et supérieures de cette fonction. La résolution est alors basée sur un algorithme de PSE, ce qui nous permet de trouver le coût optimal. Nous présentons un exemple pour illustrer notre démarche.

**MOTS-CLES :** Planification des réapprovisionnements, PSE, délais d'approvisionnement aléatoires, systèmes d'assemblage à deux niveaux

### 1. INTRODUCTION

Nous nous intéressons au problème de la planification des réapprovisionnements d'un système d'assemblage à deux niveaux quand les délais d'approvisionnement sont aléatoires. Le produit fini s'obtient à partir de plusieurs composants, eux-mêmes obtenus à partir d'autres composants. Afin de se rapprocher de méthodes industrielles de planification du type MRP, nous nous plaçons dans un environnement temporel discret (le temps est calculé en jours par exemple). Ainsi, nous supposons que les délais d'approvisionnement en composants sont des variables aléatoires discrètes qui suivent une loi quelconque et connue. Nous cherchons alors les valeurs optimales des dates de lancement des ordres aux fournisseurs de niveau 2 en minimisant la somme du coût moyen de stockage des composants et du coût moyen de rupture en produit fini.

Notons que nous tenons compte dans notre modèle de l'interdépendance des stocks de composants et de l'interdépendance des niveaux. De plus, signalons que nous limitons notre étude à la planification à capacité infinie.

Pour étudier ce problème, nous nous sommes essentiellement basés sur les travaux de Louly et *al.*, (2007) sur les systèmes d'assemblage à un seul niveau. Les auteurs ont étudié le problème de planification à un seul niveau sur plusieurs périodes dans le cas où les délais d'approvisionnement suivent une loi discrète. Leur objectif était de trouver les stocks initiaux en composants qui permettent de réduire le coût total moyen composé du coût de stockage des composants et du coût moyen de

rupture en produit fini. Ils ont proposé une procédure de séparation et évaluation (PSE) pour trouver la solution optimale basée sur des propriétés de dominance, et sur un calcul de bornes inférieures et d'une borne supérieure de la fonction objectif.

### 2. ETAT DE L'ART

La planification des réapprovisionnements en composants pour les systèmes d'assemblage avec délais d'approvisionnement aléatoires n'est pas très étudiée dans la littérature, notamment pour les systèmes à plus d'un seul niveau, mais surtout quand on considère un temps discret.

Ainsi, Kumar (1989) présente une étude générique de la planification des systèmes d'assemblage à un niveau où plusieurs composants sont nécessaires pour assembler un seul produit fini, avec des délais d'approvisionnement aléatoires qui suivent des lois *continues*. Il détermine la date de lancement des ordres qui minimise le coût total composé d'un coût de stockage et d'un coût de rupture. L'auteur propose la solution optimale pour des cas particuliers de loi de distribution des délais d'approvisionnement (exponentielle, uniforme, et normale). Une autre étude intéressante (Chu *et al.*, 1993) montre pour le même cas la convexité du coût total moyen et propose ainsi un algorithme itératif qui minimise ce coût moyen en se basant sur les propriétés de la fonction objectif.

Toujours avec une modélisation continue des délais d'approvisionnement, Fujiwara et Sedarage (1997) ont étudié la politique (quantité de commande / point de

commande)  $(Q,r)$  pour les systèmes d'assemblage avec un seul type de produit fini et plusieurs composants quand les délais d'approvisionnement sont aléatoires. Les auteurs supposent que la demande est constante et connue, et que la capacité d'assemblage est infinie. Les auteurs considèrent le coût de stockage de composants, le coût de rupture en produit fini et le coût de setup. Fujiwara et Sedarage ont développé un *modèle continu* pour cette politique  $(Q,r)$  : quand le stock arrive au niveau  $r_i$ , pour le composant  $i$ , un lot de taille  $Q$  de composants de type  $i$  est lancé. La valeur de  $Q$  est la même pour tous les composants. Ils cherchent donc le point de lancement des ordres  $r_i$  pour chaque composant  $i$  et la taille de lot  $Q$ . Le problème d'optimisation obtenu est non linéaire, les auteurs ont décomposé le problème en famille de sous problèmes et la solution a été obtenue numériquement.

Dans le domaine des systèmes d'assemblage à plusieurs niveaux avec des délais d'approvisionnement aléatoires qui suivent une *loi continue*, nous pouvons citer les travaux de Axsäter (2005). L'objectif de ce travail est de trouver les dates de lancement optimales dans le but de réduire le coût total moyen composé d'un coût de stockage des composants et d'un coût moyen de rupture en produit fini. L'auteur ne présente pas la modélisation analytique de problème mais il propose une heuristique pour trouver une solution basée sur la décomposition par niveau. Ce principe de décomposition a déjà été présenté par (Buzacott et Shanthikumar (1994), Hariharan et Zipkin (1995), Chen(2001), Karaesmen et al. (2002)). L'auteur a traité deux exemples: le premier exemple est celui d'un système d'assemblage à deux niveaux avec deux types de composant au niveau 1 et trois types de composants au niveau 2 nécessaires pour assembler le premier composant de niveau 1. Le deuxième exemple est un système d'assemblage à trois niveaux avec un seul type de composants au niveau 1, deux types de composants au niveau 2 nécessaires pour l'assemblage du composant de niveau 1 et quatre types de composants au niveau 3. Les résultats numériques montrent que pour le premier exemple l'erreur est de 1%, i.e., le coût total augmente de 1% par rapport à la solution optimale (obtenue en énumérant tous les solutions possibles). Pour le deuxième exemple l'erreur est de 10% .

Toujours, dans le domaine des systèmes d'assemblage à plusieurs niveaux avec des délais d'approvisionnement aléatoires, nous pouvons citer les travaux de Yano (1987). Ces travaux traitent des systèmes d'assemblage à deux niveaux avec un seul type de composants au niveau 1 et deux types de composants au niveau 2. Tous les calculs sont faits en utilisant les propriétés d'intégration et de dérivation des différentes fonctions utilisées. Néanmoins, pour illustrer son travail, l'auteur prend des délais d'approvisionnement suivant des lois de poisson ou binomiale. Ces travaux se situent donc à la frontière du continu et du discret.

L'objectif est de trouver les dates de réapprovisionnement qui minimisent le coût de stockage et le coût de rupture. Un algorithme a été développé en exploitant les propriétés de la fonction objectif. Les résultats numéri-

ques montrent que les délais de sécurité peuvent être négatifs quand le coût de stockage unitaire des composants est relativement plus élevé que le coût de rupture unitaire.

Notons que Tang et Grubbström (2003) considèrent le même problème de systèmes d'assemblage à deux composants que Yano (1987). Ils utilisent la transformation de Laplace pour trouver des propriétés des délais d'approvisionnement qui permettent de déterminer la solution optimale.

A notre connaissance, les seuls travaux qui modélisent vraiment les délais d'approvisionnement comme étant des *variables aléatoires discrètes* sont ceux de Dolgui, Louly et Proth.

Tout d'abord, Dolgui et al., (1995) proposent un modèle analytique pour la planification des systèmes d'assemblage dans le cas où la demande est constante et les délais d'approvisionnements des composants sont aléatoires. La politique d'approvisionnement considérée est la politique lot pour lot. On suppose qu'il y a plusieurs types de produits, et que pour assembler chaque produit, plusieurs types de composants sont nécessaires. Les auteurs ont pris en considération le coût de stockage et les coûts de rupture. Ce modèle permet de déterminer le nombre de composants de chaque type à commander au début de chaque période et le nombre de produits à assembler. Une approche basée sur l'accouplement d'un modèle de programmation linéaire en nombres entiers avec une simulation et des heuristiques a été développée. Le même problème a été étudié par Proth et al., (1997), les composants à commander et les produits à assembler sont alors choisis sur la base d'une heuristique.

Par ailleurs, Louly M.A. et Dolgui A., (2002) considèrent un système d'assemblage avec un produit fini et plusieurs composants. L'objectif est de minimiser les coûts moyens de possession des composants, et les coûts moyens de retard des produits finis avec pour variables de décision les délais planifiés ou prévus des composants. Une des difficultés est alors la dépendance entre les différents composants. En effet, c'est souvent, la méthode MRP qui est employée, mais les incertitudes sur les délais provoquent des instabilités, et ceci, quelle que soit la méthode de lotissement utilisée

Dolgui A. et Louly M.A., (2002) proposent également un modèle Markovien pour étudier un problème de planification dynamique multi-périodes. Le but est de rechercher des valeurs optimales de délais planifiés sous un système MRP soumis à des délais incertains, en minimisant les coûts de possession et de retard. Ils partent sur des hypothèses de capacités infinies d'approvisionnement et de délais indépendants de la taille des commandes. La demande est supposée constante et celles non satisfaites sont différées.

Louly et al. (2007) ont par la suite généralisé les études de 2002 sur plusieurs périodes. Les auteurs proposent une procédure de séparation et évaluation, PSE, pour trouver la solution optimale basée sur des bornes inférieures et une borne supérieure de la fonction coût et des propriétés de dominance des variables de décision qui permettent de réduire l'espace de recherche des solutions

à chaque étape de la procédure. Les auteurs présentent des résultats numériques, et montrent l'efficacité de la méthode PSE grâce à la qualité des bornes inférieures, de la borne supérieure et de l'utilisation des propriétés de dominance.

A notre connaissance, il n'y a pas de modèles donnant une solution optimale quand les délais d'approvisionnement des composants suivent des lois de probabilité discrètes et quand la nomenclature comporte plus d'un niveau. Et c'est donc à ce type de systèmes que nous nous sommes intéressés. La complexité de l'étude est alors due à l'interdépendance entre les stocks de composants d'une même branche de la nomenclature, et à l'interdépendance entre les niveaux s'il s'agit d'une structure multi niveaux.

### 3. DEFINITION DU PROBLEME

Nous étudions le problème de la planification des réapprovisionnements des systèmes d'assemblage à deux niveaux : le produit fini s'obtient à partir de composants, eux-mêmes assemblés (voir Figure 1).

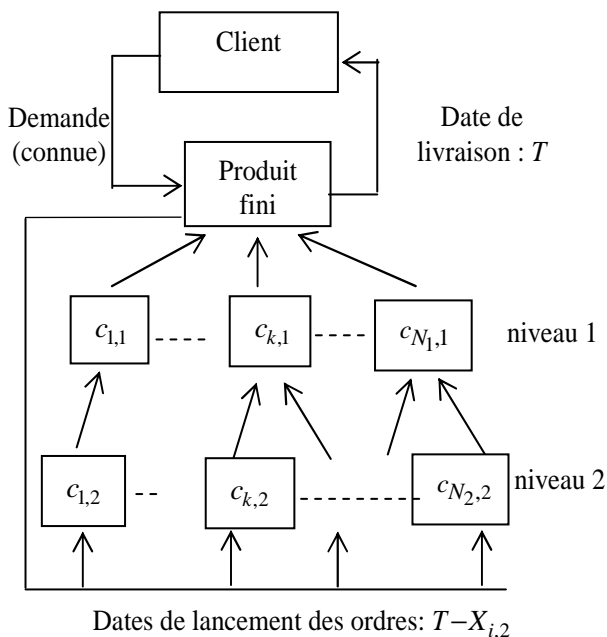


Figure 1. Description du problème

Nous limitons notre étude à un seul type de produit fini. Sa demande est supposée connue ainsi que la date de livraison souhaitée par le client. La capacité d'assemblage pour tous les composants ainsi que pour le produit fini est supposée infinie. Le coût unitaire de stockage pour chaque type de composant et le coût unitaire de rupture en produit fini sont connus. Les délais d'approvisionnement pour les différentes commandes des composants sont indépendants et de même loi. Cette loi est quelconque, connue et sa réalisation maximale est supposée finie.

Nous cherchons donc à obtenir les dates de lancement des ordres aux fournisseurs de niveau 2 qui minimisent la somme des coûts de stockage des composant (dû à l'interdépendance entre les composants nécessaires pour assembler le même composant (on peut pas assembler tant que tous les composants nécessaires ne sont pas présents)) et du coût de rupture en produit fini.

Nous utilisons par la suite les notations suivantes :

$D$	Demande en produits finis pour la période considérée (connue) ; sans perte de généralité on pose $D=1$
$T$	date de livraison du produit fini demandée par le client pour la période considérée ; sans perte de généralité on pose $T=0$
$N_i$	Nombre de composants au niveau $i$ ( $i=1$ ou $2$ )
$c_{i,j}$	Nom du $i^{\text{ème}}$ composant du niveau $j$ ( $j=1$ ou $2$ )
$S_{i,l}$	Ensemble des composants de niveau 2 nécessaires à l'assemblage d'un composant $c_{i,l}$
$n_{i,l}$	Nombre de composants faisant partie de l'ensemble $S_{i,l}$
$L_{i,j}$	Délai d'approvisionnement des composants $c_{i,j}$ , (variable aléatoire discrète) ;
$F_{i,j}(\cdot)$	Fonction de répartition de la variable aléatoire $L_{i,j}$
$u_{i,j}$	Valeur maximale de $L_{i,j}$ ; Chaque $L_{i,j}$ varie dans un intervalle $[0, u_{i,j}]$
$u$	$\max(u_{i,j})$
$h_{i,j}$	Coût unitaire de stockage des composants $c_{i,j}$ sur un intervalle de temps unitaire
$b$	Coût unitaire de rupture en produit fini sur un intervalle de temps unitaire
$x_{i,j}$	Délai d'approvisionnement calculé des composants $c_{i,j}$
$-X_{k,2}$	<b>Variable de décision</b> : Date de lancement des composants $c_{k,2}$
$(x)^+$	$\text{Max}(0, x)$

L'entreprise lance directement ses ordres aux fournisseurs de niveau 2. Chaque fournisseur de niveau 2 livre les composants nécessaires aux fournisseurs de niveau 1 avec un délai de livraison aléatoire. Les composants de niveau 2 sont alors assemblés pour fabriquer les composants de niveau 1, puis livrés de nouveau avec un délai de livraison aléatoire pour assembler le produit fini. Nous supposons que chaque composant de niveau 2 intervient dans le montage d'un unique composant de niveau 1 puisqu'on s'intéresse à des systèmes d'assemblage.

Si  $T=0$ , on a :

$$X_{k,2} = x_{k,2} + x_{i,1} \quad \text{pour } c_{k,2} \in S_{i,1} \quad (1)$$

Il y aura stockage des composants  $c_{k,2}$  s'ils n'arrivent pas à la même date pour assembler  $c_{i,1}$ . Le coût de stockage des composants  $c_{k,2} \in S_{i,1}$  est donc égal à :

$$\sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} (M_i - (L_{k,2} - X_{k,2})) \right),$$

Avec  $M_i = \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} - X_{k,2})$ .

Il n'y a pas d'autres coûts à considérer que les coûts de stockage puisqu'aucune date de livraison n'est explicitement requise.

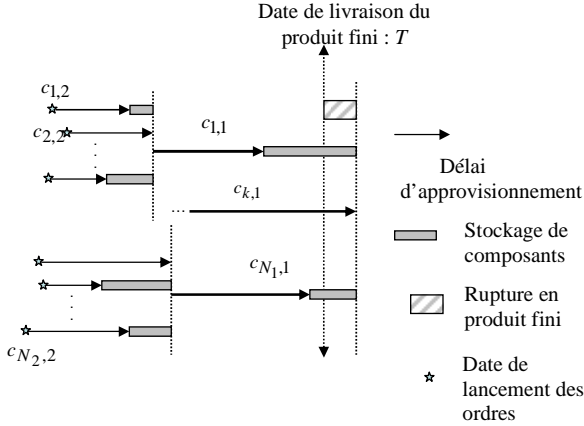


Figure 2. Illustration de problème

Concernant l'assemblage du produit fini à partir des composants de niveau 1, il peut y avoir à la fois des coûts de stockage et des coûts de rupture. En effet, les composants de niveau 1 sont stockés au fur et à mesure de leur arrivée jusqu'à ce que tous les composants de niveau 1 soient présents (comme au niveau inférieur), mais en plus il peut y avoir des coûts de rupture si le dernier composant de niveau 1 arrive après  $T=0$ , date de livraison demandée du produit fini, donc si  $M_i + L_{i,1} > 0$ . Le temps de rupture en produit fini se calcule en recherchant le composant pour lequel la valeur  $(M_i + L_{i,1})^+$  est la plus grande, c'ad :  $\max_{i=1, \dots, N_1} (M_i + L_{i,1})^+$ . Le coût de rupture en produit fini vaut donc :  $b \max_{i=1, \dots, N_1} (M_i + L_{i,1})^+$ .

Par ailleurs, Il y a stockage des composants  $c_{i,1}$ ,  $i=1, \dots, N_1$ , pendant le temps s'écoulant entre la date d'arrivée  $(M_i + L_{i,1})$  et la date à laquelle tous les composants de niveau 1 sont présents :  $\max_{i=1, \dots, N_1} (M_i + L_{i,1})^+$ .

Le coût de stockage des composants de niveau 1 est donc le suivant:

$$\sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} \left( \max_{i=1, \dots, N_1} (M_i + L_{i,1})^+ - (M_i + L_{i,1}) \right).$$

Le coût total s'écrit donc comme suit :

$$C(X, L) = H \max_{i=1, \dots, N_1} (M_i + L_{i,1})^+ - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} (M_i + L_{i,1})$$

$$+ \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \{M_i - (L_{k,2} - X_{k,2})\} \right) \quad (2)$$

Où  $H = b + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1}$  et

$$L = (L_{1,1}, \dots, L_{i,1}, \dots, L_{N_1}, L_{1,2}, \dots, L_{i,2}, \dots, L_{N_2}) ;$$

$$X = (X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2}) .$$

Ce coût est donc une variable aléatoire. Notre objectif est de minimiser l'espérance de cette variable aléatoire, c'est-à-dire le coût total moyen  $C(X) = EC(X, L)$ .

Il s'exprime comme suit :

### Proposition 1

$$C(X) =$$

$$\begin{aligned} &= H \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{o_1+o_2=s} \Pr(L_{i,1}=o_1) \times \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(X_{k,2} + o_2) \right) \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N_1} H_i \times \left( \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (F_{k,2}(X_{k,2} + s)) \right) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_1} H_i \times \sum_{s \geq 0} \left( \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (F_{k,2}(X_{k,2} - s - 1)) \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_1} \left( \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \{E(L_{k,2}) - X_{k,2}\} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} E(L_{i,1}) \end{aligned} \quad (3)$$

où,

$$H = b + \sum_{i=1}^{N_1} h_{i,1} ;$$

$$H_i = \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (h_{k,2}) - h_{i,1}, \text{ pour } i=1, \dots, N_1 ;$$

$$X = (X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2}) .$$

## 4. OPTIMISATION

### 4.1 Problème à optimiser

Notre problème peut donc se modéliser par le problème d'optimisation suivant :

$$\text{Min } C(X)$$

Sous les contraintes:

$$X_{i,2} = x_{k,2} + x_{i,1}, \quad (4)$$

$$U_{i,2} = u_{k,2} + u_{i,1}, \quad (5)$$

$$2 \leq X_{i,2} \leq U_{i,2}, \quad (6)$$

$$1 \leq x_{i,j} \leq u_{i,j}, \quad (7)$$

$$j=1,2, i=1,2, \dots, N_j, \text{ et } c_{k,2} \in S_{i,1}$$

## 4.2 Procédure de séparation et évaluation

Nous nous trouvons alors face à une fonction non linéaire à variables entières. Dès que l'énumération explicite de tout l'espace de recherche devient impossible (c'est-à-dire quand la taille du problème est importante), il est nécessaire d'utiliser des outils de la recherche opérationnelle performants afin de pouvoir trouver soit la solution optimale, soit au moins une bonne solution obtenue à l'aide d'une méthode approchée.

Nous présentons ici la procédure *d'optimisation exacte et efficace* de Séparation Évaluation (PSE) que nous avons développée pour résoudre ce problème.

Nous cherchons d'abord une expression plus simple de la fonction coût (3), puis nous calculons deux bornes inférieures, et une borne supérieure, et nous recherchons des propriétés de dominance, dans le but de réduire l'espace de recherche des solutions à chaque étape de la procédure.

Pour exprimer différemment la fonction coût (3), nous proposons de décomposer la nomenclature niveau par niveau (voir figure 2).

### 4.2.1 Décomposition du problème

L'optimisation direct de la fonction coût (3) est assez difficile, nous proposons donc de décomposer le problème afin de représenter différemment la fonction coût . Notre objectif est de trouver des propriétés intéressantes sur cette fonction telles que des propriétés de dominance, et des calculs de bornes inférieures et supérieures.

Nous définissons un élément de la nomenclature comme étant un sous-ensemble de la nomenclature composé d'un composant  $c_{i,1}$ ,  $i=1, \dots, N_1$ , et de tous les composants nécessaires à son assemblage  $c_{k,2} \in s_{i,1}$ , ou du produit fini et de tous les composants de niveau 1. Il y a donc  $(N_1 + 1)$  éléments de la nomenclature. Chaque élément  $i$ , ( $i=0, 1, \dots, N_1$ ) sera noté par  $E_i$ .

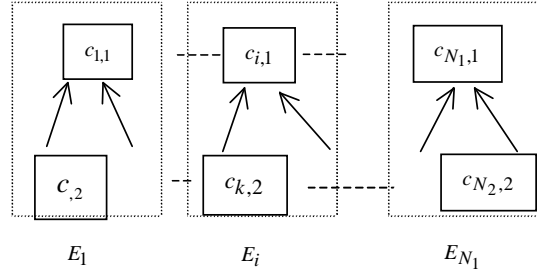
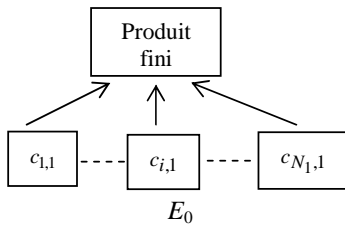


Figure 3. Décomposition du problème

Le coût total (3) peut alors être réécrit comme étant la somme des coûts des éléments :

$$C(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_1,2}) = \sum_{i=0}^{N_1} CE_i(x_{k,2}) \quad (8)$$

avec,

$(x_{k,2})$  : Le vecteur des composants  $x_{k,2}$  pour

$c_{k,2} \in s_{i,1}$ ,

$CE_i$  : Le coût moyen de  $E_i$ , pour  $i=0, 1, \dots, N_1$ .

Le coût moyen de l'élément  $E_0$  a été présenté dans Louly et al. (2007) comme suit :

$$CE_0(X) = \sum_{i=1}^{N_1} (h_{i,1}(x_{i,1} - E(L_{i,1})) + H \times \sum_{s \geq 0} \left( 1 - \prod_{i=1}^{N_1} F_{L_{i,1}}(x_{i,1} + s) \right)) \quad (9)$$

avec,

$$X = (x_1, \dots, x_{i,1}, \dots, x_{N_1,1}).$$

Calculons maintenant le coût moyen  $CE_i$  de  $E_i$ , pour ( $i=1, \dots, N_1$ ) :

### Proposition 2

Le coût de chaque  $E_i$ , ( $i=1, \dots, N_1$ ) est égal à :

$$CE_i(x_{k,2}, L_{k,2}) = \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} \left( h_{k,2} \times \left( \max(L_{k,2} - x_{k,2})^+ - (L_{k,2} - x_{k,2}) \right) + \sum_{y=1}^u b_i(y) \times \left( \Pr \left( \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} - x_{k,2})^+ = y \right) \right) \right) \quad (10)$$

où,

$$b_i(y) = -(y \times h_{i,1}) +$$

$$+ H \times \left( \sum_{k \geq 0} \sum_{s=0}^{y-1} \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - s) \times \prod_{j \neq i}^{N_1} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \right) \quad (11)$$

$(x_{k,2})$  : Le vecteur des composants  $x_{k,2}$  pour

$c_{k,2} \in s_{i,1}$ ,

$(L_{k,2})$  : Le vecteur des composants  $L_{k,2}$  pour

$c_{k,2} \in s_{i,1}$ .

**Démonstration :**

Le coût de  $E_i$  pour  $i=0,1,\dots, N_i$  est égal à la somme du coût de stockage des composants nécessaires pour assembler  $c_{i,1}$  et du coût de retard si tous les composants

$c_{k,2} \in S_{i,1}$  ne sont pas présents à  $-x_{i,1}$ .

Le coût de stockage est égal à :

$$\sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \times \left( \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} - x_{k,2})^+ - (L_{k,2} - x_{k,2}) \right)$$

Nous notons par  $b_i(y)$  le coût d'un retard de  $y$  unités de temps. Alors, le coût de retard est égal à :

$$\sum_{y=1}^u b_i(y) \times \left( \Pr \left( \max_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (L_{k,2} - x_{k,2})^+ = y \right) \right).$$

avec ,

$$b_i(y) = CE_0(x_{1,1}, \dots, x_{i,1} - y, \dots, x_{N_i,1}) - CE_0(x_{1,1}, \dots, x_{i,1}, \dots, x_{N_i,1}) \quad (7)$$

D'après (4), la relation (7) peut être réécrite comme suit :

$$b_i(y) = -(y \times h_{i,1}) + H_1 \times \left( \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{s=0}^{y-1} \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - s) \times \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \right) \right) \quad (8)$$

Le coût  $CE_i(x_{k,2}, L_{k,2})$  étant aléatoire, nous nous intéressons à son coût moyen :  $CE_i(x_{k,2})$ .

**Proposition 3**

Le coût moyen de  $E_i$ , ( $i=1,\dots,N_i$ ) est égal à :

$$\begin{aligned} CE_i(x_{k,2}) &= \\ &= \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \times \sum_{s \geq 0} (1 - \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(x_{k,2} + s)) \\ &\quad + \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} (h_{k,2} \times (x_{k,2} - E(L_{k,2}))) \\ &\quad + \sum_{y=1}^u b_i(y) \times \left( \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(x_{k,2} + y) \right) \\ &\quad - \sum_{y=1}^u b_i(y) \times \left( \prod_{c_{k,2} \in S_{i,1}} F_{k,2}(x_{k,2} + y - 1) \right) \end{aligned} \quad (12)$$

**Proposition 4**

Les inégalités suivantes présentent des propriétés du coût de retard  $b_i(y)$  :

- (i)  $0 \leq b_i(y) \leq -y \times h_{i,1} + H, \forall y = 1, \dots, u$  ;
- (ii) la fonction  $b_i(y)$  est une fonction croissante par rapport à  $y$ , i.e.,  $b_i(1) \leq \dots \leq b_i(y) \leq \dots \leq b_i(u)$  ;

- (iii)  $b_i(y) - b_i(y-1) \leq b_i(y+1) - b_i(y), \forall y = 1, \dots, u$  .

**Démonstration :**

Par définition :  $b_i(0) = 0$ .

D'après (8), on obtient immédiatement :

$$b_i(y) \leq -(y \times h_{i,1}) + H, \forall y = 1, \dots, u$$

Nous obtenons donc la propriété (i).

D'après (8) et pour  $y=1, \dots, u$ , on a :

$$\begin{aligned} b_i(y) &= -(y \times h_{i,1}) + \\ &+ H \times \left( \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{s=0}^{y-1} \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - s) \times \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \right) \right) \\ &= b_i(y-1) + (-h_{i,1}) + \\ &H \times \left( \sum_{k \geq 0} \left( \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - (y-1)) \times \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \right) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

La relation (13) peut être réécrite comme suit:

$$b_{i,1}(y) = b_{i,1}(y-1) + f_{i,1}(y-1), \text{ pour } y=2, \dots, u \quad (14)$$

avec,

$$f_{i,1}(y-1) = (-h_{i,1}) +$$

$$H \times \left( \sum_{k \geq 0} \left( \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - (y-1)) \times \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \right) \right)$$

Il reste donc à montrer que :  $f_{i,1}(y-1) \geq 0$ .

Il est à noter que pour  $y=1$ :  $f_{i,1}(0) = b_{i,1}(1)$ .

$f_{i,1}(y-1)$  est une fonction croissante par rapport à  $y$ .

En effet,

$$\text{Soit } f_{i,i}(y) = f_{i,1}(y) - f_{i,1}(y-1) =$$

$$= H \times \sum_{k \geq 0} \left( \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - y) - \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - (y-1)) \right)$$

$$\times \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k)$$

$$= H \times \sum_{k \geq 1} \left( \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - y) \right)$$

$$\times \left( \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k) - \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k - 1) \right)$$

$$+ H \times \left( \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} - y) \right) \times \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1})$$

on a :  $\prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \geq \prod_{j \neq i}^{N_i} F_{j,1}(x_{j,1} + k - 1)$ , ce qui

prouve que  $f_{i,i}(y)$  est toujours positive et donc  $f_i(y-1)$  est une fonction croissante par rapport à  $y$ .

comme  $f_{i,1}(0) = b_i(1) \geq 0$  nous obtenons donc:

$$b_i(y-1) \leq b_i(y), \quad \forall y = 2, \dots, u.$$

La propriété (iii) est démontrée comme suit :

Nous avons démontré que  $f_{i,i}(y)$  est toujours positive,

donc  $f_{i,1}(y) \geq f_{i,1}(y-1)$ .

D'après (3.32) : pour  $y=2, \dots, u$ ,

$$f_{i,1}(y-1) = b_i(y) - b_i(y-1).$$

Nous obtenons donc :

$$b_i(y) - b_i(y-1) \leq b_i(y+1) - b_i(y).$$

#### 4.2.2 Propriétés de dominance

Avant de détailler la relation des propriétés de dominance, nous introduisons tout d'abord la définition suivante :

##### Accroissements partiels

Les accroissements partiels à droite et à gauche par rapport à la variable  $X_{i,2}$  sont les fonctions suivantes :

$$G_i^+(X) = C(X_{1,2}, \dots, X_{i,2} + 1, \dots, X_{N_2,2}) - C(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2}), \quad (15)$$

$$G_i^-(X) = C(X_{1,2}, \dots, X_{i,2} - 1, \dots, X_{N_2,2}) - C(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2}), \quad (16)$$

Notons que la fonction  $G_i^-(X)$  n'est définie que pour les vecteurs  $X$  pour lesquels la  $i^e$  composante  $X_{i,2}$  est strictement supérieur à 1.

##### Proposition 5

Les accroissements partiels  $G_i^+(X)$  et  $G_i^-(X)$  sont des fonctions qui vérifient les propriétés suivantes:

(i) pour  $c_{k,2} \in S_{i,1}$ ,

$$\begin{aligned} G_i^+(X) &= h_{i,2} \\ &- \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \times \left( \sum_{s \geq 0} \left( \Pr(L_{k,2} = x_{k,2} + s + 1) \times \prod_{j \neq k}^{n_{i,1}} F_{j,2}(x_{j,2} + s) \right) \right) \\ &- \sum_{y=1}^u (b_i(y) - b_i(y-1)) \times \\ &\quad \times \left( \Pr(L_{i,2} = x_{i,2} + y) \times \prod_{j \neq i}^{n_{i,1}} F_{j,2}(x_{j,2} + y - 1) \right) \end{aligned} \quad (17)$$

(ii) pour  $c_{k,2} \in S_{i,1}$ ,

$$\begin{aligned} G_i^-(X) &= -h_{i,2} \\ &+ \sum_{c_{k,2} \in S_{i,1}} h_{k,2} \times \left( \sum_{s \geq 0} \left( \Pr(L_{k,2} = x_{k,2} + s) \times \prod_{j \neq k}^{n_{i,1}} F_{j,2}(x_{j,2} + s) \right) \right) \\ &+ \sum_{y=1}^u (b_i(y) - b_i(y-1)) \times \end{aligned}$$

$$\times \left( \Pr(L_{i,2} = X_{i,2} + y - 1) \times \prod_{j \neq i}^{n_{i,1}} F_{j,2}(x_{j,2} + y - 1) \right) \quad (18)$$

(iii)  $G_i^+(X)$  est une fonction croissante par rapport à  $X_{i,2}$  et décroissante par rapport à  $X_{j,2}$  pour  $j$  différent de  $i$ .

(iv)  $G_i^-(X)$  est une fonction décroissante par rapport à  $X_{i,2}$  et croissante par rapport à  $X_{j,2}$  pour  $j$  différent de  $i$ .

##### Démonstration

On a d'après la relation (8) :

$$C(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2}) = \sum_{i=0}^{N_1} CE_i(x_{k,2})$$

Nous obtenons donc :

pour  $c_{k,2} \in S_{i,1}$ ,

$$G_i^+(X) = CE_i(x_{1,2}, \dots, x_{i,2} + 1, \dots, x_{n_{i,1},2}) - CE_i(x_{1,2}, \dots, x_{i,2}, \dots, x_{n_{i,1},2})$$

$$G_i^-(X) = CE_i(x_{1,2}, \dots, x_{i,2} - 1, \dots, x_{n_{i,1},2}) - CE_i(x_{1,2}, \dots, x_{i,2}, \dots, x_{n_{i,1},2})$$

Par la suite, nous obtenons facilement la propriété (i) et la propriété (ii).

Par ailleurs, l'expression (17) montre que la fonction  $G_i^+(X)$  est décroissante par rapport à  $x_{j,2}$  pour  $j$  différent de  $i$  et d'autre part, d'après (14) :

$$\begin{aligned} (b_i(y) - b_i(y-1)) &= (-h_{i,1}) + \\ &+ H \times \left( \sum_{k \geq 0} \left( \Pr(L_{i,1} = x_{i,1} + k - (y-1)) \times \prod_{j \neq i}^{N_1} F_{j,1}(x_{j,1} + k) \right) \right), \end{aligned} \quad \text{et}$$

donc  $G_i^+(X)$  est décroissante par rapport à  $x_{j,1}$  pour  $j \neq i$ . Enfin, d'après la relation (1)  $G_i^+(X)$  est décroissante par rapport à  $X_{j,2}$  pour  $j \neq i$ .

Pour démontrer que  $G_i^+(X)$  est croissante par rapport à  $X_{i,2}$ , il suffit de montrer que la fonction  $H_{i,2}^+(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2})$  définie ci-après est toujours positive :

$$\begin{aligned} H_{i,2}^+(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2}) &= \\ &= G_i^+(X_{1,2}, \dots, X_{i,2} + 1, \dots, X_{N_2,2}) \\ &- G_i^+(X_{1,2}, \dots, X_{i,2}, \dots, X_{N_2,2}). \end{aligned}$$

La démonstration est basée sur les trois propriétés de la proposition (4) et la propriété (iv) en est une conséquence immédiate.

### Propriétés de dominance

Nous prenons comme espace de recherche initial le pavé du vecteur  $[A, B]$  où les composants du vecteur  $A$  sont  $a_{i,2}=2$  et les composantes du vecteur  $B$  sont  $b_{i,2}=U$ .

Ces caractéristiques précédentes permettent de trouver les propriétés de dominance suivantes :

- (i) si  $\exists i$  tel que  $G_i^+(A) < 0$ , alors chaque solution  $X$  de  $[A, B]$  avec  $X_{i,2} = a_{i,2}$  est dominée.
- (ii) si  $\exists i$  tel que  $G_i^-(B) < 0$ , alors chaque solution  $X$  de  $[A, B]$  avec  $X_{i,2} = b_{i,2}$  est dominée.

En effet, si  $\exists i$  tel que  $G_i^+(A) < 0$ , alors le vecteur  $A$  est dominé par le vecteur  $(a_{1,2}, \dots, a_{i,2}+1, \dots, a_{N_2,2})$  car la définition de la fonction  $G_i^+(X)$  donnera l'inégalité stricte suivante :

$$CE_i(a_{1,2}, \dots, a_{i,2} + 1, \dots, a_{n_{i,1},2}) < CE_i(a_{1,2}, \dots, a_{i,2}, \dots, a_{n_{i,1},2})$$

En plus, pour tout vecteur  $X$  de  $[A, B]$  tel que  $X_{i,2} = a_{i,2}$ , nous aurons l'inégalité suivante :

$$G_i^+(X_{1,2}, \dots, X_{i-1,2}, a_{i,2}, X_{i+1,2}, \dots, X_{n_{i,1},2}) \leq G_i^+(a_{1,2}, \dots, a_{i,2}, \dots, a_{n_{i,1},2}) < 0$$

car la fonction  $G_i^+(X)$  est décroissante par rapport à  $X_{j,2}$  pour  $j$  différent de  $i$ . le vecteur  $X$  de  $[A, B]$  tel que  $X_{i,2} = a_{i,2}$  est donc, à son tour, dominé par le vecteur  $(X_{1,2}, \dots, X_{i-1,2}, a_{i,2} + 1, X_{i+1,2}, \dots, X_{n_{i,1},2})$ . La propriété (i) est donc vérifiée, la propriété (ii) se démontre de la même façon.

Nous allons par la suite présenter deux bornes inférieures et une borne supérieure de la fonction objectif.

### 4.2.3 Bornes inférieures

Nous présentons ici le calcul d'une borne inférieure et d'une borne supérieure de la fonction objectif  $C(X)$  sur l'espace  $[A, B]$  :

$$A = (A_1, \dots, A_i, \dots, A_{N_1}), B = (B_1, \dots, B_i, \dots, B_{N_1}),$$

avec

$$A_i : \text{le vecteur } (a_{k,2}) \text{ pour } c_{k,2} \in S_{i,1},$$

$$B_i : \text{le vecteur } (b_{k,2}) \text{ pour } c_{k,2} \in S_{i,1}.$$

Les valeurs  $BI_1$  et  $BI_2$  sont deux bornes inférieures pour la fonction coût sur le pavé  $[A, B]$  :

$$BI_1 = C(A) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_2} [(b_{i,2} - a_{i,2}) \times \min(G_i^+(b_{1,2}, \dots, b_{i-1,2}, a_{i,2}, \dots, a_{N_2,2}), 0)] \quad (19)$$

$$BI_2 = C(B) +$$

$$\sum_{i=1}^{N_2} [(b_{i,2} - a_{i,2}) \times \min(G_i^-(a_{1,2}, \dots, a_{i-1,2}, b_{i,2}, \dots, b_{N_2,2}), 0)] \quad (20)$$

### Démonstration

Pour démontrer (19), nous utilisons la différence de coût suivante :

$$C(X) - C(A) = \sum_{i=1}^{N_2} \left( \sum_{j=0}^{X_{i,2} - a_{i,2} - 1} G_i^+(X_{1,2}, \dots, X_{i-1,2}, a_{i,2} + j, \dots, a_{N_2,2}) \right)$$

En utilisant le fait que  $G_i^+$  est décroissante par rapport à  $X_{j,2}$  pour  $j \neq i$  :

$$G_i^+(X_{1,2}, \dots, X_{i-1,2}, a_{i,2} + j, \dots, a_{N_2,2}) \geq G_i^+(b_{1,2}, \dots, b_{i-1,2}, a_{i,2} + j, \dots, a_{N_2,2})$$

Et donc:

$$\begin{aligned} C(X) - C(A) &\geq \sum_{i=1}^{N_2} \left( \sum_{j=0}^{X_{i,2} - a_{i,2} - 1} G_i^+(b_{1,2}, \dots, b_{i-1,2}, a_{i,2} + j, \dots, a_{N_2,2}) \right) \\ &\geq \sum_{i=1}^{N_2} [(b_{i,2} - a_{i,2}) \times \min(G_i^+(b_{1,2}, \dots, b_{i-1,2}, a_{i,2} + j, \dots, a_{N_2,2}), 0)] \end{aligned}$$

C.Q.F.D

### 4.2.4 Borne supérieure

Cette procédure commence par la division de l'espace de recherche en deux fils  $[A, B^1]$  et  $[A^1, B]$ . Cette division du pavé  $[A, B]$  en deux pavés  $[A, B^1]$  et  $[A^1, B]$  est faite en coupant le coté le plus long du pavé  $[A, B]$ .

$$A \leftarrow 2$$

$$B \leftarrow (U_{1,2}, \dots, U_{i,2}, \dots, U_{N_2,2})$$

$$BS \leftarrow \min(C(A), C(B))$$

Tant que (cardinal de  $[A, B]$  est supérieure à 1) faire

Séparer  $[A, B]$  en deux sous ensembles  $[A, B^1]$  et  $[A^1, B]$

$BS \leftarrow$  la solution avec le coût le plus faible, choisie parmi les quatre possibilités :  $A, B^1, A^1$  ou  $B$ .

Si  $(A, B^1)$  alors

$$[A, B] \leftarrow [A, B^1]$$

Sinon

$$[A, B] \leftarrow [A^1, B]$$

Fin Si

Fin Tant que

### 4.2.5 Algorithme PSE

L'algorithme PSE que nous proposons utilise pour branchement le schéma suivant. Le sous-ensemble de pavé

$[A, B]$  dont le cardinal est le plus grand est divisé en deux sous-ensembles fils  $[A, B^1]$  et  $[A^1, B]$  de même ordre. Avant d'être intégré dans l'arbre, chaque sous-ensemble fils est réduit en utilisant les propriétés de dominances. L'idée de base est donc la recherche en largeur d'abord mais avec des modifications en tenant compte des résultats de la réduction.

La borne inférieure ( $BI$ ) utilisée est le maximum des deux bornes  $BI_1$  et  $BI_2$ .

Début

```

A ← 2
B ← (U1,2, ..., Ui,2, ..., UN2,2)
BS ← la borne supérieure de ([A, B])
le_min_actuel ← BS
La_solution_actuelle ← celle donnée par BS
// Initialiser l'ensemble E des sous ensembles
E ← { [A, B] }
Si A ≠ B alors
    Tant que (E n'est pas vide) faire
        [A, B] ← l'élément de E de cardinal maximal
        E ← E - { [A, B] }
        Diviser [A,B] en deux sous-ensembles:
        [A, B1] et [A1, B]

        Si (l'ensemble [A, B1] n'est pas dominé, A ≠ B1, sa borne inférieure BI < le_min_actuel) alors
            On l'ajoute à E : E ← E ∪ {[A, B1]}
            Fin si

        Si (A1 ≠ B et sa borne inférieure BI < le_min_actuel) alors
            On l'ajoute à E : E ← E ∪ { [A1, B] }
            Fin si

        Si (C(A1) < le_min_actuel) alors
            le_min_actuel ← C(A1)
            La_solution_actuelle ← A1
        Fin si

        Si (C(B1) < le_min_actuel) alors
            le_min_actuel ← C(B1)
            La_solution_actuelle ← B1
        Fin si
        Eliminer les éléments de E dont la borne inférieure (BI) est plus grande que le_min_actuel.
    Fin Tant que
Fin si
Fin
    
```

## 5. EXEMPLE NUMERIQUE

Considérons l'exemple suivant d'un système d'assemblage à deux niveaux. Le niveau 1 est constitué de deux composants, chacun de ces composants s'obtiennent en assemblant cinq composants de niveau 2. Le coût de rupture est égal à 100. Les valeurs maximales de tous les délais d'approvisionnement valent 5. Les lois de probabilité des délais d'approvisionnement sont reportées dans le tableau 3.1. Les coûts de stockage des composants sont comme suit:  $h_{1,1}=40$ ;  $h_{2,1}=20$ ;  $h_{1,2}=10$ ;  $h_{2,2}=6$ ;  $h_{3,2}=9$ ;  $h_{4,2}=3$ ,  $h_{5,2}=5$ ;  $h_{6,2}=5$ ;  $h_{7,2}=6$ ;  $h_{8,2}=8$ ;  $h_{9,2}=10$  et  $h_{10,2}=15$ .

	w	1	2	3	4	5
Pr ( $L_{1,1}=w$ )	0.50	0.30	0.10	0.05	0.05	
Pr ( $L_{2,1}=w$ )	0.25	0.15	0.20	0.20	0.20	
Pr ( $L_{1,2}=w$ )	0.15	0.30	0.20	0.15	0.20	
Pr ( $L_{2,2}=w$ )	0.10	0.20	0.30	0.15	0.25	
Pr ( $L_{3,2}=w$ )	0.40	0.10	0.20	0.15	0.15	
Pr ( $L_{4,2}=w$ )	0.40	0.30	0.10	0.10	0.10	
Pr ( $L_{5,2}=w$ )	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	
Pr ( $L_{6,2}=w$ )	0.20	0.20	0.25	0.15	0.20	
Pr ( $L_{7,2}=w$ )	0.15	0.20	0.50	0.05	0.10	
Pr ( $L_{8,2}=w$ )	0.10	0.10	0.20	0.30	0.30	
Pr ( $L_{9,2}=w$ )	0.20	0.25	0.10	0.05	0.40	
Pr ( $L_{10,2}=w$ )	0.10	0.35	0.15	0.35	0.05	

Tableau 1. Loi de distribution des délais d'approvisionnement

Les variables de décision  $X_{k,2}$  sont donc initialement comprises entre 2 et 10.

En utilisant la PSE basée sur les propriétés de dominance, les bornes inférieures et la borne supérieure présentés précédemment le coût minimal a été trouvé après 13 itérations et vaut 235,56.

Les dates de lancement optimales correspondant à ce coût minimal sont les suivantes:

s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$X_{s,2}^*$	7	7	7	7	7	10	9	9	9	9

Tableau 2. Délais d'approvisionnement optimaux

D'après le tableau 2, la date de lancement de l'ordre pour les composants  $c_{1,2}, \dots, c_{5,2}$  est égal à  $T-7$ , pour  $c_{6,2} : T-10$ , et pour  $c_{7,2}, \dots, c_{10,2} : T-9$ .

## 6. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous nous intéressons donc à la planification des réapprovisionnements quand les délais d'approvisionnement sont aléatoires. Cette démarche s'inscrit dans l'étude plus générale de la paramétrisation de la méthode MRP.

Nous proposons une nouvelle méthode d'optimisation où le critère considéré est la somme du coût de stockage des composants et du coût de rupture en produits finis. Notre approche propose une technique d'optimisation avec des variables de décision entières donc on se place dans un environnement temporel discret, ce qui est plus adapté au contexte du réapprovisionnement qu'une approche continue. Nous avons alors développé un algorithme d'optimisation basé sur la technique de séparation et évaluation PSE.

Par la suite, nous voulons étudier le contexte multi-périodes. En effet, notre approche étudie la planification sur une seule période. Les délais d'approvisionnement obtenus peuvent donc être sur-évalués. Si nous pouvons étendre notre étude à la planification sur plusieurs périodes, il est possible de réduire les délais d'approvisionnement et donc les stocks de composants. En revanche, en plus de la difficulté due à la dépendance des stocks des composants (due à l'opération d'assemblage) et la dépendance entre les niveaux, nous devons aussi considérer la dépendance entre les périodes. Nous nous appuyerons sur les travaux de Ould Louly et Dolgui (2002; 2004) qui portent sur des modèles de planification multi-périodes pour des systèmes d'assemblage à un seul niveau avec des délais d'approvisionnement aléatoires.

Une autre piste de recherche consistera à étendre notre étude aux systèmes d'assemblage multi-niveaux.

## REFERENCES

- Axsäter S., (2005) « Planning order releases for an assembly system with random operation times », *OR Spectrum*, vol. 27, p. 459-470.
- Buzacott JA, Shantikumar JG (1994) safety stock versus safety time in MRP controlled production systems. *Management Science* 40: 1678-1689
- Chen F (2001) Market segmentation, advanced demand information, and supply chain performance. *Manufacturing & Service Operation Management* 3: 53-67.
- Chu C., Proth J.M. and Xie X., (1993). Supply management in assembly systems. *Naval Research Logistics*, 40, pp. 933-949.
- Dolgui A., Portmann M.C., and Proth J.M., 1995. Planification de systèmes d'assemblage avec approvisionnement aléatoire en composants. *Journal of Decision Systems*, 4 (4), 255-279.
- Dolgui A., and Louly M.A., 2002. A Model for Supply Planning under Lead Time Uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 78, 145-152.
- Fujiwara O., and Sedarage D., 1997. An optimal (Q,r) policy for a multipart assembly system under stochastic part procurement lead times. *European Journal of Operational Research*, 100, 550-556.
- Hariharan R, Zipkin P (1995) Customer-order information, lead times, and inventories. *Management Science* 41: 1599-1607
- Karaesmen F, Buzacott JA, Dallery Y(2002) Integrative advance order information in make-to stock production systems. *IIE Transactions* 34:649-662.
- Kumar A., 1989. Component Inventory Cost in an Assembly Problem with Uncertain Supplier Lead-Times. *IIE Transactions*, 21 (2), 112 –121.
- Ould Louly M.A., and Dolgui A., (2002). Newsboy model for supply planning of assembly systems. *International Journal of Production Research*, 40 (17), pp. 4401-4414.
- Ould Louly M.A., Dolgui A., and Hnaïen F., (2007). Optimal Supply Planning in MRP Environments for Assembly Systems with Random Component Procurement Times. *International Journal of Production Research*, (accepted, in Press).
- Proth, J.M., Mauroy, G., Wardi, Y., Chu, C. and Xie, X., 1997. Supply management for cost minimization in assembly systems with random components yield times. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 8, 385-403.
- Tang O. and Grubbström R.W., (2003). The detailed coordination problem in a two-level assembly system with stochastic lead times. *International Journal Production Economics*, 81-82, pp. 415-429.
- Yano, C.A., 1987, Stochastic leadtimes in two-level assembly systems. *IIE Transactions*, 19(4), 95-106.