

# Commande floue adaptative à mode glissant pour des systèmes MIMO

Sinda ALOUI<sup>1,2</sup>, Olivier PAGÈS<sup>1</sup>, Ahmed EL HAJJAJI<sup>1</sup>, Abdessattar CHAARI<sup>2</sup>, Yassine KOUBAA<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Modélisation Information et Systèmes (MIS)

Université de Picardie Jules Vernes UPJV, 7 rue du Moulin Neuf, 80000 Amiens, France

opages@u-picardie.fr, ahmed.hajjaji@u-picardie.fr

<sup>2</sup> Unité de Commande Automatique (UCA), <sup>3</sup>Unité de Commande de Procédés Industriels (UCPI)  
École Nationale d'Ingénieurs de Sfax (ENIS), BPW, 3038, Sfax, Tunisie.

aloui-sinda@yahoo.fr, abdessattar2004@yahoo.fr, Yassine.Koubaa@enis.run.tn

*Résumé*— L'objectif de ce papier est la synthèse d'une commande adaptative floue à mode glissant amélioré pour une classe de systèmes non linéaires multi-entrées multi-sorties (MIMO) à dynamique inconnue et avec perturbations extérieures. Le contrôleur proposé est appliqué à la poursuite de trajectoires. Afin de surmonter le problème de broutement, la loi de commande est élaborée à partir des techniques du mode de glissement et de la commande de type proportionnel intégral (PI). Les systèmes d'inférence floue approximent la dynamique du procédé et leurs paramètres et ceux du PI sont adaptés en ligne en utilisant l'approche de Lyapunov. Pour illustrer les performances de la méthode proposée, des résultats de simulations sur un robot à deux degrés de liberté sont proposés.

*Mots-clés*— Commande adaptative floue, Commande par mode de glissement, Systèmes MIMO, Poursuite de trajectoires.

## I. INTRODUCTION

La complexité des systèmes apporte souvent des limitations dans les méthodes de modélisation traditionnelles. Ces dernières s'avèrent souvent incapables de représenter correctement le comportement global de certains types procédés. Cependant, il existe des situations où un expert humain peut accomplir la tâche de commande en décrivant le comportement du système par des propositions linguistiques [16], d'où la naissance d'une nouvelle classe de systèmes nommés systèmes flous. Bien qu'il ait été démontré que ces derniers peuvent approximer n'importe quelle fonction non linéaire continue, en se basant sur le théorème d'approximation universelle, ils ne se sont pas montrés performants face aux incertitudes et aux imprécisions [2] [13]. En outre, les systèmes dynamiques présentent des perturbations extérieures, des non linéarités (par exemple des non linéarités de type friction, hystérésis) et des incertitudes paramétriques. L'utilisation des algorithmes de commande robuste vis-à-vis de ces non linéarités et de ces perturbations est donc souhaitable aussi bien en régulation qu'en poursuite de trajectoires. Pour remédier aussi à ce problème de poursuite de trajectoires, des systèmes de commande adaptatifs utilisant des méthodes basées sur l'approche de Lyapunov sont développés. Les systèmes d'inférence floues présentent l'avantage d'intégrer les techniques adaptatives

et robustes, notamment, les systèmes flous adaptatifs [1], les systèmes flous mode glissants [3-4], les systèmes flous adaptatifs à mode glissant. Récemment, les systèmes flous adaptatifs à mode glissant ont prouvé leur efficacité dans la commande des systèmes non linéaires incertains, soumis à des variations paramétriques et à des perturbations. Néanmoins, l'application de cette technique peut engendrer des dégradations des performances à cause du phénomène de broutement provenant de la discontinuité de la loi de commande qui risque parfois de mener le système à l'instabilité. De nombreuses solutions ont été proposées dans le but de réduire ou d'éliminer ce phénomène. Plusieurs méthodes sont décrites dans la littérature à savoir : concept de la bande limite qui consiste à remplacer la fonction discontinue de la loi de commande par une approximation continue [15-16]. Parmi les fonctions utilisées, nous pouvons citer : la fonction saturation [5], [16], la fonction pseudo-signe, la fonction arc tangente, la fonction tangente hyperbolique. Bien que l'approximation de la fonction " signe " par des fonctions continues au voisinage de la surface de glissement permette de surmonter le problème de broutement, cette même approximation entraîne une dégradation des propriétés de robustesse et d'invariance du régime glissant. Une autre solution, capable d'éliminer le phénomène de broutement malgré la discontinuité de la loi de commande, consiste à intégrer un observateur asymptotiquement stable dans la boucle fermée du système [16]. Cependant, la synthèse d'un tel observateur n'est pas possible lorsque le système étudié est non linéaire et incertain. Wang et al.[6] ont opté pour l'approximation de la commande discontinue par un système flou. Récemment est apparue la commande par mode glissant d'ordre supérieur. En effet dans ce cas, la commande discontinue agit, non plus sur la première dérivée de la variable de glissement, mais sur une dérivée d'ordre supérieur [17] et [18]. Ainsi il est alors possible d'atténuer le phénomène de broutement tout en conservant ses propriétés de robustesse et de convergence en temps fini et en garantissant une meilleure précision de convergence. Nous nous intéressons, dans ce papier, à la synthèse d'une loi de commande adaptative floue robuste

vis-à-vis des perturbations et des incertitudes combinant le mode glissant et la commande de type Proportionnel-Intégral (PI) afin de réduire le phénomène de broutement, d'assurer la convergence globale de l'erreur de poursuite et de ne pas dégrader les propriétés de robustesse [7],[8] [20]. Le papier est organisé comme suit : après une introduction, nous présentons dans le deuxième paragraphe la classe de système non linéaires et les objectifs à atteindre. La structure du contrôleur flou et l'étude de la stabilité sont proposées dans le troisième paragraphe. Enfin, dans le quatrième paragraphe, nous présentons les résultats de simulations sur bras de robot à deux degrés de liberté pour illustrer les performances de la commande floue adaptative à mode glissant.

## II. COMMANDE À MODE GLISSANT CONVENTIONNELLE DANS LES SYSTÈMES MIMO

Considérons la classe de systèmes non linéaires suivante :

$$\begin{aligned} y_1^{(n_1)} &= f_1(x) + \sum_{j=1}^p g_{1j}(x)u_j + d_1 \\ y_2^{(n_2)} &= f_2(x) + \sum_{j=1}^p g_{2j}(x)u_j + d_2 \\ &\dots \\ y_p^{(n_p)} &= f_p(x) + \sum_{j=1}^p g_{pj}(x)u_j + d_p \end{aligned} \quad (1)$$

Où  $x = (y_1 \dots y_1^{(n_1-1)}, \dots, y_p \dots y_p^{(n_p-1)})^T$  est le vecteur d'états supposé mesurable ( $x^T$  représente la transposée de  $x$ ) et  $n_1 + \dots + n_p = n$ ,  $U = (u_1 \dots u_p)^T \in \mathbb{R}^p$  est le vecteur d'entrées.  $Y = (y_1 \dots y_p)^T$  est le vecteur de sorties et  $f_i(x); g_{ij}(x)$   $i, j = 1 \dots p$  sont des fonctions non linéaires supposées inconnues et bornées.  $(d_1, d_2, \dots, d_p)$  est le vecteur de perturbations tel que  $|d_i| < D_i \forall i = 1 \dots p$ .

Soient :

$$G(x) = [g_{ij}]_{1 \leq i, j \leq p}; F(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))^T;$$

$y^{(n)} = (y_1^{(n_1)}, \dots, y_p^{(n_p)})^T; d(x, t) = (d_1, d_2, \dots, d_p)^T$  Alors, (1) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$y^{(n)} = F(x) + G(x)U + d(x, t) \quad (2)$$

Dans ce papier, nous optons pour l'hypothèse suivante :

**Hypothèse1 :** la matrice  $G(x)$  est inversible  $\forall x$ .

**Hypothèse2 :** Les trajectoires désirées  $y_{d_i}(t), i = 1 \dots p$  sont des fonctions du temps bornées et connues avec des dérivées connues bornées et sont supposées différentiables  $i$ -fois ( $y_{d_i} \in C_i^r$ ).

Notre objectif consiste à l'élaboration d'une loi de commande permettant une poursuite de trajectoires du vecteur des signaux de références  $Y_d = (y_{d1} \dots y_{dp})^T$  par le vecteur de sorties  $Y$ .

En effet, afin d'aboutir aux objectifs visés cette loi de commande doit contraindre les trajectoires d'état du système (2) à atteindre et à rester sur la surface de glissement malgré la présence de perturbations extérieures. Pour cela, une première condition nécessaire pour l'établissement d'un régime glissant est que la variable de glissement ait un degré relatif égal à 1 par rapport à la loi de commande. Considérons donc la surface de glissement admettant dans l'espace

d'état de l'erreur l'expression suivante :

$$S = \begin{pmatrix} k_{11}e_1 + k_{12}\dot{e}_1 + \dots + k_{1(n_1-1)}e_1^{(n_1-1)} \\ \dots \\ k_{p1}e_p + k_{p2}\dot{e}_p + \dots + k_{p(n_p-1)}e_p^{(n_p-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ \dots \\ s_p \end{pmatrix} \quad (3)$$

Où le vecteur  $e$  représentant l'erreur de poursuite est défini par :  $e = (e_1 \dots e_p)^T = (y_1 - y_{d1} \dots y_p - y_{dp})^T = Y - Y_d$  et les coefficients  $k_{ij}$  ( $\forall i = 1 \dots p, j = 1 \dots n_i$ ) sont choisis tel que les polynômes

$$\lambda^{n_i-1} + \sum_{j=1}^{n_i-1} k_{ij}\lambda^{j-1} = 0 \quad (4)$$

sont des polynômes d'Hurwitz. Une deuxième condition est la convergence de  $s_i$  vers 0 en temps fini. Dans ce sens, la condition  $\eta$ -attractivité doit être respectée. Cette condition est définie par :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (s_i)^2 \leq -\eta_{\Delta_i} |s_i| \quad \eta_{\Delta_i} > D_i > 0 \quad i = 1 \dots p \quad (5)$$

La dérivée de la surface de glissement par rapport au temps s'écrit :

$$\dot{S} = \begin{pmatrix} -y_{d_1}^{(n_1)} + \sum_{j=1}^{n_1-1} k_{1j}e_1^{(j)} + y_1^{(n_1)} \\ \dots \\ -y_{d_p}^{(n_p)} + \sum_{j=1}^{n_p-1} k_{pj}e_p^{(j)} + y_p^{(n_p)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Dans le cas où les fonctions du système  $F(x)$  et  $G(x)$  sont connues, la loi de commande à mode glissant robuste vis-à-vis des perturbations s'écrit sous la forme :

$$U = G^{-1}(x) \left( -F(x) + v + U_{sw} \right) \quad (7)$$

avec :

$$v = \begin{pmatrix} -y_{d_1}^{(n_1)} + \sum_{j=1}^{n_1-1} k_{1j}e_1^{(j)} \\ \dots \\ -y_{d_p}^{(n_p)} + \sum_{j=1}^{n_p-1} k_{pj}e_p^{(j)} \end{pmatrix}, U_{sw} = \begin{pmatrix} -\eta_{\Delta_1} \text{sgn}(s_1) \\ \dots \\ -\eta_{\Delta_p} \text{sgn}(s_p) \end{pmatrix}$$

Et  $\text{sgn}$  est la fonction " signe ".

## III. SYNTHÈSE D'UNE LOI DE COMMANDE ADAPTATIVE FLOUE À MODE GLISSANT

Dans le paragraphe précédent, les dynamiques du système sont supposées connues, et nous pouvons alors utiliser la loi de commande (6) pour linéariser et commander le système dynamique (2). Cependant, la dynamique du système est inconnue et cette loi de commande est irréalisable. De plus, le terme de commutation  $U_{sw}$  cause le problème de broutement.

Dans ce papier, et dans le but d'obtenir une loi de commande insensible aux perturbations et aux variations paramétriques, nous utilisons d'une part deux systèmes d'inférence flous pour l'approximation des fonctions inconnues et d'autre part un contrôleur adaptatif de type PI pour atténuer le broutement et obtenir la convergence asymptotique de l'erreur de poursuite.

L'expression du contrôleur PI s'écrit :

$$U_{PI} = \begin{pmatrix} u_{PI_1} \\ \dots \\ u_{PI_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{P_1} s_1 + k_{i_1} \int_{t_0}^t s_1 dt \\ \dots \\ k_{P_p} s_p + k_{i_p} \int_{t_0}^t s_p dt \end{pmatrix} \quad (8)$$

Les paramètres du PI  $k_{p_j}$  et  $k_{i_j}$   $j = 1 \dots p$  sont adaptés en ligne par l'application d'une loi adaptative. Ceci implique que (8) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$U_{PI} = \hat{\rho}(S | \theta_p) = ((\hat{\rho}_1(s_1 | \theta_{p_1}) \dots (\hat{\rho}_p(s_p | \theta_{p_p})))^T \quad (9)$$

$$= \left( \theta_{p_1}^T \Theta(s_1) \dots \theta_{p_p}^T \Theta(s_p) \right)^T = \Theta(S) \theta_p \quad (10)$$

Où le vecteur de paramètres à ajuster  $\theta_{p_j}$  est défini par  $\theta_{p_j} = (k_{p_j}, k_{i_j})^T$  et  $\Theta^T(s_j) = (s_j, \int_{t_0}^t s_j dt)$  sont les vecteurs de régression  $j = 1 \dots p$ ,

$$\theta_p = (\theta_{p_1}^T \dots \theta_{p_p}^T)^T, \quad \Theta(S) = \text{diag}(\Theta^T(s_1) \dots \Theta^T(s_p))$$

De plus, nous supposons que les dynamiques du système ne sont pas connues, pour cela, nous utilisons deux systèmes flous ayant pour entrée le vecteur  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  pour l'approximation des fonctions scalaires  $f_i$  et  $g_{ij}$ . Nous supposons que les fonctions  $f_i$  et  $g_{ij}$  sont obtenues à partir d'un ensemble de règles floues de la forme :

$$R^l : \quad \text{Si } x_1 \text{ est } A_1^l, \text{ et } x_2 \text{ est } A_2^l, \text{ et...} \\ \text{et } x_n \text{ est } A_n^l \text{ alors } z \text{ est } B^l \quad (11)$$

$z$  est la variable de sortie,  $A_i^l, B^l$  sont respectivement les symboles des variables  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et  $z$ ,  $l = 1, \dots, M$  où  $M$  le nombre de règles floues. Les significations floues des symboles  $A_i^l$   $i = 1, \dots, n$ ;  $l = 1, \dots, M$  sont données par les fonctions d'appartenance  $\mu_{A_i^l}(x_i)$ , celles des symboles  $B^l$  sont données par les fonctions d'appartenance  $\mu_{B^l}(z)$  de type singleton et de valeur modale  $y^l$ . La sortie  $z$  est calculée par la méthode du centre de gravité et s'écrit :

$$z = \frac{\sum_{j=1}^M z^j (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(\hat{x}_i))}{\sum_{j=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(\hat{x}_i)} \quad (12)$$

L'équation (12) peut être réécrite sous la forme :

$$z(x) = \underline{\theta}^T \xi(x) \quad (13)$$

avec

$\underline{\theta} = (\theta^1, \dots, \theta^M)^T$ ,  $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^M(x))^T$  où  $\xi^j(x)$  est défini par :

$$\xi^j(x) = \frac{\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)}{\sum_{j=1}^M \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^j}(x_i)} \quad (14)$$

Pour l'approximation des fonctions  $f_i(x)$  et  $g_{ij}(x)$ , nous utilisons les sorties  $\hat{f}_i(x|\theta_{f_i})$  et  $\hat{g}_{ij}(x|\theta_{g_{ij}})$  écrites à partir de (13).

$$\hat{f}_i(x|\theta_{f_i}) = \theta_{f_i}^T \xi(x) \quad \hat{g}_{ij}(x|\theta_{g_{ij}}) = \theta_{g_{ij}}^T \xi(x) \quad (15)$$

$$\hat{F}(x | \theta_f) = (\hat{f}_1(x | \theta_{f_1}) \dots \hat{f}_p(x | \theta_{f_p}))^T = \theta_f^T \xi(x) \quad (16)$$

avec  $\theta_f^T = (\theta_{f_1}^T \dots \theta_{f_p}^T)$  et

$$\hat{G}(x | \theta_g) = \begin{pmatrix} \hat{g}_{11}(x | \theta_{g_{11}}) & \dots & \hat{g}_{1p}(x | \theta_{g_{1p}}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{g}_{p1}(x | \theta_{g_{p1}}) & \dots & \hat{g}_{pp}(x | \theta_{g_{pp}}) \end{pmatrix} = \theta_g^T \Phi(x) \quad (17)$$

$$\text{avec } \theta_g^T = \begin{pmatrix} \theta_{g_{11}}^T & \dots & \theta_{g_{1p}}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{g_{p1}}^T & \dots & \theta_{g_{pp}}^T \end{pmatrix};$$

$$\Phi(x) = \text{diag} \begin{pmatrix} \xi(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \xi(x) \end{pmatrix} = \text{diag}(\xi(x) \dots \xi(x))$$

Où  $\theta_{f_j}$  et  $\theta_{g_{ij}}$  correspondent aux vecteurs de paramètres ajustables définis respectivement par  $\theta_{f_i} = (\theta_{f_i}^1, \dots, \theta_{f_i}^M)^T$ , et  $\theta_{g_{ij}} = (\theta_{g_{ij}}^1, \dots, \theta_{g_{ij}}^M)^T$ ,  $i, j = 1 \dots p$ .

La loi de commande floue à mode glissant s'écrit sous la forme suivante :

$$U = \hat{G}^{-1}(x | \theta_g) \left( -\hat{F}(x | \theta_f) + v - \frac{2}{\rho} S - \hat{\rho}(S | \theta_p) \right) \quad (18)$$

**Théorème** : Considérons la classe de systèmes non linéaires (2) et la loi de commande associée (18) où les fonctions  $\hat{F}(x | \theta_f)$ ,  $\hat{G}^{-1}(x | \theta_g)$  et le terme  $U_{PI}$  sont données par (16), (17) et (10) respectivement. Les paramètres  $\theta_f$ ,  $\theta_g$  et  $\theta_p$  sont ajustées en ligne par l'application des lois adaptation (19), (20), (21) respectivement. Nous pouvons alors conclure que les signaux du système en boucle fermée sont bornés et que l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro. Les lois d'adaptation sont données par :

$$\dot{\theta}_f = \gamma_f S^T \xi(x) \quad (19)$$

$$\dot{\theta}_g = \gamma_g S^T \Phi(x) U \quad (20)$$

$$\dot{\theta}_{\rho_i} = \gamma_{\rho} S^T \Theta(S) \quad (21)$$

**Preuve** :

Soit les variables  $\theta_{\rho_i}^*$  et  $\Omega_{\rho_i}$  définies par les expressions suivantes :

$$\theta_{\rho_i}^* = \arg \min_{\theta_{\rho_i} \in \Omega_{\rho_i}} \left( \sup_{s \in \mathbb{R}^n} |\hat{\rho}_i(S | \theta_{\rho_i}) - \eta_{\Delta_i} \text{sgn}(s_i)| \right) \quad (22)$$

$$\Omega_{\rho_i} = \left\{ \theta_{\rho_i} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\theta_{\rho_i}\| \leq M_{\rho_i} \right\} \quad (23)$$

Nous définissons aussi les vecteurs des paramètres optimaux  $\theta_f^*$  et  $\theta_g^*$  des systèmes flous (15) et (16) respectivement :

$$\theta_f^* = \arg \min_{\theta_f \in \Omega_f} \left( \sup_{x \in \Omega_x} |F(x) - \hat{F}(x | \theta_f)| \right) \quad (24)$$

$$\theta_g^* = \arg \min_{\theta_g \in \Omega_g} \left( \sup_{x \in \Omega_x} |G(x) - \hat{G}(x | \theta_g)| \right) \quad (25)$$

Où  $\Omega_{f_i}, \Omega_{g_{ij}}$  et  $\Omega_{\rho_i}$  désignent respectivement les domaines de définition de  $\theta_{f_i}^*, \theta_{g_{ij}}^*$  et  $\theta_{\rho_i}^*$  et  $\Omega_{f_i}, \Omega_{g_{ij}}$  sont donnés par :

$$\Omega_{f_i} = \left\{ \theta_{f_i} \in \mathbb{R}^{n_f} \mid \|\theta_{f_i}\| \leq M_{f_i} \right\} \quad (26)$$

$$\Omega_{g_{ij}} = \left\{ \theta_{g_{ij}} \in \mathbb{R}^{n_g} \mid \|\theta_{g_{ij}}\| \leq M_{g_{ij}} \right\} \quad (27)$$

$M_{f_i}, M_{g_{ij}}$  et  $M_{\rho_i}$  sont des paramètres prédéfinis. Lorsqu'on suppose que les vecteurs des paramètres des systèmes d'inférence floues ne dépassent pas les frontières de leurs domaines de définition, l'erreur d'approximation admet l'écriture suivante :

$$w_i = f_i(x) - \hat{f}(x | \theta_{f_i}^*) + \sum_{j=1}^p (g_{ij}(x) - \hat{g}_{ij}(x | \theta_{g_{ij}}^*)) u_j \quad (28)$$

Nous convenons ainsi de définir le vecteur  $W = (w_1 \dots w_p)^T$ . Alors, (6) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{S} &= F(x) + G(x)U + d(x, t) - v \\ &= \left[ G(x) + \hat{G}(x | \theta_g) - \hat{G}(x | \theta_g) \right] \hat{G}^{-1}(x | \theta_g) \\ &\quad \left( -\hat{F}(x | \theta_f) + v - \frac{2}{\rho}S - \hat{\rho}(S | \theta_\rho) \right) \\ &\quad + F(x) + d(x, t) - v \\ &= \left[ G(x) - \hat{G}(x | \theta_g) \right] U + F(x) - \hat{F}(x | \theta_f) \\ &\quad - \frac{2}{\rho}S - \hat{\rho}(S | \theta_\rho) + d(x, t) \\ &= \left[ \hat{G}(x | \theta_g^*) - \hat{G}(x | \theta_g) \right] U + \hat{F}(x | \theta_f^*) - \hat{F}(x | \theta_f) \\ &\quad + \hat{\rho}(S | \theta_\rho^*) - \hat{\rho}(S | \theta_\rho) - \hat{\rho}(S | \theta_\rho^*) - \frac{2}{\rho}S + W' \end{aligned} \quad (29)$$

$$\dot{S} = \tilde{\theta}_f \xi(x) + \tilde{\theta}_g \Phi(x)U + \Theta(S)\tilde{\theta}_p - \frac{2}{\rho}S - \hat{\rho}(S | \theta_\rho^*) + W'$$

Avec  $\tilde{\theta}_f = \theta_f^* - \theta_f$ ,  $\tilde{\theta}_g = \theta_g^* - \theta_g$  et  $\tilde{\theta}_p = \theta_p^* - \theta_p$  et le terme  $W'$  qui regroupe les erreurs d'approximation et les perturbations extérieures  $W' = W + d(x, t)$ .

La fonction de Lyapunov candidate est choisie telle que :

$$V = \frac{1}{2}S^T S + \frac{1}{2\gamma_f} \text{tr}(\tilde{\theta}_f^T \tilde{\theta}_f) + \frac{1}{2\gamma_g} \text{tr}(\tilde{\theta}_g^T \tilde{\theta}_g) + \frac{1}{2\gamma_\rho} \tilde{\theta}_\rho^T \tilde{\theta}_\rho \quad (30)$$

où  $\gamma_f, \gamma_g$  et  $\gamma_\rho$  sont trois scalaires positifs.

La dérivée de  $V$  par rapport au temps est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= S^T \dot{S} + \frac{1}{\gamma_f} \text{tr}(\tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f) + \frac{1}{\gamma_g} \text{tr}(\tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g) + \frac{1}{\gamma_\rho} \tilde{\theta}_\rho^T \dot{\tilde{\theta}}_\rho \\ &= S^T \left( \tilde{\theta}_f \xi(x) + \tilde{\theta}_g \Phi(x)U + \Theta(S)\tilde{\theta}_p \right) \\ &\quad + S^T W' + \frac{1}{\gamma_f} \text{tr}(\tilde{\theta}_f^T \dot{\tilde{\theta}}_f) + \frac{1}{\gamma_g} \text{tr}(\tilde{\theta}_g^T \dot{\tilde{\theta}}_g) + \frac{1}{\gamma_\rho} \tilde{\theta}_\rho^T \dot{\tilde{\theta}}_\rho \\ &\quad - S^T \hat{\rho}(S | \theta_\rho^*) - \frac{2}{\rho} S^T S \\ &= \frac{1}{\gamma_f} \tilde{\theta}_f^T (\gamma_f S^T \xi(x) + \dot{\tilde{\theta}}_f) + \frac{1}{\gamma_g} \tilde{\theta}_g^T (\gamma_g S^T \Phi(x)U + \dot{\tilde{\theta}}_g) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_\rho} \tilde{\theta}_\rho^T (\gamma_\rho S^T \Theta(S) + \dot{\tilde{\theta}}_\rho) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_g} \tilde{\theta}_g^T (\gamma_g S^T \Phi(x)U + \dot{\tilde{\theta}}_g) - S^T \hat{\rho}(S | \theta_\rho^*) \\ &\quad - \frac{2}{\rho} S^T S + S^T W' \end{aligned} \quad (31)$$

Or  $\dot{\tilde{\theta}}_f = -\dot{\theta}_f$ ,  $\dot{\tilde{\theta}}_{g_{ij}} = -\dot{\theta}_{g_{ij}}$  et  $\dot{\tilde{\theta}}_{\rho_i} = -\dot{\theta}_{\rho_i}$ . En substituant (19)-(20) dans (31), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -\eta_\Delta |S| - \frac{2}{\rho} S^T S + S^T W' \\ \dot{V} &\leq -\left[ \frac{1}{\sqrt{\rho}} S - \frac{\sqrt{\rho}}{2} W' \right]^T \left[ \frac{1}{\sqrt{\rho}} S - \frac{\sqrt{\rho}}{2} W' \right] \\ &\quad - \frac{2}{\rho} S^T S + \frac{1}{\rho} S^T S + \frac{1}{4} \rho W'^T W' \\ \dot{V} &\leq -\frac{1}{\rho} S^T S + \frac{1}{4} \rho W'^T W' \end{aligned} \quad (32)$$

Intégrant l'inégalité (32) de  $t = 0$  à  $T$  :

$$V(T) - V(0) \leq -\frac{1}{\rho} \int_0^T S^T S + \frac{1}{4} \rho \int_0^T W'^T W' \quad (33)$$

Or  $V(T) > 0$ ,  $\rho > 0$  (34) se réécrit comme suit :

$$\int_0^T S^T S \leq \rho V(0) + \frac{1}{4} \rho^2 \int_0^T W'^T W' \quad (34)$$

En utilisant le lemme de Barbalat [2], nous constatons que, malgré la présence des perturbations extérieures,  $S \rightarrow 0$   $t \rightarrow \infty$  et par conséquent l'erreur de poursuite tend asymptotiquement vers zéro  $e \rightarrow 0$   $t \rightarrow \infty$ .

les résultats obtenus sont vrai à condition que tous les paramètres intervenant dans l'équation (31) soient bornés. Dans le but de satisfaire cette hypothèse, les expressions des lois d'adaptation (19), (20) et (21) sont modifiées en appliquant l'algorithme de projection [13]. La preuve de stabilité reste identique et est volontairement omise dans ce papier. Les lois d'adaptation modifiées sont données par :

Pour  $\theta_{f_i}$  nous utilisons :

$$\dot{\theta}_{f_i} = \begin{cases} \gamma_{f_i} s_i \xi(x) & \text{si } (\|\theta_{f_i}\| < M_{f_i}) \text{ ou} \\ & (\|\theta_{f_i}\| = M_{f_i} \text{ et } s_i \theta_{f_i}^T \xi(x) \geq 0) \\ P_{f_i}[\gamma_{f_i} s_i \xi(x)] & \text{si } (\|\theta_{f_i}\| = M_{f_i} \text{ et } s_i \theta_{f_i}^T \xi(x) < 0) \end{cases} \quad (35)$$

Pour  $\theta_{g_{ij}}$  nous utilisons :

$$\dot{\theta}_{g_{ij}} = \begin{cases} \gamma_{g_{ij}} s_i \xi(x) u_j & \text{si } (\|\theta_{g_{ij}}\| < M_{g_{ij}}) \text{ ou} \\ & (\|\theta_{g_{ij}}\| = M_{g_{ij}} \text{ et } s_i \theta_{g_{ij}}^T \xi(x) u_j \geq 0) \\ P_{g_{ij}}[\gamma_{g_{ij}} s_i \xi(x) u_j] & \text{si } (\|\theta_{g_{ij}}\| = M_{g_{ij}} \text{ et} \\ & s_i \theta_{g_{ij}}^T \xi(x) u_j < 0) \end{cases} \quad (36)$$

Pour  $\theta_{\rho_i}$  nous utilisons :

$$\dot{\theta}_{\rho_i} = \begin{cases} \gamma_{\rho_i} s_i \Theta(s_i) & \text{si } (\|\theta_{\rho_i}\| < M_{\rho_i}) \text{ ou} \\ & (\|\theta_{\rho_i}\| = M_{\rho_i} \text{ et } s_i \theta_{\rho_i}^T \Theta(s_i) \geq 0) \\ P_{\rho_i}[\gamma_{\rho_i} s_i \Theta(s_i)] & \text{si } (\|\theta_{\rho_i}\| = M_{\rho_i} \text{ et} \\ & s_i \theta_{\rho_i}^T \Theta(s_i) < 0) \end{cases} \quad (37)$$

Ou les opérateurs de projection,  $P_{f_i}[*]$ ,  $P_{g_{ij}}[*]$  et  $P_{\rho_i}[*]$  sont définis comme suit :

$$P_{f_i}[\gamma_{f_i} s_i \xi(x)] = \gamma_{f_i} s_i \xi(x) - \gamma_{f_i} s_i \frac{\theta_{f_i} \theta_{f_i}^T \xi(x)}{\|\theta_{f_i}\|^2} \quad (38)$$

$$P_{g_{ij}}[\gamma_{g_{ij}} s_i \xi(x) u_j] = \gamma_{g_{ij}} s_i \xi(x) u_j - \gamma_{g_{ij}} s_i \frac{\theta_{g_{ij}} \theta_{g_{ij}}^T \xi(x) u_j}{\|\theta_{g_{ij}}\|^2} \quad (39)$$

$$P_{\rho_i}[\gamma_{\rho_i} s_i \Theta(s_i)] = \gamma_{\rho_i} s_i \Theta(s_i) - \gamma_{\rho_i} s_i \frac{\theta_{\rho_i} \theta_{\rho_i}^T \Theta(s_i)}{\|\theta_{\rho_i}\|^2} \quad (40)$$

**Remarque1 :** La loi de commande (18) sera modifiée de façon à éviter le problème de singularité de la matrice  $\hat{G}(x | \theta_g)$  (i.e  $\hat{G}(x | \theta_g) = 0$ ). En effet, nous remplaçons la fonction  $\hat{G}^{-1}(x | \theta_g)$  par l'expression suivante  $\hat{G}(x | \theta_g)(\varepsilon I + \hat{G}(x | \theta_g)\hat{G}(x | \theta_g)^T)^{-1}$  avec  $\varepsilon$  constante positive de faible valeur [21][22].

Afin d'illustrer les performances de la loi de commande proposée, nous appliquons notre algorithme de commande à un bras de robot à deux degrés de liberté.

#### IV. RESULTATS DE SIMULATIONS

Nous considérons le cas d'un robot manipulateur à deux degrés de liberté représenté dans la Figure.1 Les équations

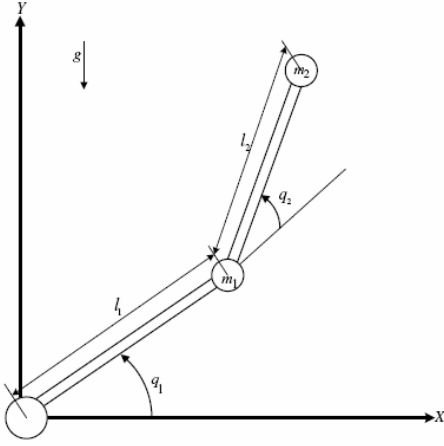


Fig. 1. Schéma d'un robot à deux degrés de liberté

dynamiques sont données par [14] :

$$\ddot{q} = -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q}) + G(q)) + M^{-1}(q)(\tau + D) \quad (41)$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1 \dot{q}_2 \\ m_2 l_1 l_2 \sin(q_2) \dot{q}_1^2 \end{pmatrix}$$

$$G(q) = \begin{pmatrix} m_2 l_2 \cos(q_1 + q_2) + (m_1 + m_2) l_1 g \cos(q_1) \\ m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2) \end{pmatrix}$$

$$M(q) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

tels que :  $M_{12} = m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos(q_2)$ ,  $M_{21} = M_{12}$   
 $M_{11} = (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos(q_2)$ ,  $M_{22} = m_2 l_2^2$   
 Les paramètres du modèle sont tels que :  
 $l_1 = 1m$ ;  $l_2 = 0.8m$ ,  $m_1 = m_2 = 1kg$  et  $g = 9.8m/s^2$ .  
 $q = (q_1 \ q_2)^T$  est le vecteur de sorties et  $\tau = (\tau_1 \ \tau_2)^T$  est le vecteur d'entrées. L'objectif de la loi de commande est de forcer les sorties du système  $y_1 = q_1$  et  $y_2 = q_2$  à suivre les signaux de références  $y_{d1}(t) = \sin(t)$  et  $y_{d2}(t) = 0.8\cos(t)$  respectivement. Le système est soumis à des perturbations extérieures telles que  $D = (d_1 \ d_2)^T$  avec  $d_1 = d_2 = 0.1 \sin(2t)$

soit  $x = (q_1 \ \dot{q}_1 \ q_2 \ \dot{q}_2)^T$  et  $G(x) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = M^{-1}$

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} = -M^{-1}(q)(C(q, \dot{q}) + G(q))$$

Le système (41) admet l'écriture suivante dans l'espace d'état :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_1(x) + g_{11}\tau_1 + g_{12}\tau_2 + d_1 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= f_2(x) + g_{21}\tau_1 + g_{22}\tau_2 + d_2 \\ y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Nous associons trois symboles flous : Négatif, Zéro, Positif pour toutes les variables d'état  $x$ . La signification floue de ces trois symboles sont les fonctions d'appartenance gaussiennes définies par :  $\mu_{Positif} = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i - 1.25}{0.6})^2)$ ,  $\mu_{Zero} = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i}{0.6})^2)$

$$\mu_{Negatif} = \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x_i + 1.25}{0.6})^2) \quad i = 1 \dots 4.$$

Les conditions initiales du robot sont :  $x(0) = (0.5, 0, -0.5, 0)^T$ . Les valeurs initiales de  $\theta_{f_i}$  et  $\theta_{g_{i,j}}$  sont initialisées à zéro. Les valeurs initiales des paramètres  $\theta_{\rho_i}$  sont données par  $k_{p_j}(0) = 18$  et  $k_{i_j}(0) = 12$ ,  $j = 1, 2$ . Nous choisissons,  $M_{f_i} = 40$ ,  $M_{g_{i,j}} = 80$ ,  $M_{\rho_i} = 50$  et les taux d'apprentissage  $\gamma_{f_i} = 50$ ,  $\gamma_{g_{i,j}} = 0.5$  et  $\gamma_{\rho_i} = 0.1$ .

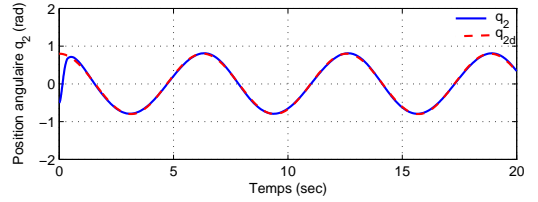
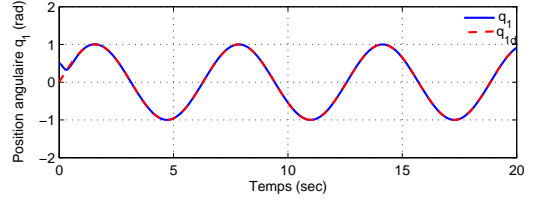


Fig. 2. La poursuite de position

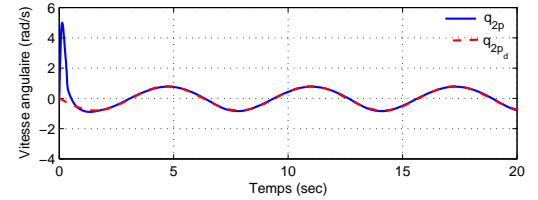
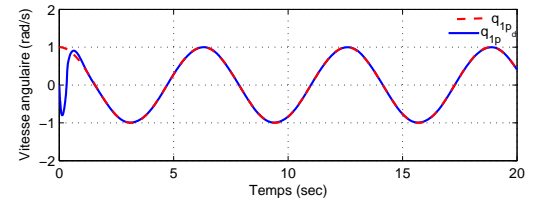


Fig. 3. La poursuite de vitesse

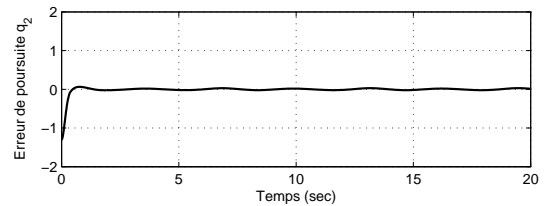
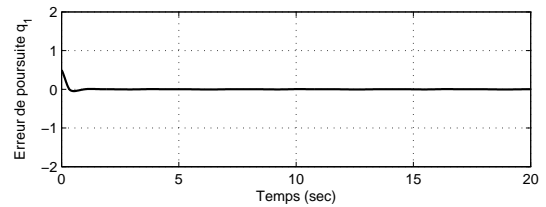


Fig. 4. Erreur de poursuite de position en rad

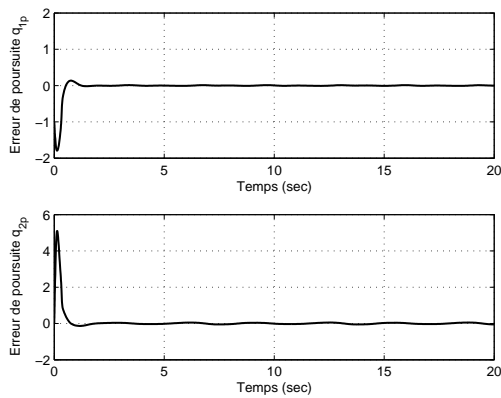


Fig. 5. Erreur de poursuite de vitesse en  $rad/sec$

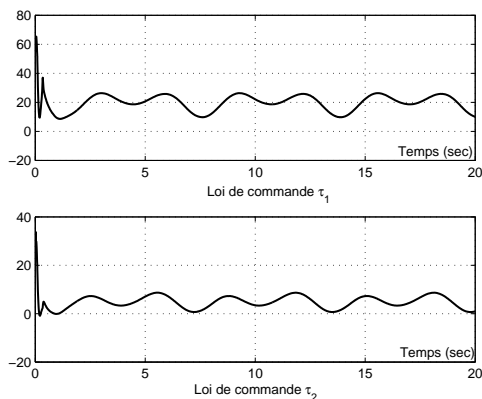


Fig. 6. Lois de commande appliquées en  $N.m$ .

Les résultats de simulation montrent que les performances du contrôleur proposé sont satisfaisantes à savoir une bonne atténuation du phénomène de broutement au niveau les signaux de commande avec la figure 6 et une bonne poursuite de trajectoires des deux sorties illustrée par les Figures 2-5.

## V. CONCLUSION

Dans ce papier, un contrôleur flou adaptatif utilisant l'approche mode glissant est synthétisé pour un système non linéaire incertain MIMO. Les dynamiques du système ne sont pas supposées exactement connues. La contribution majeure de ce papier est de combiner une commande à mode glissant, une commande PI et une commande adaptative floue en vue de remédier au problème de broutement et d'assurer la poursuite de trajectoires. Basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov, le schéma de commande à mode glissant flou adaptatif proposé peut garantir la "bornitude" des signaux du système en boucle fermée et d'obtenir une erreur de poursuite qui tend asymptotiquement vers zéro. D'où des bonnes performances de poursuite de trajectoires. En effet, la nouvelle loi de commande nous a permis la relaxation des hypothèses concernant la connaissance des valeurs maximales de l'erreur d'approximation et des perturbations extérieures. Un exemple de simulation d'un système non linéaire, à savoir un robot manipulateur à deux degrés de liberté, est présenté pour montrer l'efficacité de la méthode proposée. notamment en ce qui concerne

la poursuite de trajectoires et l'élimination du phénomène de broutement.

## RÉFÉRENCES

- [1] K.J.Astrom and B.Wittenmark, *Adaptive Control*, Reading, MA : Addison-Wesley, 1989.
- [2] L.X.Wang, « Stable adaptive fuzzy control of nonlinear systems, » *IEEE Trans.Fuzzy Syst*, vol 1, pp. 146–155, Apr. 1993.
- [3] C. W. Tao, M. L. Chan and W. Y. Wang, « Sliding control for linear uncertain systems, » *Proc. IEEE Conf. on Robotics and Automation*, pp. 2611–2615, 2003.
- [4] Y.D. Pan, K. S. Furuta, S. H. Hatakeyama, and S.O. Suzuki, « Design of sliding mode for chattering-free variable structure control, » *American Control Conf.*, vol.2, pp. 1528-1532, 1995.
- [5] J.J. Soltine, « Sliding controller design for nonlinear systems, » *International Journal of Control*, vol. 40, pp. 421–434, 1984.
- [6] J. Wang, A.B. Rad, P.T. Chan, « Indirect adaptive fuzzy sliding mode control : Part I : fuzzy switching, » *Fuzzy sets and Systems*, vol. 122, pp. 21-30, 2001.
- [7] F. Geng and X. Zhu, « A Novel Adaptive Fuzzy Control of the Inverted Pendulum System, » *IEEE International Conference on Control and Automation*, pp. 284–288, 2007.
- [8] S. Aloui, O. Pagès, A. El Hajjaji, Y. Koubaa, A. Chaari, « Observer-based adaptive fuzzy sliding mode control of a class of nonlinear systems with an application to the inverted pendulum, » *Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications, LFA*, Lens, France, 2008.
- [9] Y. C. Chang, « Robust tracking control of nonlinear MIMO systems via fuzzy approaches, » *Automatica*, vol.36, pp. 1535-1545, 2000.
- [10] S. Sastry, M. Bodson, *Adaptive Control : Stability, Convergence and robustness*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1989.
- [11] L.X. Wang, *A course in fuzzy System and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1997.
- [12] H.F. Ho, Y.K. Wong, A. B. Rad, « Robust fuzzy tracking control for robotic manipulators, » *Simulation Modelling Practice and Theory*, vol. 15, pp. 801–816, 2007.
- [13] L.X.Wang and J.M.Mendel, « Fuzzy basis functions, universal approximation, and orthogonal least squares learning, » *IEEE Trans. Neural Networks*, vol 3, pp. 807-814, Oct. 1992.
- [14] L. A. Zadeh, « Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes, » *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetic*, Vol. SMC-3, n°1, 1973, pp 28–44.
- [15] L.X.Wang and J.M.Mendel, « Continuous approximation of variable structure control, » *Int.J. Systems Science*, 17(6) : 875-885, 1986.
- [16] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ), 1991.
- [17] S. Laghrouche, F. Plestan, and A. Glumnieau. « Higher order sliding mode control based on optimal lq control and integral sliding mode, » *In IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems NOLCOS*, Stuttgart, Allemagne, 2004.
- [18] G. Bartouli, A. Ferrara, E. Usai, and V.I. Utkin. « Chattering avoidance by second-order sliding mode control, » *IEEE Trans. Autom. Control*, 43(2) : 241–246, 1998.
- [19] A. Hussain, N. Essounbouli, A. Hamzaoui. « A robust Adaptive Fuzzy Controller for Non-linear Systems : Sliding Mode Approach, » *7th international conference on Sciences ans Techniques of Automatic control, STA-2006*, Hammamet, Tunisie, 2006.
- [20] S. Aloui, O. Pagès, A. El Hajjaji, Y. Koubaa, A. Chaari. « Robust tracking-based adaptive Fuzzy Sliding Mode Controller design for robotic manipulators, » *9th international conference on Sciences ans Techniques of Automatic control, STA-2008*, sousse, Tunisie, 2008.
- [21] N. Essounbouli, A. Hamzaoui and J. Zaytoon. « Fuzzy Sliding Mode control for a Class of Nonlinear Continuous Systems, » *International Journal of Computer Applications in Technology*, vol.27, No 2/3, pp 174–182, 2006.
- [22] S. Labiod, M.S. Boucherit, T.M. Guerra « Adaptive fuzzy control of a class of MIMO nonlinear systems, » *Fuzzy Sets and Systems*, 151 : 59–77, 2005.