

Application de la commande par backstepping adaptatif en utilisant la méthode de réduction de surparamétrage

Rabia BENAYACHE¹, Larbi CHRIFI-ALAOUI¹, Pascal BUSSY¹ et Jean-Marie CASTELAIN²
Laboratoire des Technologies Innovantes (LTI, EA 3899)
Université de Picardie Jules Verne, 13 avenue François Mitterrand, F-02880 Cuffies, France.

²Commission Européenne
B-1049 Bruxelles, Belgium

rabia.benayache@u-picardie.fr

Résumé— Dans cet article, l’approche de commande par backstepping adaptatif en utilisant la méthode de réduction de surparamétrage est proposée. Cette méthode est conçue pour un système de régulation de niveau à deux colonnes. Ce procédé possède des termes incertains, dont les bornes sont régies par un ensemble de paramètres inconnus. La dynamique de la plate-forme à deux colonnes permet de développer une commande par backstepping adaptatif. Cette stratégie permet d’éliminer asymptotiquement l’erreur statique. L’analyse de stabilité basée sur la théorie de Lyapunov est effectuée pour garantir la stabilité et la conception d’une commande adaptative en présence de paramètres inconnus. En conclusion, les résultats expérimentaux confirment l’efficacité de notre loi de commande, les résultats d’analyse de stabilité sont discutés.

Mots-clés— système non linéaire incertain, backstepping adaptatif, estimations des paramètres.

I. INTRODUCTION

Durant ces dernières années, une grande partie de la communauté s’est intéressée à la recherche de procédures récursives pour la mise au point de lois de commande pour les systèmes non linéaires, comme la technique de backstepping. De nombreux travaux ont ainsi porté sur l’étude de cette technique. On peut notamment citer [5], [8], [4], [3], [6], [7], [9],[1],[2]. Ces techniques maintenant relativement connues sont essentiellement basées sur l’utilisation de fonctions de Lyapunov pour l’étude de la stabilité. L’objectif est de trouver une loi de commande qui rend la dérivée d’une fonction de Lyapunov, choisie a priori, définie ou semi-définie négative. La principale difficulté réside alors dans le choix d’une fonction convenable. La technique du backstepping surmonte cette difficulté en construisant itérativement une fonction de Lyapunov adaptée au système, et permet de déduire la commande qui rend la dérivée de cette fonction définie négative.

Le processus de backstepping commence en définissant une fonction de stockage qui intègre l’écart entre les sorties régulées du système et les objectifs de commande. Le principe est alors de construire à chaque étape un écart entre l’état courant du système et un contrôle virtuel qui garantirait, s’il pouvait être appliqué tel quel, la non-positivité de la dérivée de la fonction de Lyapunov. A la fin de chaque

étape, la fonction de stockage est complétée par cet écart, afin d’en assurer la convergence vers zéro. Le processus s’achève lorsque le vecteur de commande du système apparaît. Le contrôle virtuel défini au dernier pas est alors un contrôle réel, garantissant la convergence des états du système vers zéro, et l’équilibre des sorties régulées autour des objectifs de commande. Dans leur ouvrage [8], Krstic et al. ont développé un cadre théorique pour l’application du backstepping adaptatif en présence de perturbations lentement variables. Le contrôle adaptatif est un concept naturel. Quand un système évolue au milieu d’éléments perturbateurs difficiles à modéliser, le contrôle adaptatif consiste à estimer ces paramètres inconnus en ligne et à intégrer l’estimation de ces paramètres à la commande en vue de les contrer.

L’arrivée de cette méthode a donné un nouveau souffle à la commande adaptative des systèmes non linéaires, qui malgré les grands progrès réalisés, manquait d’approches générales. Le backstepping présente une alternative prometteuse aux méthodes basées sur l’équivalence certaine. Il se base sur la deuxième méthode de Lyapunov, dont il combine le choix de la fonction avec celui des lois de commande et d’adaptation. Ceci lui permet, en plus de la tâche pour laquelle le contrôleur est conçu (poursuite et/ou régulation), de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé.

II. BACKSTEPPING ADAPTATIF ET FONCTIONS DE RÉGLAGES

Pour des systèmes avec des incertitudes paramétriques, une loi de mise à jour de paramètre est conçue de telle manière que la stabilité en boucle fermée soit garantie. Ceci est réalisé en prolongeant la fonction de Lyapunov $V(x)$ avec un terme pénalisant l’erreur d’évaluation. L’idée est d’utiliser le backstepping pour concevoir une loi de commande pour le système comme si tous les paramètres ont été connus et ensuite remplacer les paramètres inconnus par leurs estimations. Dans un premier temps, les propriétés seront énoncées et illustrées sur des systèmes à deux entrées, puis une application sur un système à deux colonnes sera donnée.

A. algorithme de base

La méthode par backstepping adaptatif est une approche attractive. Le principe consiste à imposer aux termes incertains de se présenter linéairement dans les équations d'état du système, sous forme de paramètres constants inconnus. Pour illustrer cela, considérons un système non linéaire sous la forme d'état suivante

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \psi(x_1)\theta \\ \dot{x}_2 = u \\ y = x_1 \end{cases} \quad (1)$$

où $x_1(t), x_2, y(t), u(t) \in \mathbb{R}$, $\psi(x_1)$ une fonction non linéaire lisse ($\psi(0) = 0$) et θ est un paramètre inconnu.

Étape 1 : La première étape pour construire la loi de commande par backstepping adaptatif est de considérer l'écart entre la sortie et la valeur désirée $z_1 = x_1 - y_d$ (dans ce qui suit, on considère $y_d = 0$). La loi de commande doit assurer la convergence de z_1 vers zéro. Par conséquent, on définit une première fonction de stockage associée à z_1 , $V_1 = 0.5z_1^2$. La dérivée de V_1 entraîne

$$\dot{V}_1 = z_1\dot{z}_1 \quad (2)$$

$$= z_1(x_2 + \psi\theta) = -c_1z_1^2 \quad (3)$$

La fonction stabilisante choisie pour rendre \dot{V}_1 négative est définie comme suit

$$\alpha = -c_1z_1 - \psi\hat{\theta}_1 \quad (4)$$

Le paramètre connu $\hat{\theta}_1$ étant l'estimé de θ à l'étape 1 (avec $\theta_1 = \tilde{\theta}_1 + \hat{\theta}_1$). A partir de la deuxième variable d'erreur $z_2 = x_2 - \alpha$, on peut exprimer la dynamique de z_1 en fonction de z_2

$$\dot{z}_1 = -c_1z_1 + z_2 + \tilde{\theta}_1\psi \quad (5)$$

Choisissons ensuite une fonction candidate de Lyapunov définie sous la forme suivante

$$V_{1a}(z_1, \tilde{\theta}_1) = V_1 + \frac{1}{2m}\tilde{\theta}_1^2 \quad (6)$$

où m est une constante positive et $\tilde{\theta}$ est l'erreur entre la valeur exacte et la valeur estimée. En dérivant (6) par rapport au temps, en se servant de (5), il vient

$$\begin{aligned} \dot{V}_{1a} &= \dot{V}_1 + \frac{1}{m}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 \\ &= z_1\dot{z}_1 - \frac{1}{m}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 \\ &= -c_1z_1^2 + z_1z_2 + z_1\psi\tilde{\theta}_1 - \frac{1}{m}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 \\ &= -c_1z_1^2 + z_1z_2 + \tilde{\theta}_1(z_1\psi - \frac{1}{m}\dot{\tilde{\theta}}_1) \end{aligned} \quad (7)$$

Le signe de la dérivée reste toujours indéterminé, mais un choix judicieux de la loi d'adaptation de l'estimé $\hat{\theta}_1$ permet d'éliminer le terme incertain. Avec le choix $\dot{\hat{\theta}}_1 = m z_1 \psi$, la dérivée de V_{1a} devient

$$\dot{V}_{1a} = -c_1z_1^2 + z_1z_2 \quad (8)$$

Étape 2 : On considère le système (1) et l'ont définit la nouvelle variable d'erreur $z_2 = x_2 - \alpha$, qui représente l'écart

entre la variable d'état x_2 (commande virtuelle) et la fonction stabilisante α . Les équations du système à commander, dans l'espace (z_1, z_2) s'écrivent

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -c_1z_1 + z_2 + \tilde{\theta}_1\psi \\ \dot{z}_2 = u - \dot{\alpha} \end{cases} \quad (9)$$

La présence du terme z_1z_2 dans l'expression de la dérivée (8) ne permet pas la détermination de son signe. Afin d'en savoir plus sur la stabilité du système, on construit la fonction de Lyapunov augmentée par un nouveau terme d'erreur z_2

$$V_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1) = V_{1a}(z_1, \tilde{\theta}_1) + \frac{1}{2}z_2^2 \quad (10)$$

Sa dérivée s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \dot{V}_{1a} + z_2\dot{z}_2 \\ &= -c_1z_1^2 + z_1z_2 + z_2(u - \dot{\alpha}) \\ &= -c_1z_1^2 + z_2 \left[z_1 + u - \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\alpha}{\partial\hat{\theta}_1}\dot{\hat{\theta}}_1 \right] \\ &= -c_1z_1^2 + z_2 \left[u + z_1 - \frac{\partial\alpha}{\partial\hat{\theta}_1}m\psi z_1 - \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}(x_2 - \hat{\theta}_1\psi) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

la commande qu'on va définir par la suite doit être capable d'éliminer les termes incertains, elle est donnée en fonction des paramètres estimés

$$u = -c_2z_2 - z_1 + \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}x_2 - \frac{\partial\alpha}{\partial\hat{\theta}_1}m\psi z_1 - \hat{\theta}_1\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\psi \quad (12)$$

On obtient alors comme dérivée

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1) = -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 - \tilde{\theta}_1\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\psi z_2 \quad (13)$$

Il est clair, d'après l'équation (13), que nous n'avons plus aucun moyen pour éliminer le terme $\tilde{\theta}_1$. Pour surmonter cette difficulté, nous remplaçons $\hat{\theta}_1$ dans l'expression de u (12) par une nouvelle estimation $\hat{\theta}_2$. Les équations du système à commander, dans l'espace (z_1, z_2) s'écrivent de nouveau par

$$\dot{z}_1 = -c_1z_1 + z_2 + \tilde{\theta}_1\psi \quad (14)$$

$$\dot{z}_2 = -c_2z_2 - z_1 - \tilde{\theta}_2\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\psi \quad (15)$$

avec comme loi d'adaptation $\dot{\hat{\theta}}_1$. Pour arriver à éliminer tous les termes incertains, on considère la fonction de Lyapunov du système global

$$V_{2a}(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2m}\tilde{\theta}_1^2 + \frac{1}{2m}\tilde{\theta}_2^2 \quad (16)$$

où m est une constante positive et $\tilde{\theta}_2$ est l'erreur d'estimation. Sa dérivée le long de la trajectoire du système (1), s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}_{2a}(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) &= \dot{V}_2 + \frac{1}{m}\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{m}\tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2 \\ &= z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 - \frac{1}{m}[\tilde{\theta}_1\dot{\tilde{\theta}}_1 - \tilde{\theta}_2\dot{\tilde{\theta}}_2] \\ &= -c_1z_1^2 - c_2z_2^2 - \tilde{\theta}_2 \left[\frac{\partial\alpha}{\partial x_1}\psi + \frac{1}{m}\dot{\tilde{\theta}}_2 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Avec le choix

$$\dot{\theta}_2 = -m \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \quad (18)$$

La dérivée se réduit à

$$\dot{V}_2(z_1, z_2, \tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \quad (19)$$

D'où la stabilité du système global.

B. réduction de surparamétrage

L'augmentation du nombre de paramètres estimés causés par le surparamétrage peut être un élément indésirable, car elle augmente rapidement l'ordre dynamique résultant du contrôleur adaptatif. Dans la section II-A le surparamétrage sera éliminé par la méthode de réglage des fonctions. Comme préalable à ce développement, nous montrons comment le surparamétrage peut être évité dans le cas où le terme incertain ne se trouve pas directement dans la même équation que la commande, mais séparé de celle-ci par un intégrateur. L'objectif de cette section est de trouver une loi de commande $u(x, \hat{\theta})$ qui assure la stabilité de l'origine du système (1), avec une seule loi d'adaptation $\hat{\theta}$. Pour ce faire, on considère le même système (1) et on en déduit de la même façon que précédemment la fonction stabilisante suivante

$$\alpha_1 = -c_1 z_1 - \psi \hat{\theta} \quad (20)$$

La dérivée résultante de ce choix est donnée comme suit

$$\dot{V}_1(z_1, \tilde{\theta}) = z_1(x_2 + \psi \hat{\theta}) + z_1 \psi \tilde{\theta} \quad (21)$$

On remarque l'apparition d'un terme incertain $\tilde{\theta}$, son signe est indéfini et aucune conclusion ne peut être tirée sur la stabilité du système.

Remarque 1: Afin d'éviter le surparamétrage, la construction d'une loi de mise à jour est supprimée dans cette étape et le signe de la dérivée de \dot{V}_1 reste indéterminée. Et cela n'aura aucune influence sur la stabilité globale. Nous allons, dans ce qui suit démontrer que la fonction V_2 assure la stabilité globale du système.

Afin d'en savoir plus sur la stabilité du système, on construit la fonction de Lyapunov suivante

$$V_2 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{1}{2m} \tilde{\theta}^2 \quad (22)$$

sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1 \dot{z}_1 + z_2 \dot{z}_2 - \frac{1}{m} \tilde{\theta} \dot{\theta} \\ &= z_2 \left[u - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} x_2 - \hat{\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \tilde{\theta} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right] \\ &\quad + z_1 z_2 - c_1 z_1^2 + \tilde{\theta} \psi z_1 - \frac{1}{m} \tilde{\theta} \dot{\hat{\theta}} \\ &= \left[u + z_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_2 + \hat{\theta} \psi) - \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \right] - c_1 z_1^2 \\ &\quad + \tilde{\theta} \left[\psi z_1 - z_2 \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi - \frac{1}{m} \dot{\hat{\theta}} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

la loi de commande assurant la stabilité, et la loi de mise à jours qui adapte le paramètre $\hat{\theta}$ sont données comme suit

$$u = -z_1 - c_2 z_2 + \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} (x_2 + \hat{\theta} \psi) + \frac{\partial \alpha}{\partial \hat{\theta}} \dot{\hat{\theta}} \quad (24)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = m \left(\psi z_1 - \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \psi z_2 \right) \quad (25)$$

Un tel choix permet de réduire la dérivée à

$$\dot{V}_2 = -c_1 z_1^2 - c_2 z_2^2 \leq 0 \quad (26)$$

Ce qui assure la stabilité de l'origine de (1).

III. MODÉLISATION

On considère 2 bacs disposés comme sur la figure. Dans le

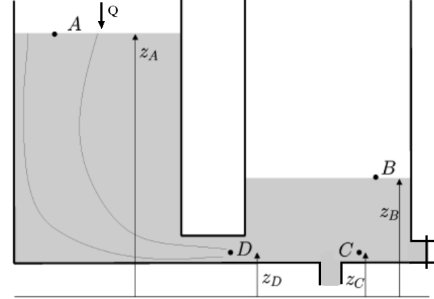


Fig. 1. Système hydraulique formé de deux bacs

bac de gauche, l'eau s'écoule de façon fluide, contrairement au bac de droite, où des turbulences existent. Ce sont ces turbulences qui absorbent l'énergie cinétique de l'eau et la transforme en chaleur. Sans ces turbulences, nous aurions un éternel mouvement de va et vient de l'eau entre les deux bacs. Dans le but d'appliquer la relation de Bernoulli dans le bac de gauche, considérons un tube de courant, c'est à dire, un tube virtuel (voir figure 1) à l'intérieur duquel l'eau possède un mouvement fluide et ne traverse pas les parois. La relation de Bernoulli nous dit que dans ce tube, en tout point,

$$P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z = \text{constante}$$

où P est la pression au point considéré, z son altitude, v la vitesse de l'eau en ce point. Le coefficient ρ est la masse volumique de l'eau et g est la constante de gravitation. D'après la relation de Bernoulli, nous avons

$$P_D + \rho \frac{v_D^2}{2} + \rho g z_D = P_A + \rho \frac{v_A^2}{2} + \rho g z_A$$

c'est-à-dire

$$P_D = P_A + \rho g (z_A - z_D) - \rho \frac{v_D^2}{2} \quad (27)$$

De plus, nous pouvons supposer que C est loin de la zone de turbulence et que l'eau ne bouge pas. Ainsi, nous avons, d'après Bernoulli

$$P_C + \rho g z_C = P_B + \rho g z_B$$

c'est-à-dire

$$P_C = P_B + \rho g (z_B - z_C) \quad (28)$$

Or, dans cette zone de turbulence, l'eau se trouve ralentie, mais nous pouvons supposer que la pression ne varie pas, c'est-à-dire, $P_C = P_D$. Ainsi, d'après (27) et (28), nous avons

$$P_B + \rho g (z_B - z_C) = P_A + \rho g (z_A - z_D) - \rho \frac{v_D^2}{2}$$

Comme $P_A = P_B = P_{atm}$, et que $z_C = z_D$, cette équation se traduit par

$$\rho g(z_A - z_B) = \rho \frac{v_D^2}{2}$$

ou encore

$$v_D = \sqrt{2g(z_A - z_B)}$$

Dans le cas ou le niveau du bac droit est supérieur à celui du bac gauche, une étude similaire nous donne

$$v_D = -\sqrt{2g(z_B - z_A)}$$

Le signe moins de l'expression indique que le courant circule maintenant du bac droit vers le bac gauche. Donc, la relation générale pour la vitesse de l'eau dans le canal est

$$v_D = \text{sign}(z_A - z_B) \sqrt{2g|z_A - z_B|}$$

Si S_n est la section du canal, le débit d'eau du bac droit vers le bac gauche est

$$Q_D = S_n \cdot \text{sign}(z_A - z_B) \sqrt{2g|z_A - z_B|} \quad (29)$$

IV. APPLICATION DE LA COMMANDE PAR BACKSTEPPING ADAPTATIF

Dans ce paragraphe nous présentons une application sur le système présenté au paragraphe précédent. Nous allons tester notre loi de commande sur les deux colonnes A et B , en utilisant l'ouverture V_B comme perturbation (voir figure 1) Soit, $x_1 = z_A$, $x_2 = z_B$ et $u = Q$. Le système à deux réservoirs(cuves) peut être modélisé par les deux équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -C_1 \sqrt{x_1 - x_2} + \frac{u}{A} \\ \dot{x}_2 &= C_1 \sqrt{x_1 - x_2} - B_3 \sqrt{x_2} \\ y(t) &= x_2 \end{aligned} \quad (30)$$

Nous désirons déterminer une loi de commande u qui stabilise exponentiellement le système (30), sachant que les valeurs exactes de coefficient de débit a_{z1} et de coefficient de débit de fuite b_{z3} ne sont pas connues, les expressions de ces deux paramètres incertains sont données par

$$\begin{aligned} C_1 &= a_{z1} \alpha, & \alpha &= \frac{S_n \sqrt{2g}}{A} \\ B_3 &= b_{z3} \beta, & \beta &= \frac{S_L \sqrt{2g}}{A} \end{aligned}$$

Ce qui permet d'aboutir à la forme suivante

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} + \frac{u}{A} \\ \dot{x}_2 &= a_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} - b_{z3} \beta \sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (31)$$

Étape1 : La première étape pour construire la loi de commande par backstepping adaptatif est de considérer l'écart entre la sortie et la valeur désirée $z_1 = x_2 - x_{2d}$. La loi de commande doit assurer la convergence de z_1 vers zéro. Par conséquent, on définit une première fonction de stockage associée à z_1 , $V_1 = 0.5z_1^2$. La dérivée de V_1 entraîne

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= z_1 \dot{z}_1 \\ &= a_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} - b_{z3} \beta \sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d} = -k_1 z_1^2 \end{aligned} \quad (32)$$

Le terme $\hat{a}_{z1} \alpha \sqrt{(x_1 - x_2)}$ peut être considéré comme une commande virtuelle dans l'équation ci-dessus. La fonction

stabilisante choisie pour rendre \dot{V}_1 négative est définie comme suit

$$\alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d}) = \hat{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2} - k_1 z_1 - \dot{x}_{2d} \quad (33)$$

où k_1 est une constante positive. A partir de la deuxième variable d'erreur $z_2 = x_2 - \alpha_1$, on peut exprimer la dynamique de z_1 en fonction de z_2

$$\dot{z}_1 = z_2 - k_1 z_1 + \tilde{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_1} - \tilde{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2} \quad (34)$$

La dérivée résultante du choix de la fonction stabilisante est donnée par

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 = -k_1 z_1^2 + z_1 z_2 + z_1 \tilde{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_1} - z_1 \tilde{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2} \quad (35)$$

On remarque l'apparition de deux termes incertains \tilde{a}_{z1} et \tilde{b}_{z3} , leurs signe sont indéfini et aucune conclusion ne peut être tirée sur la stabilité du système.

Étape2 : On considère le système (31) et l'ont définit la nouvelle variable d'erreur $z_2 = \tilde{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} - \alpha_1(x_2, \dot{x}_{2d})$, qui représente l'écart entre la commande virtuelle et la fonction stabilisante. Les équations du système à commander, dans l'espace (z_1, z_2) s'écrivent

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 - k_1 z_1 + \tilde{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_1} - \tilde{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2} \\ \dot{z}_2 &= f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) - \hat{a}_{z1} \tilde{a}_{z1} \alpha^2 + \frac{\hat{b}_{z3} \tilde{b}_{z3} \beta^2}{2} \\ &+ \frac{\hat{a}_{z1} \tilde{b}_{z3} \alpha \beta}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1 - x_2}} + \frac{\tilde{a}_{z1} \hat{b}_{z3} \alpha \beta}{2} \frac{\sqrt{x_1 - x_2}}{\sqrt{x_2}} \\ &+ k_1 (\tilde{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} - \tilde{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2}) + v_1 + v_2 \\ &+ \frac{\hat{a}_{z1} \alpha}{2A} \frac{u}{\sqrt{x_1 - x_2}} \end{aligned} \quad (36)$$

où $f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3})$ est une fonction connue définie par

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) &= \frac{\hat{a}_{z1} \hat{b}_{z3} \alpha \beta}{2} \frac{2x_2 - x_1}{\sqrt{x_2(x_1 - x_2)}} + \frac{\hat{b}_{z3}^2 \beta^2}{2} \\ &+ k_1 (\hat{a}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} - \hat{b}_{z3} \beta \sqrt{x_2} - \dot{x}_{2d}) \\ &- \hat{a}_{z1}^2 \alpha^2 - \dot{x}_{2d} \end{aligned} \quad (38)$$

v_1 et v_2 sont deux fonctions connue exprimées en fonction des lois d'adaptations

$$\begin{aligned} v_1 &= \dot{\hat{a}}_{z1} \alpha \sqrt{x_1 - x_2} \\ v_2 &= \dot{\hat{b}}_{z3} \beta \sqrt{x_2} \end{aligned} \quad (39)$$

Notez que les paramètres de système (31) sont supposés constants

$$\tilde{a}_{z1} = a_{z1} - \hat{a}_{z1}, \tilde{b}_{z3} = b_{z3} - \hat{b}_{z3}, \dot{\tilde{a}}_{z1} = -\dot{\hat{a}}_{z1}, \dot{\tilde{b}}_{z3} = -\dot{\hat{b}}_{z3} \quad (40)$$

Théorème 1: La loi de commande exprimée par

$$u = -\frac{2A}{\hat{a}_{z1} \alpha} \sqrt{x_1 - x_2} \left(k_2 z_2 + z_1 + f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) + v_1 + v_2 \right) \quad (41)$$

assure la convergence asymptotique du vecteur d'état augmenté $x(t)$ comme illustré par

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0 \quad (42)$$

Ainsi, toutes les composantes de $x(t)$, z_1 et z_2 , convergent exponentiellement vers l'origine.

Preuve 1: La convergence de z_2 entraînerait naturellement la convergence de z_1 . Pour assurer la convergence de z_2 , on l'ajoute à la fonction de Lyapunov V_1 .

Dans l'expression de \dot{z}_2 , la dynamique de x_2 va apparaître, perturbée par les deux termes inconnus a_{z1} et b_{z3} . Soit \hat{a}_{z1} et \hat{b}_{z3} l'estimation de ces deux paramètres inconnus.

Il faut veiller à réduire l'erreur d'estimation $\tilde{a}_{z1} = a_{z1} - \hat{a}_{z1}$, $\tilde{b}_{z3} = b_{z3} - \hat{b}_{z3}$. Par conséquent, cette erreur sera elle aussi ajoutée à la fonction de stockage V_1 , conduisant à la définition d'une fonction de Lyapunov augmentée V_2 .

$$V_2 = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{1}{2}\gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}^2 + \frac{1}{2}\gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}^2 \quad (43)$$

où γ_1 et γ_3 sont des gains d'adaptation. Utilisant (36) et (43), la dérivée de V_2 peut être calculée de la manière suivante

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= z_1\dot{z}_1 + z_2\dot{z}_2 - \gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}\dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}\dot{\tilde{b}}_{z3} \\ &= -k_1z_1^2 + z_1z_2 + z_2\dot{z}_2 + z_1\tilde{a}_{z1}\alpha\sqrt{x_1-x_2} \\ &\quad - z_1\tilde{b}_{z3}\beta\sqrt{x_2} - \gamma_1^{-1}\tilde{a}_{z1}\dot{\tilde{a}}_{z1} - \gamma_3^{-1}\tilde{b}_{z3}\dot{\tilde{b}}_{z3} \end{aligned} \quad (44)$$

En prenant la dérivée de (44) et en substituant (36) dans cette dérivée nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= -k_1z_1^2 + z_2 \left[z_1 + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2A\sqrt{x_1-x_2}}u + f + v_1 + v_2 \right] \\ &\quad - z_2\alpha \left[\hat{a}_{z1}\alpha + \frac{\hat{b}_{z3}\beta\sqrt{x_1-x_2}}{2\sqrt{x_2}} + k_1\sqrt{x_1-x_2} \right] \tilde{a}_{z1} \\ &\quad + \alpha \left(z_1\sqrt{x_1-x_2} - \frac{\dot{\tilde{a}}_{z1}}{\gamma_1} \right) \tilde{a}_{z1} + \beta \left(-z_1\sqrt{x_2} - \frac{\dot{\tilde{b}}_{z3}}{\gamma_3} \right) \tilde{b}_{z3} \\ &\quad + z_2\beta \left[\frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1-x_2}} - k_1\sqrt{x_2} \right] \tilde{b}_{z3} \end{aligned} \quad (45)$$

Basé sur la théorie de stabilité de Lyapunov, \dot{V}_2 doit être une fonction bien déterminée négative. Par conséquent la loi de commande est choisie comme suit

$$u = -\frac{2A}{\hat{a}_{z1}\alpha}\sqrt{x_1-x_2} \left(k_2z_2 + z_1 + f(x_1, x_2, \hat{a}_{z1}, \hat{b}_{z3}) + v_1 + v_2 \right) \quad (46)$$

Pour éliminer les termes \tilde{a}_{z1} et \tilde{b}_{z3} , les lois de mise à jour peuvent être déterminées comme suit

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{a}}_{z1} &= -\gamma_1z_2 \left[\hat{a}_{z1}\alpha + \frac{\hat{b}_{z3}\beta\sqrt{x_1-x_2}}{2\sqrt{x_2}} - k_1\sqrt{x_1-x_2} \right] \\ &\quad + \gamma_1(z_1\sqrt{x_1-x_2}) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\dot{\tilde{b}}_{z3} = \gamma_3z_2 \left[\frac{\hat{b}_{z3}\beta}{2} + \frac{\hat{a}_{z1}\alpha}{2} \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1-x_2}} - k_1\sqrt{x_2} \right] - \gamma_3z_1\sqrt{x_2} \quad (48)$$

Remarque 2: On peut remarquer, à partir des équations (45)-(48), qu'il y a une singularité de commande $x_1(t) = x_2(t)$. En outre, si $x_1(t) = 0$ aucune commande ne sera

appliquée au système, qui cause par la suite $x_1(t) - x_2(t) = 0$ créant ainsi une singularité.

Substituant dans la dérivée de la fonction candidate de Lyapunov (45) l'entrée $u(t)$ par la loi de commande (46) et la loi de paramètres définie dans (47) et (48), nous obtenons alors

$$\dot{V}_2 = -k_1z_1^2 - k_2z_2^2 \quad (49)$$

Pour montrer la convergence des états z_1 et z_2 ainsi que leurs bornitudes, nous intégrons la relation (49)

$$\begin{aligned} V_2(z_1(t), z_2(t)) - V_2(z_1(t_0), z_2(t_0)) &= \\ &= -k_1 \int_{t_0}^t z_1^2(\tau) d\tau - k_2 \int_{t_0}^t z_2^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (50)$$

En utilisant le fait que $V_2(t) \geq 0$, pour $t \geq t_0$, nous avons

$$W_2 = k_1 \int_{t_0}^t z_1^2(\tau) d\tau + k_2 \int_{t_0}^t z_2^2(\tau) d\tau \leq V_2(t_0) \quad (51)$$

puisque $W_2(t)$ est une fonction uniformément continue, alors d'après le Lemme de Barbalat [7], z_1 et z_2 sont bornés. de plus $\lim_{t \rightarrow \infty} W_2 = 0$ et par conséquent $\lim_{t \rightarrow \infty} z_1 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} z_2 = 0$. De plus à partir de (49), nous pouvons écrire que

$$\dot{V}_2(t) \leq -2\min\{k_1, k_2\} V_2(t) \quad (52)$$

$$V_2(t) \leq V_2(t_0)e^{-\mu(t-t_0)} \quad (53)$$

avec $\mu = 2\min\{k_1, k_2\}$, ce qui implique que le vecteur d'état $x(t) = [z_1 \ z_2]^T$ converge exponentiellement vers zéro quand $t \rightarrow \infty$ selon la loi suivante

$$\|x(t)\| \leq \|x(t_0)\| e^{-\frac{1}{2}\mu(t-t_0)} \quad (54)$$

V. APPLICATION SUR BANC D'ESSAIS

La stratégie de commande proposée est appliquée au banc d'essais incluant deux réservoirs (Figure 1). Le système se compose de deux réservoirs remplis par une pompe de débit Q au niveau du réservoir A . Cette pompe est manoeuvrée continûment de 0 jusqu'à un débit maximum. trois vannes tout ou rien V_D , V_C et V_B commandent les débits entre les réservoirs (ouvertes si $V_i = 1$, fermées sinon). La vanne manuelle V_C commande le débit nominal de sortie du réservoir à droite. Dans les expérimentations ci-dessous, les vannes V_D et V_C seront toujours ouvertes et V_B sera fermée (On l'ouvre juste pour créer une perturbation).

La loi de commande est obtenue à partir de l'équation (46), où $u_{max} = 1.17.10^{-4}m^3/s$, $A = 0.0154m^2$, $S_n = S_L = 5.10^{-5}m^2$ et $g = 9.81m/s^2$. Puis nous prenons l'ensemble suivant de paramètres de conception : $\gamma_1 = 0.0144$, $\gamma_3 = 0.0218$, $k_1 = 0.001$, $k_2 = 0.007$.

Pour visualiser le comportement dynamique transitoire du niveau commandé, nous avons appliqué un signal de référence de type échelon d'amplitude $0.1m$, puis à $t = 500$, nous imposons une référence d'amplitude $0.12m$. Le premier test concerne le système dans le cas nominal, en supposant qu'il n'y a pas de fuite, et que les vannes V_D et V_C sont ouvertes et la vanne V_B est fermée.

La figure 2 montre les résultats expérimentaux de la commande adaptative sans perturbations extérieures, Les figures 2(a) et 3(c) montrent respectivement le niveau et les paramètres estimés du modèle de deux colonnes. Nous remarquons une bonne régulation de niveau. L'erreur de suivi de niveau es très faibles (erreur maximale égale $0.1mm$).

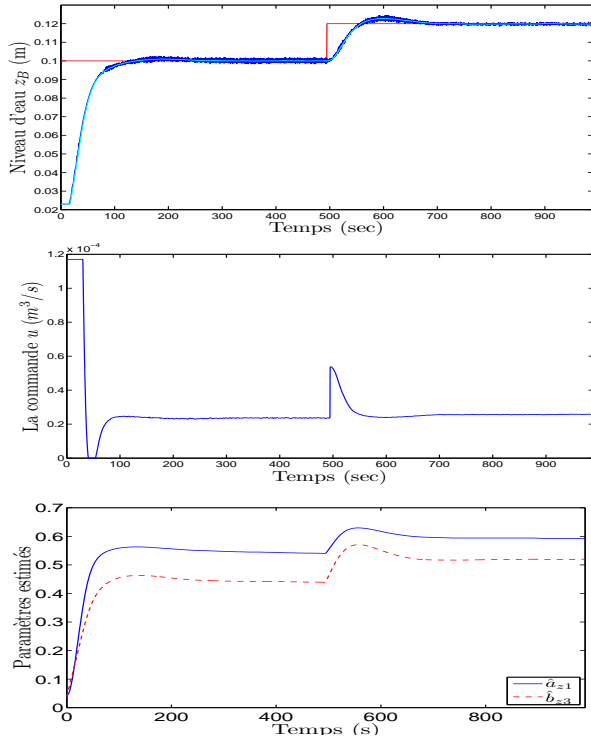


Fig. 2. résultats expérimentaux avec la commande par backstepping adaptative sans perturbations extérieures.

Pour montrer l'intérêt de notre technique de commande, nous nous proposons d'étudier la robustesse par rapport aux perturbations extérieures. Pour ce faire nous avons utilisé la colonne B pour créer des perturbations extérieures par l'ouverture de la Vanne V_B à $t = 0s$, voir figure 1. La figure 2(a) montre bien que le niveau du liquide est stabilisé autour de la référence imposé malgré la présence de perturbations et les couplages entre les colonnes (variations paramétriques). La figure 2(b) montre la réaction de notre commande pour garder la valeur de la sortie à $x_{2d} = 0.12m$. Toutefois, la sortie est toujours maintenue, ce qui montre la robustesse de notre loi de commande par rapport aux perturbations extérieures. Les commandes, appliquées au moteur de la pompe, dans les deux cas, sont illustrées dans la figure 2(b) et 3(b). On constate que le phénomène de réticence est pratiquement inexistant dans les signaux de commande. La forte excitation des pompes est donc complètement éliminée. Les commandes sont physiquement acceptables. En effet, la commande par mode glissant d'ordre un [10] des systèmes non linéaires incertains a été limitée par la présence du "chattering". Ce phénomène risque d'entraîner des crépitements du moteur utilisé par la pompe lorsque l'amplitude des variations est trop importante. C'est pourquoi la commande par backstepping adaptatif d'un système hydraulique incertain est une bonne solution pour résoudre le problème du "chatte-

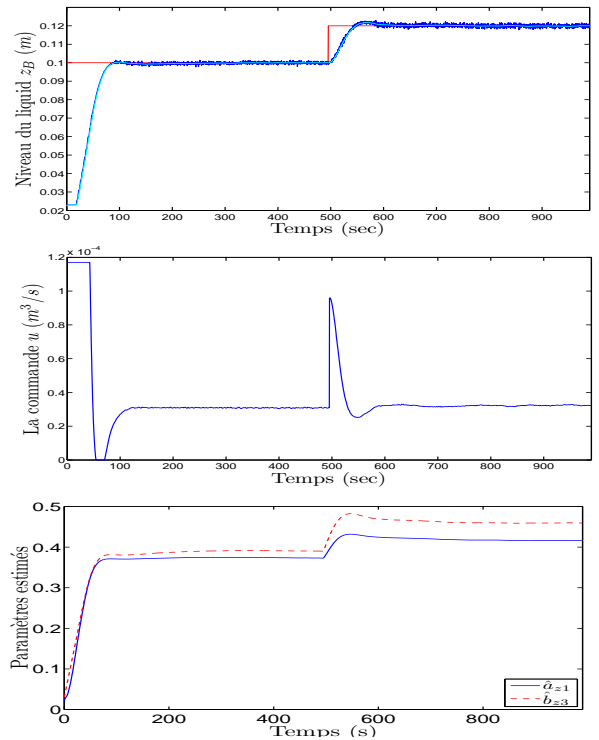


Fig. 3. résultats expérimentaux obtenus avec la commande adaptative en présence des perturbations extérieures.

ring" sans détériorer les résultats en régime statique.

VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté des résultats expérimentaux obtenus pour la commande par backstepping adaptatif d'un système hydraulique. la commande par backstepping développée ne nécessite pas la connaissance des intervalles des paramètres du modèle, il est démontré que la commande proposée peut garantir une borne limite uniforme globale et réaliser le suivi avec une bonne précision. Les bons résultats expérimentaux obtenus démontrent que cette technique de commande non linéaire est robuste même si les variations de paramètres et la perturbation de fuite se produisent.

RÉFÉRENCES

- [1] M Arcak, M Seron, J Braslavsky, and P Kokotovic. Robustification of backstepping against input unmodeled dynamics. *IEEE, transaction on Automatic Control*, 45(7)(1358-1363), 2000.
- [2] K Ezal, Z Pan, and P Kokotovic. Locally optimal and robust backstepping design. *IEEE, Transaction on Automatic Control*, 45(2)(260-271), 2000.
- [3] R Freeman and P Kokotovic. *Robust nonlinear control design*. Birkhäuser, 1996.
- [4] R.A Freeman and P Kokotovic. Design of softer robust nonlinear control laws. *Automatica*, 29(1425-1437), 1993.
- [5] I Kanellakopoulos, P Kokotovic, and A. S Morse. Systematic design of adaptive controllers for feedback linearisable systems. *IEEE Transactions on automatic Control*, 36(1241-1253), 1991.
- [6] K. Khalil. *Nonlinear systems (2nd ed.)*. Prentice-Hall, New-York, 1996.
- [7] K. Khalil. *Nonlinear systems (3rd ed.)*. Prentice-Hall, New-Jersey, 2001.
- [8] M Krstic, I Kanellakopoulos, and P Kokotovic. *Nonlinear and adaptive control design*. Wiley-Interscience, New York, 1995.
- [9] R Sepulchre, M Jankovic, and P Kokotovic. *Constructive nonlinear control*. Springer-Verlag, 1997.
- [10] V. I Utkin. Variable structure systems :. *IEEE Trans Automat Contr*, 22(212-222), 1997.