

Modélisation de systèmes de production à routages périodiques dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$

Olivier BOUTIN^{1,2}, Bertrand COTTENCEAU², Anne L'ANTON¹ et Jean-Jacques LOISEAU¹

¹Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN), UMR CNRS 6597
1 rue de la Noë – BP 92101 – 44321 Nantes CEDEX 03, France

²Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), EA 4014
62 avenue Notre Dame du Lac – 49000 Angers, France

{olivier.boutin, anne.l-anton, jean-jacques.loiseau}@irccyn.ec-nantes.fr,
bertrand.cottenceau@istia.univ-angers.fr

<http://www.irccyn.ec-nantes.fr>, <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA>

Résumé— Le routage est un aspect prédominant dans les systèmes de production de type job-shop. Chaque produit y est aiguillé en fonction de sa propre gamme. Cependant, les phénomènes de routage ou, de façon équivalente, les conflits dans les réseaux de Petri, ne peuvent pas être modélisés dans des structures algébriques de dioïdes telles que $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$. Ceci est principalement dû à l'impossibilité de représenter dans ces modèles des choix entre plusieurs directions possibles. Dans cet article, nous définissons un encadrement du comportement entrée/sortie d'un système comportant plusieurs sous-systèmes en conflit, afin de contourner ce problème. L'encadrement fourni contient tous les comportements possibles du système étudié (en termes de nombres de palettes évoluant dans le système, de délais et de cadences) quand la politique de routage utilisée est périodique. Par conséquent, même si le comportement entrée/sortie d'un tel système n'est pas linéaire dans un dioïde, tel que $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ par exemple, il peut néanmoins être encadré par celui de deux systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires, l'un plus lent, l'autre plus rapide. On parvient donc à proposer un modèle approché de ces systèmes sur un dioïde d'intervalles et ainsi à avoir le bénéfice d'utiliser les contributions théoriques des structures algébriques de dioïde, permettant entre autre d'aborder des problèmes de commande.

Mots-clés— Systèmes à événements discrets, systèmes de production, réseaux de Petri, modélisation de conflits, routage périodique, systèmes $(\max,+)$ linéaires, analyse par intervalles.

I. INTRODUCTION

Nous considérons dans cet article des systèmes dynamiques à événements discrets, pouvant être représentés dans des semi-anneaux idempotents (aussi appelés « dioïdes »). Ces systèmes sont essentiellement constitués de stocks, d'activités nécessitant un certain temps d'exécution (comme l'usinage ou le convoyage) et de synchronisations, tous ces phénomènes pouvant être représentés dans des dioïdes adéquats [1]. Ces systèmes sont habituellement dit $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires, ou « max-plus » linéaires, car leurs modélisations deviennent linéaires une fois considérées dans le cadre d'un dioïde ($\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ en l'occurrence). On représente généralement graphiquement les systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires par des Graphes d'Evenements Temporisés (GET).

L'étude approfondie de ces structures algébriques remonte à la fin des années 70, début des années 80, es-

sentiellement à des fins de modélisation, d'analyse de la performance, de commande et de diagnostic [2], [3], [4]. Les résultats essentiels de la théorie sous-jacente sont applicables à des systèmes manufacturiers, de transports (urbains ou ferroviaires par exemple) ou même à des réseaux informatiques ("network calculus").

Les systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires permettent de décrire naturellement des systèmes *synchronisés*. Si deux systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires H_1 et H_2 utilisent en parallèle la même entrée u (cette entrée va à la fois dans H_1 et H_2), le système global H est équivalent à $H_1 \oplus H_2$, qui est aussi $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaire [1, chapitre 6]. Le système H est représenté dans la partie gauche de la figure 1 où les sous-systèmes H_1 et H_2 sont modélisés par des GET.

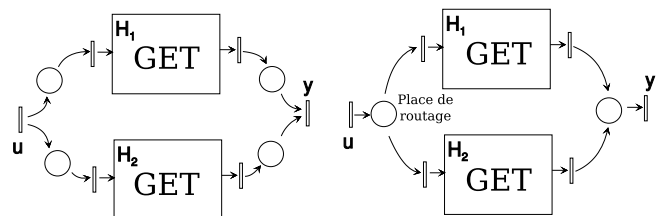


Fig. 1. Deux manières de relier des lignes de production parallèles : connexions « en et » et « en ou »

Plusieurs lignes de production parallèles peut aussi être reliées de manière *conflictuelle* quant à l'affectation du flux de matière en entrée. Les systèmes comportant des conflits ne sont alors plus $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires, et ce, même si les sous-systèmes les constituant le sont. Ce phénomène est représenté dans la partie droite de la figure 1. Les deux sous-systèmes H_1 et H_2 sont $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires (et modélisés par des GET), mais l'entrée u est aiguillée *soit* vers H_1 , *soit* vers H_2 . Nous pouvons remarquer que le réseau de Petri ainsi formé n'est plus un GET (comme certaines places possèdent plusieurs arcs entrants ou sortants). Cela revient à dire que le système global n'est pas nécessairement $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaire.

Les phénomènes étudiés dans cet article correspondent à ce qui est appelé *jonctions* et *distributions* en Grafset [5].

En Grafcet, les synchronisations et les conflits sont définis comme des connexions « en et » et « en ou ». Les sémantiques liées à ces connexions correspondent aux notions correspondantes en logique. Pour une connexion « en et », les signaux sont acheminés dans les deux sous-systèmes parallèles de manière synchronisée, alors que pour une connexion « en ou », les signaux vont dans un système *ou* dans l'autre¹. Cependant, le décompte et la datation d'événements ne peuvent pas être réalisés en Grafcet. C'est pourquoi nous utilisons des réseaux de Petri.

Dans cet article, l'étude est focalisée sur la modélisation des conflits (connexions « en ou »), les produits étant dirigés vers l'un ou l'autre des systèmes parallèles. Plus précisément, nous considérons le comportement entrée/sortie du système global, pour une politique de routage donnée entre les sous-systèmes. Le résultat principal de ce travail est de montrer que, pour des politiques de routage *périodiques*, le comportement entrée/sortie du système peut être encadré par celui de deux systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires.

Grâce au dioïde des intervalles défini dans [6], on peut décrire un système incluant un conflit par un intervalle contenant le comportement de ce système.

La suite de cet article est organisée comme suit. Dans la section suivante, nous faisons un rappel concernant les modèles mathématiques utilisés sur les GET. Ensuite nous décrivons dans la section III le phénomène de conflit que nous cherchons à modéliser, et nous présentons la manière de calculer une borne inférieure du comportement entrée/sortie de systèmes comportant des conflits. Puis nous introduisons dans la section IV la notion de politique de routage périodique. La section V est utilisée pour montrer comment obtenir un majorant de ce comportement quand les systèmes sont connectés « en ou » et quand la politique de routage correspondante est périodique. Cet article se termine par un exemple illustratif.

II. DES MODÈLES LINÉAIRES POUR LES GET

Nous rappelons dans cette section quelques aspects de la théorie des dioïdes. Les lecteurs sont invités à consulter [1] ou [7] pour une présentation exhaustive.

Un dioïde est un semi-anneau noté $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, dont la loi \oplus est idempotente ($\forall a, a \oplus a = a$). Les éléments neutres pour la somme et le produit sont généralement notés ε et e respectivement. En notant \wedge la borne inférieure de deux éléments, un dioïde peut naturellement être muni d'une *relation d'ordre canonique* définie par :

$$a \succeq b \iff a \oplus b = a \iff a \wedge b = b. \quad (1)$$

Parmi les dioïdes les plus connus, $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ est l'ensemble $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni de l'opération \max pour \oplus et de la somme classique $+$ pour \otimes ². L'ensemble $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni du \min pour \oplus et de $+$ pour \otimes est lui aussi un dioïde, noté $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. Il est à noter que l'ordre canonique dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ est le contraire de l'ordre naturel sur \mathbb{Z} , c'est-à-dire

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b \iff a = \min(a, b) \iff a \leq b.$$

Définition 1 (Graphe d'événements temporisé) Un graphe d'événements temporisé (GET) est un réseau de Petri

1. en fait, ceci correspond plus précisément au *ou exclusif* logique
2. ce dioïde est communément appelé « algèbre max-plus »

tel que chaque place a exactement un arc entrant et un arc sortant. Les délais, à valeurs dans \mathbb{N} , sont liés aux places dans notre cas.

La dynamique d'un GET ayant une politique de franchissement « au plus tôt »³ peut être modélisée par des équations d'état dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. Un modèle $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ est basé sur les dates d'occurrences des événements, alors qu'un modèle $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ est basé quant à lui sur le décompte des événements survenus jusqu'à une date donnée. De plus, en introduisant des opérateurs de décalage, on peut aussi décrire les comportement entrée/sortie d'un système par des séries formelles⁴.

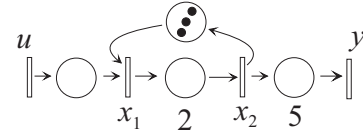


Fig. 2. Un exemple de GET

Pour des systèmes décrits par des GET mono-entrée/mono-sortie, tel que celui de la figure 2, si l'on considère l'entrée comme un signal, la sortie du système est la convolution de l'entrée et de la réponse impulsionnelle du système. Pour le GET de la figure 2, la réponse impulsionnelle du système peut être représentée par la fonction compteur H suivante⁵ :

$$\begin{cases} H(t) = 0 & \forall t < 7 \\ H(7) = H(8) = 3 \\ H(t) = 3 \otimes H(t-2) & \forall t > 8 \end{cases}$$

Définition 2 (Suite ultimement périodique) Une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite ultimement périodique quand il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $x_{n+p} = x_n, \forall n \geq n_0$.

Ainsi, la fonction H est ultimement périodique et a pour cadence 3 événements toutes les 2 unités de temps.

Dans ce contexte, le comportement entrée/sortie est représenté dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ par l'inf-convolution suivante :

$$\begin{aligned} y(t) &= H(0) \otimes u(t) \oplus H(1) \otimes u(t-1) \\ &\quad \oplus H(2) \otimes u(t-2) \oplus \dots \\ &= \bigoplus_{i=0}^t H(i) \otimes u(t-i) \\ &= (H * u)(t), \end{aligned}$$

où l'opération $*$ représente le produit d'inf-convolution de la fonction compteur H et u . L'ensemble des fonctions compteur définies sur $\mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ muni du \min point à point comme somme et de l'inf-convolution $*$ comme produit est un dioïde noté $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$.

Finalement, en introduisant la transformée en δ d'une fonction compteur c comme la série formelle suivante

$$c(\delta) = \bigoplus_{t=0}^{+\infty} c(t) \delta^t,$$

3. toute transition franchissable est immédiatement franchie
4. ces opérateurs sont semblables à la transformée en \mathcal{Z} utilisée pour discrétiser les systèmes continus
5. $H : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, $H(t)$: nombre d'événements s'étant déroulés à la date t

la réponse impulsionnelle du système H de la figure 2 peut aussi être représentée par la série formelle suivante :

$$\begin{aligned} H(\delta) &= \delta^7 \oplus 3\delta^9 \oplus 6\delta^{11} \oplus \dots \\ &= \delta^7 \otimes (\delta^0 \oplus 3\delta^2 \oplus 6\delta^4 \oplus \dots) \\ &= \delta^7 (3\delta^2)^*, \end{aligned}$$

où \star est l'étoile de Kleene définie par $a^* = a^0 \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i$, avec $a^0 = \delta^0$.

Le dioïde des séries en δ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ est noté $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$. Les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$ sont isomorphes. l'inf-convolution dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ correspond au produit de séries (aussi appelé « produit de Cauchy ») dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$.

Remarque 1: Une propriété importante des systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires est qu'il est toujours possible de représenter leurs réponses impulsionnelles par des fonctions dateur ou compteur ultimement périodiques. Dès lors, les séries en δ correspondantes sont toujours des expressions rationnelles. Il existe en outre des outils informatiques pour manipuler de telles séries [8].

III. UNE BORNE INFÉRIEURE POUR DES SYSTÈMES PARALLÈLES EN CONFLIT

Les systèmes H_i étudiés dans cet article (cf. la figure 3) sont $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires et mono-entrée/mono-sortie, et l'aiguillage entre ces systèmes est géré par une place de routage en amont. Le système global consiste en la mise en parallèle de tous les H_i , en créant ainsi un conflit. Chaque événement en entrée est routé vers *un seul* de ses sous-systèmes H_i . La sortie y collecte tous les événements y_i .

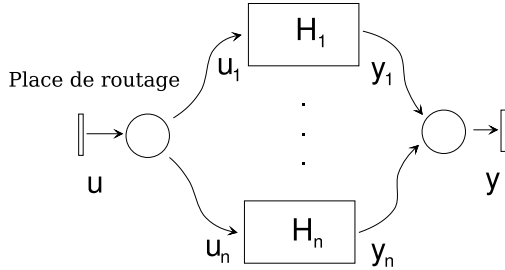


Fig. 3. Cas typique d'étude

D'un point de vue compteur, les équations de conservation suivantes sont donc satisfaites, pour tout t :

$$u(t) = \bigotimes_i u_i(t) \text{ et } \bigotimes_i y_i(t) = y(t).$$

Si nous considérons un système H composé de 2 sous-systèmes H_1 et H_2 tous deux $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires, nous obtenons les équations suivantes :

$$u(t) = u_1(t) \otimes u_2(t) \text{ et } y(t) = y_1(t) \otimes y_2(t).$$

De plus, nous avons dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$

$$y_1(t) = (H_1 * u_1)(t) \text{ et } y_2(t) = (H_2 * u_2)(t),$$

puisque les deux systèmes sont $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires. Nous obtenons donc

$$y(t) = (H_1 * u_1 \odot H_2 * u_2)(t),$$

où le produit de fonctions \odot est défini par

$$\forall t, (f \odot g)(t) = f(t) \otimes g(t).$$

Propriété 1: Soient les fonctions compteur a, b et $c \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$,

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Démonstration : Pour tout t , \odot distribue sur le min de fonctions. \square

Propriété 2: L'application $x \mapsto a \odot x$ définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ est isotone, c'est-à-dire

$$b \preceq c \Rightarrow a \odot b \preceq a \odot c.$$

Remarque 2: Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$, l'opération \odot est définie comme suit :

$$a(\delta) \odot b(\delta) = \bigoplus_{t=0}^{+\infty} (a(t) \otimes b(t)) \delta^t.$$

De fait, ce produit correspond à ce qui est appelé dans la littérature « produit de Hadamard » de deux séries formelles [9].

La proposition suivante introduit une borne inférieure pour des systèmes parallèles en conflit.

Proposition 1: Soient les fonctions compteur H_1, H_2, u_1 et $u_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$, l'inéquation suivante est toujours satisfaite :

$$(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2) \preceq (H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2).$$

Démonstration : Nous allons comparer les deux membres de cette inégalité, pour tout t .

$$\begin{aligned} [(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2)](t) = \\ \bigoplus_{t=t_1+t_2} (H_1(t_1) \otimes H_2(t_1) \otimes u_1(t_2) \otimes u_2(t_2)) \end{aligned}$$

En développant l'autre membre, nous obtenons :

$$\begin{aligned} [(H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2)](t) = \\ [\bigoplus_{t=t_1+t_2} H_1(t_1) \otimes u_1(t_2)] \otimes [\bigoplus_{t=t_1+t_2} H_2(t_1) \otimes u_2(t_2)]. \end{aligned}$$

Donc $[(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2)](t)$ correspond au minimum de n termes, et $[(H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2)](t)$ peut être réécrit comme le minimum de n^2 termes, incluant en particulier tous les termes de la première expression. À partir de la définition de la relation d'ordre canonique (cf. l'équivalence (1)), nous pouvons conclure. \square

Remarque 3: Quand $u_1 = u_2 = e$ (e étant ici la fonction $e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $e(t) = +\infty$ autrement), l'égalité est satisfaite $(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2) = (H_1 \odot H_2) * e = (H_1 * e) \odot (H_2 * e)$. En d'autres termes, la réponse impulsionnelle du système global correspondant est $H_1 \odot H_2$ dans ce cas.

Proposition 2: Pour un système H possédant une connexion interne « en ou » avec n sous-systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires, quelle que soit la fonction de routage, nous avons

$$y \succeq (H_1 \odot H_2 \odot \dots \odot H_n) * u.$$

Démonstration : C'est une extension directe de la proposition 1, en sachant que le produit \odot est associatif. \square

6. il est à noter que la preuve d'une proposition similaire peut être trouvée dans [9, Lemme 6.2.1]

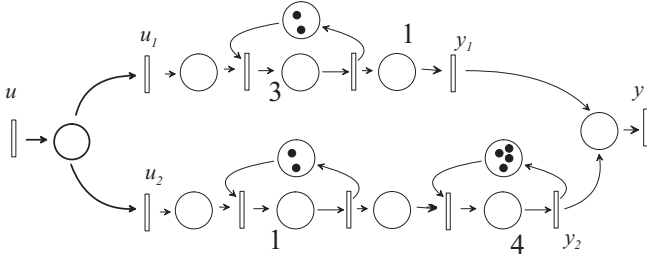


Fig. 4. Un exemple d'atelier flexible

Exemple 1: Considérons l'exemple de la figure 4 possédant deux sous-systèmes. Leurs réponses impulsionnelles sont exprimées par les séries suivantes dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$:

$$H_1(\delta) = \delta^4(2\delta^3)^* \text{ et } H_2(\delta) = (\delta^5 \oplus 2\delta^6)(4\delta^4)^*.$$

Ainsi pour cet exemple, nous avons

$$H_1(\delta) \odot H_2(\delta) = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^*.$$

En conclusion, la sortie $y(\delta)$ du système global est nécessairement plus grande que $(H_1(\delta) \odot H_2(\delta)) \otimes u(\delta)$. Le comportement entrée/sortie de ce système ne peut donc pas être plus rapide que le système équivalent à $H_1(\delta) \odot H_2(\delta)$.

IV. LES FONCTIONS DE ROUTAGE PÉRIODIQUES

La section précédente montre que le produit de Hadamard des fonctions compteur de sous-systèmes en conflit est une borne inférieure pour le comportement entrée/sortie d'un système les englobant, quelle que soit la politique de routage utilisée. Nous allons maintenant considérer l'influence de telles fonctions de routage périodiques.

Définition 3 (Routage périodique) Soit un système H constitué de 2 sous-systèmes H_1 et H_2 en conflit, on note $r = m|n$ la fonction de routage en amont de H_1 et H_2 telle que les fonction dateur u , u_1 et u_2 satisfont

$$\forall k, \quad u_1(k) = u(\lfloor k/m \rfloor \times (m+n) + (k \bmod m)) \\ u_2(k) = u(\lfloor k/n \rfloor \times (m+n) + (k \bmod n) + m).$$

En d'autres termes, pour un routage périodique $r = m|n$, m produits entrants sont d'abord routés vers H_1 , puis n de ces événements sont routés vers H_2 , ensuite m d'entre eux vers H_1 et ainsi de suite de manière cyclique.

Exemple 2: Pour la fonction de routage $r = 2|3$, on a

$$\forall k, \quad u_1(k) = u(\lfloor k/2 \rfloor \times 5 + (k \bmod 2)) \\ u_2(k) = u(\lfloor k/3 \rfloor \times 5 + (k \bmod 3) + 2).$$

Notation 1: Le comportement d'un système H composé de deux sous-systèmes H_1 et H_2 et dont la fonction de routage est r sera noté $(H_1|H_2)_r$. Les comportement entrée/sortie de ce système sera donc noté $y = H(u) = (H_1|H_2)_r(u)$.

Notation 2 (Application de changement d'échelle)

Notons $\text{Ech}_n : \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}, x \mapsto n \times x$ l'application de changement d'échelle avec x une fonction compteur et $n \in \mathbb{N}$.⁷

7. si l'on considère la représentation graphique d'une fonction compteur, la multiplier par un entier naturel revient à effectuer un changement d'échelle de l'axe événementiel, en quelque sorte

Le résultat suivant traite du comportement du système englobant deux sous-systèmes identiques et dont la fonction de routage est $r = 1|1$.

Proposition 3: Le comportement entrée/sortie du système $(H|H)_{1|1}$ est $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaire et sa réponse impulsionnelle est $\text{Ech}_2(H)$, où $\text{Ech}_2(H)$ est définie par

$$\forall t, (\text{Ech}_2(H))(t) = \text{Ech}_2(H(t)).$$

Démonstration : Pour les besoins de cette démonstration, nous passons à une représentation $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaire des sous-systèmes considérés. Le produit $*$ représente donc ici une sup-convolution.

$$y_1(k) = (H * u_1)(k) \\ = \bigoplus_{i=0}^k H(i) \otimes u_1(k-i)$$

$$y_2(k) = (H * u_2)(k) \\ = \bigoplus_{i=0}^k H(i) \otimes u_2(k-i)$$

Comme la fonction de routage utilisée est $1|1$, on a

$$u(2k) = u_1(k) \text{ and } u(2k+1) = u_2(k).$$

On sait aussi que $\forall k, u_1(k) \preceq u_2(k) \preceq u_1(k+1)$. Puisque les deux sous-systèmes sont identiques et que le produit de convolution est isotone, on obtient $\forall k, y_1(k) \preceq y_2(k) \preceq y_1(k+1)$ et finalement

$$y(2k) = y_1(k) \text{ and } y(2k+1) = y_2(k).$$

Nous pouvons alors écrire pour les événements pairs

$$y(2k) = \bigoplus_{i=0}^k H(i) \otimes u_1(k-i) \\ = H(0) \otimes u_1(k) \oplus H(1) \otimes u_1(k-1) \oplus \dots \\ = H(0) \otimes u(2k) \oplus H(1) \otimes u(2(k-1)) \oplus \dots \\ = \bigoplus_{i=0}^k H(i) \otimes u(2(k-i)),$$

et pour les événements impairs

$$y(2k+1) = H(0) \otimes u_2(k) \oplus H(1) \otimes u_2(k-1) \oplus \dots \\ = \bigoplus_{i=0}^k H(i) \otimes u(2(k-i)+1).$$

En conclusion, que K soit pair ou impair, on a

$$y(K) = \bigoplus_{i=0}^K H(i) \otimes u(K-2i),$$

ce qui montre que le système global est à la fois $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaire (la sortie se présente comme une sup-convolution d'une fonction dateur par l'entrée), et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaire si l'on passe à une représentation compteur, en utilisant des fonctions conjuguées. Par un changement de variable approprié, la réponse impulsionnelle du système équivalent est $H \odot H = \text{Ech}_2(H)$ (cf. la remarque 3). \square

En étendant la preuve à n sous-systèmes équivalents, on trouve le résultat suivant.

Proposition 4: Un système $(H|H|\dots|H)_{1|1|\dots|1}$ composé de n sous-systèmes H et dont la fonction de routage est $1|1|\dots|1$ a pour réponse impulsionnelle $\text{Ech}_n(H)$.

Exemple 3: Chaque sous-système de la figure 5(a) possède pour réponse impulsionnelle $H = \delta^7(3\delta^2)^*$. Le système $(H|H)_{1|1}$ est aussi $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaire et sa réponse impulsionnelle est $\text{Ech}_2(H) = \delta^7(6\delta^2)^*$. Le GET de la figure 5(b) possède la même réponse impulsionnelle. On retrouve donc par calcul un résultat intuitif : deux systèmes identiques mis en parallèle permettent de doubler la cadence du système global.

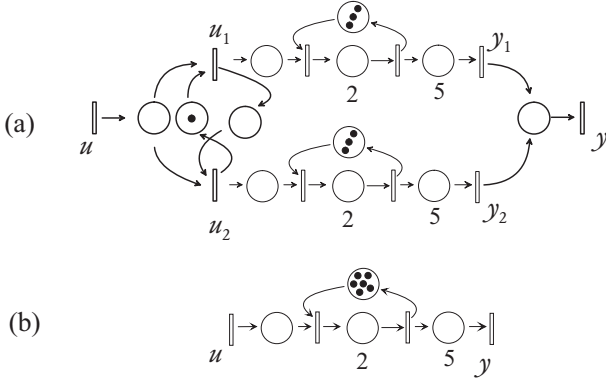


Fig. 5. Équivalence entre $(H|H)_{1|1}$ (a) et $\text{Ech}_2(H)$ (b)

V. UN MAJORANT DU COMPORTEMENT DE SYSTÈMES PARALLÈLES EN CONFLIT

Nous allons considérer les cas où un système peut être composé de sous-systèmes différents.

A. Routages de type 1/1

Proposition 5: Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$, le comportement d'un système $H = (H_1|H_2)_{1|1}$ est tel que

$$(H_1 \odot H_2) * u \preceq H(u) \preceq \text{Ech}_2(H_1 \oplus H_2) * u.$$

Nous pouvons donc garantir l'existence d'un intervalle pour le comportement entrée/sortie du système H ,

$$(H_1|H_2)_{1|1} \in [H_1 \odot H_2, \text{Ech}_2(H_1 \oplus H_2)].$$

Démonstration : La proposition 1 nous permet de prouver la première partie de l'inégalité. Par ailleurs, comme le produit de Hadamard \odot et le produit de convolution $*$ sont isotones (cf. propriété 2), on obtient

$$H_1 * u_1 \preceq (H_1 \oplus H_2) * u_1 \text{ et } H_2 * u_2 \preceq (H_1 \oplus H_2) * u_2.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} H(u) &= (H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2) \\ &\preceq [(H_1 \oplus H_2) * u_1] \odot [(H_1 \oplus H_2) * u_2]. \end{aligned}$$

Pour un routage 1|1, la proposition 4 nous indique que

$$\begin{aligned} (H_1 \oplus H_2) * u_1 \odot (H_1 \oplus H_2) * u_2 &= \\ \text{Ech}_2(H_1 \oplus H_2) * (u_1 \odot u_2) &= \text{Ech}_2(H_1 \oplus H_2) * u. \end{aligned}$$

□

Ce résultat concernant des systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires parallèles connectés « en ou » et pour lesquels la fonction de routage périodique est 1|1 montre que le comportement du système les englobant peut être encadré par celui de deux systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaires. Ce résultat se généralise également à n sous-systèmes.

Proposition 6: Soient n sous-systèmes H_i et une fonction de routage $r = 1|1|\dots|1$ associée, on a

$$\bigodot_{i=0}^n H_i \preceq (H_1|H_2|\dots|H_n)_{1|1|\dots|1} \preceq \text{Ech}_n\left(\bigoplus_{i=0}^n H_i\right),$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\begin{aligned} (H_0 \odot \dots \odot H_n) * u &\preceq (H_1|H_2|\dots|H_n)_{1|1|\dots|1}(u) \\ &\preceq \text{Ech}_n(H_0 \oplus \dots \oplus H_n) * u. \end{aligned}$$

B. Routages de type n/m

Définition 4 (Résiduabilité [10]) Une application isotone f définie sur un dioïde complet est dite « dualement résiduabilité » si pour tout b , $f(x) \succeq y$ a une plus petite⁸ solution notée $x' = f^b(y)$.

Proposition 7: L'application Ech_n est dualement résiduabilité et sa résiduabilité duale est définie comme suit :

$$\text{Ech}_n^b(x) = \lfloor x/n \rfloor.$$

Démonstration : Il suffit de remarquer que l'application Ech_n satisfait

$$\text{Ech}_n(a \wedge b) = \text{Ech}_n(a) \wedge \text{Ech}_n(b).$$

En d'autres termes, la borne inférieure de toutes les solutions de $\text{Ech}_n(x) \succeq y$ est nécessairement une solution, et c'est la plus petite selon la définition de la relation d'ordre canonique exprimée par la relation (1). En conséquence, Ech_n est dualement résiduabilité. □

Remarque 4: L'inégalité suivante est satisfaite

$$\text{Ech}_n(\text{Ech}_m^b(b)) \succeq b. \quad (2)$$

Proposition 8: Un système $H = (H_1|H_2)_{m|n}$ est tel que

$$H \in [H_1 \odot H_2, \text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(H_1) \oplus \text{Ech}_n^b(H_2))]. \quad (3)$$

Démonstration : Grâce à la proposition 4, on a les équivalences suivantes.

- Un système $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaire dont la réponse impulsionnelle est $\text{Ech}_m(H_1)$ est équivalent au système $\underbrace{(H_1|\dots|H_1)}_{m \text{ fois}} \underbrace{1|\dots|1}_{m \text{ fois}}$.
- De même, un système $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ linéaire $\text{Ech}_n(H_2)$ est équivalent au système $\underbrace{(H_2|\dots|H_2)}_{n \text{ fois}} \underbrace{1|\dots|1}_{n \text{ fois}}$.

Nous pouvons ainsi formuler l'équivalence suivante

$$\begin{aligned} (\text{Ech}_m(H_1)|\text{Ech}_n(H_2))_{m|n} &= \\ \underbrace{(H_1|\dots|H_1)}_{m \text{ fois}} \underbrace{(H_2|\dots|H_2)}_{n \text{ fois}} \underbrace{1|1|\dots|1}_{m+n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

En d'autres termes, on peut transformer un routage $m|n$ entre deux sous-systèmes en un routage $1|\dots|1$ avec $m+n$ sous-systèmes. En utilisant la remarque 2,

$$H_1 \preceq \text{Ech}_m(\text{Ech}_m^b(H_1)) \text{ et } H_2 \preceq \text{Ech}_n(\text{Ech}_n^b(H_2)).$$

En conséquence,

$$\begin{aligned} (H_1|H_2)_{m|n} &\preceq (\text{Ech}_m(\text{Ech}_m^b(H_1))|\text{Ech}_n(\text{Ech}_n^b(H_2)))_{m|n} = \\ \underbrace{(\text{Ech}_m^b(H_1)|\dots|\text{Ech}_m^b(H_1))}_{m \text{ fois}} \underbrace{(\text{Ech}_n^b(H_2)|\dots|\text{Ech}_n^b(H_2))}_{n \text{ fois}} \underbrace{1|1|\dots|1}_{m+n \text{ fois}}. \end{aligned}$$

La proposition 6 permet de terminer la démonstration. □

Définition 5 (Pente asymptotique) Soit $H \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ une fonction compteur ultimement périodique telle que $t > t_0$, $H(t) = N \otimes H(t - T)$. La *pente asymptotique* de H est notée $\sigma(H) = \frac{N}{T}$.

8. d'après l'ordre canonique défini sur $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$; « plus petit » ici est à utiliser au sens de « plus grand » selon l'ordre naturel

Dans le cadre de la gestion de production, cette notion correspond à la cadence.

Propriété 3: Soient $H_1, H_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{\mathbb{N}}$ deux fonctions ultimement périodiques. Alors

$$\sigma(H_1 \odot H_2) = \sigma(H_1) + \sigma(H_2).$$

Les GET sont toujours caractérisés par des comportements ultimement périodiques. Il est possible de choisir une fonction de routage $m|n$ telle que les bornes de l'intervalle (3) aient la même pente. La fonction de routage permet ainsi d'obtenir la meilleure cadence, tout en réduisant l'incertitude liée à la modélisation par intervalles.

En effet, en choisissant $r = \frac{m}{n}$ telle que $\frac{m}{n} = \frac{\sigma(H_1)}{\sigma(H_2)}$, on a

$$\sigma(\text{Ech}_m^b(H_1)) = \sigma(\text{Ech}_n^b(H_2)),$$

mais aussi

$$\sigma(H_1 \odot H_2) = \sigma(\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(H_1) \oplus \text{Ech}_n^b(H_2))).$$

C. Cas d'application

Considérons un atelier flexible possédant deux lignes de production parallèles $u_1 \rightarrow y_1$ et $u_2 \rightarrow y_2$ comme présentées dans la figure 4. Elles peuvent être décrites selon leurs réponses impulsionnelles dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[\delta]$ comme suit :

$$H_1(\delta) = \delta^4(2\delta^3)^* \quad H_2(\delta) = (\delta^5 \oplus 2\delta^6)(4\delta^4)^*.$$

Pour les deux sous-systèmes considérés, on a les cadences suivantes :

$$\sigma(H_1) = 2/3 \text{ et } \sigma(H_2) = 1.$$

En appliquant une fonction de routage $r = 2|3$, on garantit une cadence globale de $\sigma((H_1|H_2)_{2|3}) = \sigma(H_1) + \sigma(H_2) = 5/3$. Par suite, le comportement de l'atelier est inclus dans l'intervalle $[\underline{H}, \overline{H}] = [H_1 \odot H_2, \text{Ech}_5(\text{Ech}_2^b(H_1) \oplus \text{Ech}_3^b(H_2))]$. On en a déjà calculé la borne inférieure (cf. l'exemple 1) :

$$\underline{H} = H_1 \odot H_2 = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^*.$$

Par ailleurs,

$$\text{Ech}_2^b(H_1) = \delta^4(1\delta^3)^* \text{ et}$$

$$\text{Ech}_3^b(H_2) = (\delta^6 \oplus 1\delta^9 \oplus 2\delta^{13} \oplus 3\delta^{14})(4\delta^{12})^*.$$

Ainsi dans notre cas, $\text{Ech}_3^b(H_2) \succeq \text{Ech}_2^b(H_1)$, ce qui nous permet de calculer la borne supérieure de l'intervalle, à savoir

$$\overline{H} = \text{Ech}_5(\text{Ech}_3^b(H_2)) = (\delta^6 \oplus 5\delta^9 \oplus 10\delta^{13} \oplus 15\delta^{14})(20\delta^{12})^*.$$

VI. CONCLUSION

Grâce au dioïde des intervalles, tel que défini dans les travaux de Mehdi Lhommeau [6], certains systèmes ne présentant pas de linéarité dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ peuvent être décrits par un intervalle dont les bornes sont $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires. Cette approche permet d'utiliser les résultats de la théorie des dioïdes sur les bornes de tels intervalles, afin d'étudier les propriétés de ces systèmes.

Dans cet article, nous avons montré l'existence de deux systèmes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ linéaires permettant d'encadrer le comportement d'un système mono-entrée/mono-sortie composé de

plusieurs sous-systèmes parallèles en conflit sur la même entrée, à condition d'utiliser une fonction de routage *périodique* en amont de tous les sous-systèmes. Ces deux bornes correspondent à un comportement présentant une avance ou bien un retard par rapport au système étudié. Dans le cadre des systèmes de production, il est possible de choisir un routage tel que les systèmes représentés par les deux bornes de l'intervalle obtenu aient absolument les mêmes cadences.

La modélisation de sections en exclusion mutuelle dans le dioïde des intervalles a déjà été traitée dans un travail précédent [11]. À partir de la contribution de cet article, sous certaines conditions de périodicité, certaines classes d'ateliers flexibles peuvent désormais être modélisés formellement dans un dioïde. L'étape suivante est de joindre ces deux résultats dans une approche globale de modélisation et de l'éprouver sur un système incluant à la fois des sections d'exclusion mutuelle (typiquement une zone de convergence de deux lignes de production où les palettes ne peuvent pas se chevaucher) et des sections comportant un routage périodiquement (par exemple un point de divergence où les palettes sont aiguillées selon leurs contenus).

RÉFÉRENCES

- [1] François BACCELLI, Guy COHEN, Geert Jan OLSDER et Jean-Pierre QUADRAT : *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley and Sons, New York, 1992. Disponible à l'adresse cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BC0Q-book.pdf.
- [2] Raymond A. CUNINGHAME-GREEN : *Minimax algebra*, volume 166 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*. Springer-Verlag, 1979.
- [3] Guy COHEN, Pierre MOLLER, Jean-Pierre QUADRAT et Michel VIOT : Linear system theory for discrete event systems. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 539 – 544, Las Vegas, Nevada, États Unis d'Amérique, décembre 1984.
- [4] Michel GONDRAN et Michel MINOUX : Linear algebra in dioïds : a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19: 147–164, 1984.
- [5] René DAVID : Grafcet : A Powerful Tool for Specification of Logic Controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(3):253 – 268, 1995.
- [6] Mehdi LHOMMEAU, Laurent HARDOUIN, Bertrand COTTENCEAU et Luc JAULIN : Interval Analysis and Dioïd : Application to Robust Controller Design for Timed Event Graphs. *Automatica*, 40(11):1923 – 1930, novembre 2004.
- [7] Bernd HEIDERGOTT, Geert Jan OLSDER et Jacob van der WOUDE : *Max Plus at Work – Modeling and Analysis of Synchronized Systems : A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton University Press, 2005.
- [8] Laurent HARDOUIN : Outils de traitement de données manipulant les séries périodiques dans les dioïdes. www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html, 2006. Consulté le 9 octobre 2008.
- [9] Stéphane GAUBERT : Performance Evaluation of Timed Automata. RR-1922, INRIA, mai 1993. Disponible à l'adresse hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/07/47/52/PDF/RR-1922.pdf.
- [10] Thomas S. BLYTH et Melvin F. JANOWITZ : *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.
- [11] Olivier BOUTIN, Bertrand COTTENCEAU et Anne L'ANTON : Dealing with Mutual Exclusion Sections in Production Systems : from Shared Resources to Parallel TEG's. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, IFAC'08*, Séoul, Corée du Sud, juillet 2008.