

Une nouvelle structure d’observateurs non linéaires basée sur les modes glissants

Vincent Brégeault, Franck Plestan

IRCCyN - Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France
{Vincent.Bregeault,Franck.Plestan}@ircyn.ec-nantes.fr

Résumé— Cet article présente une solution originale pour l’observation de systèmes non linéaires incertains. L’observateur utilise des outils basés sur les modes glissants d’ordre supérieur, ses principales caractéristiques étant la maîtrise de temps de convergence (exactement connu *a priori*), sa robustesse face aux incertitudes, et un *chattering* limité.

Mots-clés— observation, non linéaire, modes glissants, convergence en temps fini.

I. INTRODUCTION

L’observation robuste de systèmes non linéaires est un problème important de l’automatique moderne. Elle permet entre autres la conception de lois de commandes performantes (qui nécessitent généralement la connaissance de tout l’état) et le diagnostic en temps réel. Une approche classique se base sur la théorie des modes glissants dont les propriétés principales sont la robustesse vis à vis des incertitudes et variations de paramètres, son principal défaut étant le *chattering*. Le concept de modes glissants d’ordre supérieur permet, en plus d’assurer une convergence en temps fini, de réduire le *chattering* et d’améliorer la précision. Ces caractéristiques sont cruciales pour certaines applications comme par exemple l’estimation de la posture d’un robot bipède [LAPF08b]. Dans un tel contexte, la robustesse et la convergence en temps fini sont nécessaires en raison des incertitudes du robot et de son caractère périodique et impulsif. Ainsi, la convergence en temps fini de l’observateur permet de s’assurer que la posture est bien estimée *avant* la fin d’un pas et de prouver formellement la stabilité du système en boucle fermée.

Alors que les observateurs pour les systèmes linéaires incertains ont été étudiés de manière assez complète [ES98], [UGJ99], [FLD07], le problème pour les systèmes non linéaires reste ouvert bien qu’il existe déjà des approches basées sur les modes glissants. Un point commun de la plupart des solutions est que leur conception requiert une transformation du système sous sa forme canonique d’observabilité ou du moins sous une forme triangulaire. Une approche

dite *step-by-step* (pas à pas) a été proposée dans [BB98]. Le terme correctif basé sur l’algorithme du *twisting* assure la convergence en temps fini de l’erreur d’estimation vers 0. L’idée fondamentale de cet observateur de systèmes triangulaires est de s’assurer de la convergence de chaque variable d’état l’une après l’autre, mais le nombre élevée de ses paramètres rend son réglage relativement fastidieux. Un observateur hiérarchique [BFP07] reprenant le même principe mais basé sur l’algorithme du *super twisting* a également été appliqué aux robots bipèdes [LAP07]. Dans [FSEXG08], [LAPF08a], les observateurs utilisent des dérivateurs à convergence en temps fini [Lev03]. Comme les précédents, ils sont basés sur la forme canonique d’observabilité alors que le but est d’obtenir l’état sous la forme originelle. Il faut donc exprimer l’état de la forme canonique sous la forme originale. Il y a pour ce faire deux possibilités : soit multiplier le terme de correction par l’inverse de la matrice jacobienne, soit calculer la transformation d’état inverse. En pratique [LAP07], [LAPF08a], ce dernier calcul est souvent difficile voire impossible analytiquement, ce qui explique la préférence générale pour la première solution. De plus, les précédentes stratégies d’observation prennent rarement en compte des perturbations et incertitudes non coïncidentes (*unmatched*). La plupart des observateurs robustes basés sur d’autres principes que les modes glissants requièrent au moins autant de capteurs que de perturbations [AS01], ou n’acceptent que des perturbations dont la structure est connue à l’avance [CC07].

Le présent article propose une nouvelle structure d’observateur basée sur les modes glissants pour laquelle l’effet des incertitudes et perturbations non coïncidentes est étudié. Cette structure, en particulier le terme de correction, est basé sur un régulateur par modes glissants d’ordre supérieur récent [PGL08] dont les caractéristiques principales sont le temps de convergence fini et connu *a priori*, une méthode constructive de réglage des paramètres, une robustesse vis à vis des perturbations et une atténuation du *chattering*. Elle permet aussi une unification des approches de conception de la commande et de l’obser-

vateur. En résumé, les principales propriétés de cette nouvelle classe d'observateurs sont

- le temps de convergence fini et connu *a priori*,
- l'estimation de l'état sans calcul analytique d'une transformée d'état inverse, ce qui la rend applicable à une large classe de systèmes non linéaires incertains,
- l'atténuation de l'amplitude du *chattering*.

La Section II rappelle quelques notions de base et pose le problème d'observation. La Section III présente les différentes structures d'observateur dont les conditions de convergence sont étudiées dans la Section IV pour le cas d'un mode glissant idéal (fréquence d'échantillonnage infinie), et dans la Section V pour le cas d'un mode glissant réel (fréquence d'échantillonnage finie). Un exemple inspiré d'un modèle de moteur à courant continu série est présenté dans la dernière section.

II. RAPPELS ET POSITION DU PROBLÈME

Considérons le système non linéaire monovarié incertain¹

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + \Delta_x \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (1)$$

avec $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ l'état et $y \in \mathbb{R}$ la sortie mesurée. f est le système nominal et Δ_x un terme inconnu mais suffisamment différentiable. La sortie y est considérée comme étant parfaitement mesurée, mais le modèle dynamique (1) est mal connu, car sujet à la perturbation Δ_x . Ce dernier représente donc à la fois les incertitudes du modèle et d'éventuelles entrées inconnues. Définissons le système nominal de (1) comme suit

$$\begin{aligned} \dot{x}_N &= f(x_N) \\ y_N &= h(x_N) \end{aligned} \quad (2)$$

où x_N est le vecteur d'état et y_N la sortie.

A. Forme canonique d'observabilité

Hypothèse II.1: Le système (2) est génériquement observable. ■

Cette hypothèse permet d'écrire le système nominal (2) sous la forme canonique d'observabilité. Soit la transformation d'état G

$$z_N = \begin{bmatrix} h(x_N) \\ L_{f(x_N)} h(x_N) \\ \vdots \\ L_{f(x_N)}^{(n-2)} h(x_N) \\ L_{f(x_N)}^{(n-1)} h(x_N) \end{bmatrix} = G(x_N) \quad (3)$$

¹Dans un souci de clarté, le système (1) est supposé autonome et monovarié.

La dynamique du système nominal s'écrit

$$\dot{z}_N = J(z_N) \cdot f(G^{-1}(z_N)) \quad (4)$$

avec $J(\cdot)$, la matrice jacobienne de G définie comme

$$J(z_N) = \frac{\partial G}{\partial x_N}(x_N) = \frac{\partial G}{\partial G^{-1}(z_N)}(G^{-1}(z_N)) \quad (5)$$

est une matrice de rang plein grâce à l'Hypothèse II.1. Intéressons nous maintenant au système 1.

Hypothèse II.2: Les incertitudes et perturbations Δ_x ne dégradent pas l'observabilité du système (2). Le système (1) est donc lui aussi observable. ■

La seule information disponible de ce système est la sortie y dont on peut calculer les dérivées successives, ce qui donne

$$z = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

En utilisant la connaissance du système nominal, posons $x^* = G^{-1}(z)$. Dans le cas où il n'y a ni incertitude, ni perturbation, on a $x^* = x_N$.

La forme canonique d'observabilité du système (1) s'écrit

$$\dot{z} = A z + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(z) \end{bmatrix} + \Delta_z \quad (6)$$

$$y = C z = z_1$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\psi_N(z) = L_{f(x^*)}^{(n)} h(x^*)$ et

$$\Delta_z = \dot{z} - A G(x^*) - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(z) \end{bmatrix},$$

le terme d'incertitudes regroupant l'ensemble des erreurs du modèle et des perturbations externes.

Par définition de z et de la matrice A , Δ_z est de

la forme $\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \delta_z \end{bmatrix}$. Cela signifie que la perturbation Δ_{x^*} dans le système

$$\begin{aligned} \dot{x}^* &= f(x^*) + \Delta_{x^*} \\ y &= h(x^*) \end{aligned} \quad (7)$$

est coïncidente (*matched*). Un régulateur par modes glissants peut donc compenser exactement Δ_{x^*} .

B. Problème

L'objectif de cet article est de proposer une nouvelle structure d'observateur convergeant en temps fini dans un voisinage de x^* malgré les incertitudes et perturbations, et ne requérant aucune transformation d'état. Un algorithme par modes glissants dérivé de [PGL08] sera employé pour assurer une convergence en temps fini.

III. STRUCTURE DE L'OBSERVATEUR

L'observateur présenté se compose de

- un dérivateur à convergence en temps fini [Lev03] permettant de calculer les dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ de l'erreur d'estimation de la sortie,
- un terme de correction scalaire w calculé suivant un algorithme de modes glissants [PGL08] en fonction uniquement de l'erreur d'estimation de la sortie et de ses dérivées,
- une recopie du modèle du système nominal, vu comme un système commandé par w dont la sortie \hat{y} doit suivre la trajectoire de référence y .

Ainsi, l'observateur se présente sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}} &= A \hat{z} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(\hat{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ \hat{y} &= \hat{z}_1 \end{aligned} \quad (8)$$

avec $\hat{z} = [\hat{z}_1 \ \hat{z}_2 \ \dots \ \hat{z}_n]^T$. Comme l'objectif final est l'estimation de l'état x^* , l'observateur précédent doit être écrit dans l'espace original

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= f(\hat{x}) + \hat{J}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ \hat{y} &= h(\hat{x}) \end{aligned} \quad (9)$$

avec l'estimation de la matrice jacobienne $\hat{J} = \frac{\partial G}{\partial \hat{x}}$.

A. Dérivateur multiple

Le dérivateur multiple doit fournir au correcteur une estimation de l'erreur d'estimation de la sortie et de ses dérivées $e_z = z - \hat{z}$. Pour ce faire, il y a 2 méthodes possibles

- **Dérivées de la différence** (Figure 1). la sortie réelle y est comparée avec celle de l'estimateur \hat{y} , la différence étant dérivée $n - 1$ fois,

- **Différence des dérivées** (Figure 2). la sortie du système réelle est dérivée $n - 1$ fois, ce qui donne z qui est comparé à \hat{z} .

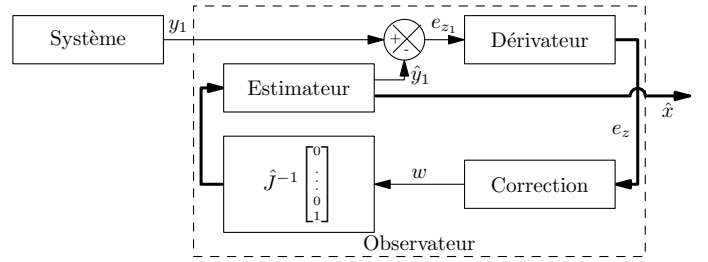


Fig. 1. Observateur type “Dérivées de la différence”.

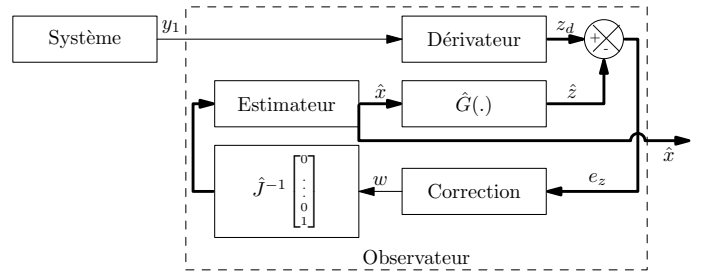


Fig. 2. Observateur type “Différence des dérivées”.

La dérivation successive des grandeurs dans les deux structures précédentes est ici réalisée via un dérivateur par modes glissants d'ordre supérieur homogène [Lev03]

$$\begin{aligned} \dot{z}_0 &= z_1 - \lambda_{00} L^{\frac{1}{n+1}} |z_0 - g(t)|^{\frac{n}{n+1}} \text{sign}(z_0 - g(t)) \\ &\vdots \\ \dot{z}_i &= z_{i+1} - \lambda_{0i} L^{\frac{1}{n+1-i}} |z_i - \dot{z}_{i-1}|^{\frac{n-i}{n+1-i}} \text{sign}(z_i - \dot{z}_{i-1}) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= -\lambda_{0n} L \text{sign}(z_n - \dot{z}_{n-1}) \end{aligned} \quad (10)$$

avec $g(t)$ le signal à dériver, z_i la dérivée d'ordre i du signal $g(t)$, les coefficients $\lambda_{0n}, \dots, \lambda_{00}$ choisis d'après [FLD07] ou [Lev03], et L un majorant de la constante de Lipschitz de la dérivée d'ordre $n - 1$ du signal $g(t)$.

B. Terme de correction w

Le terme de correction w se base sur un régulateur par modes glissants [PGL08] assurant la convergence de l'erreur d'estimation $e_z = [e_{z1} \ e_{z2} \ \dots \ e_{zn}]^T$ à 0 en un temps fini t_F connu *a priori*, grâce à des trajectoires précalculées. Soient la *variable de commutation* σ et la *surface de glissement* \mathcal{S} définies par

$$\begin{aligned} \sigma &= [\sigma_1 \sigma_2 \ \dots \ \sigma_n]^T = e_z - e_{z,ref}(t) \\ \mathcal{S} &= \{x \in \mathcal{X} | \sigma = 0\} \end{aligned} \quad (11)$$

avec les trajectoires précalculées

$$e_{z,ref}(t) = [e_{z1,ref}(t) \ e_{z2,ref}(t) \ \dots \ e_{zn,ref}(t)]^T$$

définies par

$$\begin{aligned}\sigma(t=0) = 0 &\Rightarrow e_{z,ref}(0) = e_z(0) \\ \sigma(t \geq t_F) = 0 &\Rightarrow e_{z,ref}(t \geq t_F) = 0\end{aligned}\quad (12)$$

Le terme de correction w a l'expression

$$w = \alpha \text{sign}(\sigma_n + \lambda_{n-1}\sigma_{n-1} + \dots + \lambda_1\sigma_1) \quad (13)$$

avec les coefficients λ_i choisis tels que $P(s) = s^{(n-1)} + \lambda_{n-1}s^{(n-2)} + \dots + \lambda_1$ (s est une variable complexe) soit Hurwitz et α , le gain, doit être suffisamment grand pour que le système (6) reste sur \mathcal{S} en dépit des incertitudes et perturbations. Étant donnée la définition de $e_{z,ref}(t)$, $e_z(t \geq t_F) = 0$.

IV. CONVERGENCE DANS LE CAS D'UN MODE GLISSANT IDÉAL

Les preuves de la convergence de l'observateur reposent sur la *méthode de la commande équivalente* proposée dans [UGJ99], [Utk92]. Cette méthode consiste à poser la commande équivalente w_{eq} comme la valeur moyenne du signal w , et à s'assurer qu'elle permette de compenser les incertitudes coïncidentes (*matched perturbations*) à tout instant. Dans cette section, on suppose également que

- la fréquence d'échantillonnage est infinie, ce qui implique que la commutation de w a lieu instantanément, sans retard,
- l'erreur de mesure de la sortie est nulle (y est parfaitement connu).

Définition IV.1: L'observateur (8) a convergé au temps t_F si $e_z(t) = 0 \forall t \geq t_F$. ■

Remarque 1: Dans ce cas, $e_x = 0$, car $\hat{z} = z$, $\hat{z} = G(\hat{x})$, $z = G(x^*)$ et $G(\cdot)$ est inversible. ■

La dynamique de l'erreur $\sigma = e_z - e_{z,ref}$ s'écrit

$$\dot{\sigma} = A\sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \psi_N(z) - \psi_N(\hat{z}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \dot{e}_{z_n,ref} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ w \end{bmatrix} \quad (14)$$

Grâce au choix de la trajectoire, on a $\sigma(t=0) = 0$: la commande équivalente w_{eq} doit juste compenser $\psi_N(z) - \psi_N(\hat{z})$, Δ_z and $\dot{e}_{z_n,ref}$ pour maintenir l'erreur sur la trajectoire de référence :

$$w_{eq} = -(\psi_N(z) - \psi_N(\hat{z}) + \Delta_z - \dot{e}_{z_n,ref}) \quad (15)$$

Hypothèse IV.1: Les fonctions ψ_N , Δ_z et $\dot{e}_{z_n,ref}$ sont telles que

$$|\psi_N| \leq C_N, \quad |\Delta_z| \leq C_U, \quad |\dot{e}_{z_n,ref}| \leq \theta.$$

Theorème 1: Considérons le système (6) avec l'Hypothèse IV.1 satisfaite. Le système (8)-(13)-(10) est un observateur à convergence en le temps fini t_F , de (6) si

$$\alpha > 2C_N + C_U + \theta \quad (16)$$

et si la constante de Lipschitz du dérivateur multiple (10) est telle que

- $L > 2C_N + C_U + \alpha$ pour l'observateur type "dérivées de la différence",
- $L > C_N + C_U$ pour l'observateur type "différence des dérivées". ■

Preuve. L'amplitude de w doit être suffisante pour que w_{eq} puisse compenser $\psi_N(z) - \psi_N(\hat{z}) + \Delta_z - \dot{e}_{z_n,ref}$ à tout instant. Un majorant de la valeur absolue de cette expression est $2C_N + C_U + \theta$ d'après l'hypothèse IV.1.

Pour la configuration "dérivées de la différence", le signal à dériver est e_{z_1} . Sa dérivée d'ordre le plus élevé est e_{z_n} , dont la constante de Lipschitz est un majorant de $|\dot{e}_{z_n}|$, qui est $2C_N + C_U + \alpha$. Pour la configuration "différence des dérivées", le signal à dériver est $y = z_1$. Sa dérive d'ordre le plus élevé est z_n , dont la constante de Lipschitz est $C_N + C_U$. Si la constante de Lipschitz du dérivateur multiple est choisie suffisamment grande en accord avec les valeurs précédentes, le dérivateur converge en temps fini d'après [Lev03]. À ce moment là, le correcteur par modes glissants maintient l'erreur e_z sur la trajectoire de référence $e_{z,ref}(t)$ à condition qu' α respect la condition ci dessus. La trajectoire précalculée emmène finalement e_z en l'origine en temps fini. L'observateur (8)-(13)-(10) a alors convergé vers le système (6). ■

Comme $\psi_N(z) - \psi_N(\hat{z}) = \dot{e}_{z_n,ref} = 0$ une fois que l'observateur a convergé (donc pour $t \geq t_F$), il est possible de réduire l'amplitude du différentiateur et du correcteur, ce qui réduit le *chattering*.

Theorème 2: Considérons le système non linéaire incertain (6) avec l'Hypothèse IV.1 satisfaite. Le système (8)-(13)-(10) est un observateur à convergence en le temps fini t_F , de (6) si

$$\begin{aligned}\alpha &> 2C_N + C_U + \theta \quad \text{for } 0 \leq t < t_F, \\ \alpha &> C_U \quad \text{for } t \geq t_F,\end{aligned}\quad (17)$$

et si la constante de Lipschitz du dérivateur multiple (10) est telle que

- Observateur type "Dérivées de la différence"
 - $L > 2C_N + C_U + \alpha$ pour $0 \leq t < t_F$,
 - $L > C_U + \alpha$ pour $t \geq t_F$,
- Observateur type "Différence des dérivées"
 - $L > C_N + C_U$ pour $0 \leq t < t_F$,
 - $L > C_N + C_U$ pour $t \geq t_F$. ■

La preuve de ce théorème est basée sur la même démarche que celle du théorème précédent. Seuls les

majorants de $|\dot{\sigma}_n|$ et de $|\dot{e}_{z_n}|$ ont changé.

V. MODE GLISSANT RÉEL ET ERREUR RÉSIDUELLE

Dans cette section, on suppose que la fréquence d'échantillonnage est finie et que la mesure est connue de façon incertaine, *i.e.* il existe un réel ϵ tel que

$$y \in y_{reel} + [-\epsilon, \epsilon]$$

avec y_{reel} la valeur réelle de la mesure et y la valeur mesurée.

Theorème 3: Il existe des constantes a_i et b_i avec $i \in \mathcal{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$ telles que l'erreur d'estimation de chaque variable d'état du système (6) vérifie $|e_{z_i}| < a_i \sqrt[n]{\epsilon}$, et telles que l'erreur d'estimation de chaque variable d'état du système vérifie (1) $|e_{x_i}| < b_i \sqrt[n]{\epsilon}$ ■

Preuve. Soit $e_d = e_z - e_{z_d}$ l'erreur engendrée par le dérivateur. A noter qu'elle est équivalente quelque soit le type de l'observateur (voir Figures (1)-(2)). D'après [Lev03], il existe n constantes d_i ($i \in \mathcal{N}$ tel que $1 \leq i \leq n$) telles que $|e_{d_i}| \leq d_i \epsilon^{\frac{n+1-i}{n}}$ pour ϵ suffisamment petit.

En tenant compte de l'erreur de dérivation, le terme de correction s'écrit

$$w = \alpha \text{sign}(\sigma_n + \lambda_{n-1}\sigma_{n-1} + \dots + \lambda_1\sigma_1 + \lambda e_d)$$

où $\lambda e_d = e_{d_n} + \lambda_{n-1}e_{d_{n-1}} + \dots + \lambda_1e_{d_1}$. Etant donné que $\lambda_i e_{d_i} = \mathcal{O}\left(\epsilon^{\frac{n+1-i}{n}}\right)$, on a pour ϵ suffisamment petit

$$\|\lambda e_d\| \leq C \sqrt[n]{\epsilon} \Rightarrow \lambda e_d = \mathcal{O}(\sqrt[n]{\epsilon}).$$

w ayant toujours la "bonne" valeur en dehors de la bande de largeur $2C \sqrt[n]{\epsilon}$ centrée sur l'hyperplan défini par le correcteur, l'erreur de différentiation n'a donc aucun effet à l'extérieur de cette bande. En revanche, à l'intérieur, l'erreur de différentiation peut induire une "mauvaise" correction ($+\alpha$ au lieu de $-\alpha$ ou inversement). La précision à l'intérieur de la bande n'est donc pas garantie. De plus, le régulateur présente une précision en $\mathcal{O}(\sqrt[n]{\epsilon})$ en l'absence d'erreur de dérivation. La précision globale du correcteur réel est donc en $\mathcal{O}(\sqrt[n]{\epsilon})$, autrement dit, il existe n constantes a_i telles que $|e_{z_i}| < a_i \sqrt[n]{\epsilon}$. Comme $x^* = G^{-1}(z)$ et $x^* + e_x = G^{-1}(z + e_z)$,

$$e_x = G^{-1}(z + e_z) - G^{-1}(z) \Rightarrow \|e_x\| = L_{G^{-1}} \|e_z\|$$

avec $L_{G^{-1}}$ la constante de Lipschitz de G^{-1} . Comme la norme 2 et la norme ∞ sont équivalentes, il existe n constantes b_i telles que $|e_{x_i}| < b_i \sqrt[n]{\epsilon}$. ■

VI. EXEMPLE ACADÉMIQUE

Prenons un exemple inspiré d'un moteur à courant continu série dont la saturation magnétique est

négligée [Ple95], [Chi94]. Il est régi par le système d'équations

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1 x_1 x_2 - k_2 x_1 + u \\ \dot{x}_2 &= -k_3 x_2 - x_3 + k_4 x_1^2 \\ \dot{x}_3 &= 0 + \Delta_x \end{aligned}$$

où $[x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ est l'état du système, et $u = 100$. Les paramètres sont fixés à $k_1 = 0.043$, $k_2 = 0.227$, $k_3 = 0.033$, $k_4 = 0.13$, l'état initial du système à $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 40$ et $x_3(0) = 100$ et son état estimé à $\hat{x}_1(0) = x_1(0) = 10$, $\hat{x}_2(0) = 50$ et $\hat{x}_3(0) = 120$. La sortie mesurée est $y = x_1$, le système est observable pour $x_1 \neq 0$, ce qui est le cas dans cet exemple. À $t = 5s$, une perturbation coïncidente (*matched*) d'amplitude $\Delta_x = 1000$ pendant 0.1s fait passer x_3 de 100 à 200. Pour les conditions considérées dans cet exemple, on peut prendre $C_N = 1200$ et $C_U = 300$ comme majorants.

La trajectoire de référence est calculée suivant [PGL08] pour $t_F = 2s$ et a pour majorant $\theta = 300$. On choisit une configuration "Différence des dérivées" avec $L = 1200$, et $\alpha = 3000$ pour la phase de convergence ($t \leq t_F$), puis $\alpha = 300$ pour $t > t_F$. Le terme de correction est donc

$$w = -\alpha \text{sign} \left[\left(e_{z,3} - \ddot{e}_{z_{1,ref}}(t) \right) + \lambda_2 \left(e_{z,2} - \dot{e}_{z_{1,ref}}(t) \right) + \lambda_1 \left(e_{z,1} - e_{z_{1,ref}}(t) \right) \right]$$

avec $\lambda_1 = 400$, $\lambda_2 = 120$. Comme on le voit sur la figure 3, les états estimés convergent vers les états réels en $t_F = 2s$ en dépit des perturbations sur x_3 .

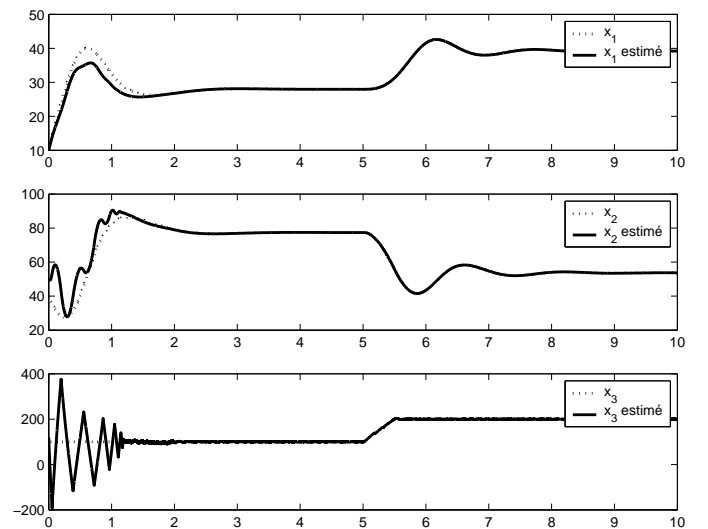


Fig. 3. **Haut-** x_1 (pointillés) et \hat{x}_1 en fonction du temps (s). **Milieu-** x_2 (pointillés) et \hat{x}_2 en fonction du temps (s). **Bas-** x_3 (pointillés) et \hat{x}_3 en fonction du temps (s).

VII. CONCLUSION

Un observateur à convergence en temps fini connu *a priori* pour une large classe de systèmes non linéaires incertains est présenté. Il est constitué d'un modèle nominal du système, corrigé par un terme calculé à partir de la sortie et de ses dérivées. L'utilisation d'un correcteur et d'un dérivateur par modes glissants d'ordre supérieur assure la convergence en temps fini de l'observateur en dépit des incertitudes et perturbations. Cette convergence dans le cas idéal est formellement établie, et l'erreur résiduelle est quantifiée dans le cas réel (fréquence d'échantillonnage finie, ...). Un exemple démontre la faisabilité de la mise en œuvre de ce type d'observateur, ainsi que ses performances de convergence en temps fini et sa robustesse.

RÉFÉRENCES

- [AS01] K. Uchida, A. Kojima and E. Shimemura. Sliding mode observer for nonlinear uncertain systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(12) :2012–2017, Dec. 2001.
- [BB98] T. Boukhobza and J.-P. Barbot. High order sliding modes observer. In *IEEE Conf. on Decision and Control CDC*, Tampa, Florida, USA, 1998.
- [BFP07] F.J. Bejarano, L. Fridman, and A. Poznyak. Output integral sliding mode control based on algebraic hierarchical observer. *International Journal of Control*, 80(3) :443–453, 2007.
- [CC07] M. Chen and C. Chen. Robust nonlinear observer for lipschitz nonlinear systems subject to disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(12) :2365–2369, 2007.
- [Chi94] J. Chiasson. Nonlinear differential-geometric techniques for control of a series dc motor. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2(1) :35–42, 1994.
- [ES98] C. Edwards and S.K. Spurgeon. *Sliding mode control : theory and applications*. Taylor & Francis, London, 1998.
- [FLD07] L. Fridman, A. Levant, and J. Davila. Observation of linear systems with unknown inputs via high-order sliding-modes. *International Journal of Systems Science*, 38(10) :773–791, 2007.
- [FSEXG08] L. Fridman, Y. Shtessel, C. Edwards, and Y. Xing-Gang. Higher-order sliding-mode observer for state estimation and input reconstruction in nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18 :399–412, 2008.
- [LAP07] V. Lebastard, Y. Aoustin, and F. Plestan. Observer-based control of a walking biped robot : stability analysis. In *IEEE Conference on Decision and Control CDC*, New-Orleans, Louisiana, USA, 2007.
- [LAPF08a] V. Lebastard, Y. Aoustin, F. Plestan, and L. Fridman. An alternative to the measurement of five-links biped robot absolute orientation : estimation based on high order sliding mode. In G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano, and E. E. Usai, editors, *Modern Sliding Mode Control Theory : New Perspectives and Applications. Volume 375 of Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 363–380, Springer, Berlin, 2008.
- [LAPF08b] Vincent Lebastard, Yannick Aoustin, Franck Plestan, and Leonid Fridman. An alternative to the measurement of five-links biped robot absolute orientation : estimation based on high order sliding mode. In G. Bartolini, L. Fridman, A. Pisano, and E. Usai E, editors, *Modern Sliding Mode Control Theory : New Perspectives and Applications. Volume 375 of Lecture Notes in Control and Information Sciences*, pages 363–380, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [Lev03] A. Levant. Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control. *International Journal of Control*, 76 :924–941, 2003.
- [PGL08] F. Plestan, A. Glumineau, and S. Laghrouche. A new algorithm for high-order sliding mode control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 18 :441–453, 2008.
- [Ple95] F. Plestan. *Linéarisation par injection d'entrée-sortie généralisée et synthèse d'observateur*. PhD thesis, Ecole Centrale de Nantes, France, Oct. 1995.
- [UGJ99] V. Utkin, J. Guldner, and S. Jingxin. *Sliding Mode Control in Electromechanical Systems*. Systems and Control. Taylor & Francis, London, 1999.
- [Utk92] V. Utkin. *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer, Berlin, 1992.