

Estimation des paramètres d'un système multivariable à partir de modèles d'ordre réduit

Wafa FARAH¹, Guillaume MERCERE¹, Thierry POINOT¹

¹Université de Poitiers

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle

Ecole Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers, 40, avenue du recteur Pineau 86022 Poitiers, France

wafa.farah@etu.univ-poitiers.fr, guillaume.mercere@univ-poitiers.fr,
Thierry.Poinot@univ-poitiers.fr
<http://lail.univ-poitiers.fr/>

Résumé—Dans cette communication, nous présentons une technique d'estimation des paramètres physiques d'un système multivariable grâce à un modèle d'ordre réduit. Lors de l'identification des paramètres de ce modèle, un biais dû à l'erreur de modélisation apparaît. Pour remédier à ce problème, une méthode de réjection du biais est appliquée en approchant l'erreur de modélisation par un ensemble de modèles de type boîte noire. Cette méthodologie est une extension au cas multivariable de la méthode proposée dans [1]. Les performances de cette approche sont mises en évidence à l'aide d'un exemple de simulation.

Mots-clés—Identification, système multivariable, erreur de modélisation, modèle d'ordre réduit, moments temporels et fréquentiels, réjection du biais.

I. INTRODUCTION

Dans le domaine de l'automatique, le choix de la structure et du type de représentation (à temps continu ou à temps discret) d'un modèle est fortement lié au système et à l'application souhaitée par l'utilisateur. On peut décrire un procédé par un modèle dont les paramètres sont déterminés en les ajustant aux données mesurées sans chercher à refléter la réalité physique du système. On parle alors de modèles de type boîte noire. Ce type de représentation peut être utilisée pour élaborer une loi de commande [2], [3]. Lorsque l'on souhaite avoir un modèle dont les paramètres ont un sens physique, il est préférable d'utiliser un modèle de type boîte blanche à temps continu. Il est cependant illusoire de vouloir représenter un phénomène physique à l'aide d'un modèle exact. On utilise alors un modèle de type boîte grise [4], si possible linéaire, que l'on peut caractériser de modèle réduit. Ce modèle d'ordre réduit est une représentation simplifiée des phénomènes mis en jeu dans un domaine fréquentiel restreint. Aussi, dans cette situation, il apparaît une erreur de modélisation (EM) qui peut être importante et souvent prépondérante devant l'erreur de mesure liée aux perturbations agissant sur le processus. Les paramètres estimés à l'aide du modèle d'ordre réduit peuvent alors différer notablement des valeurs exactes. L'erreur de modélisation crée un véritable biais dépendant de l'excitation [5].

Pour remédier à ce problème, plusieurs travaux de recherche ont été développés. Une première solution consiste à augmenter la complexité du modèle. Cette démarche a pour inconvénient de nécessiter l'emploi de routines d'optimisation plus difficiles à mettre en œuvre et conduit généralement à des paramètres dont la variance croit fortement [6][7][8][9]. Une deuxième solution consiste à introduire de la connaissance *a priori* [10] afin de ré-

duire le biais d'estimation en utilisant toute connaissance initiale telles que les valeurs nominales, la précision, ... Des travaux récents [11] cherchent à reproduire la dynamique du système réel par un modèle d'ordre réduit (de complexité réduite), tout en modélisant l'EM, inhérente à cette approximation, à l'aide d'un modèle de type boîte noire non concurrent du modèle d'ordre réduit, autrement dit un modèle qui explique ce qui n'est pas pris en compte par le modèle d'ordre réduit.

Dans cet article, nous allons étendre cette méthodologie au cas multivariable. Plus particulièrement un modèle multivariable va être considéré pour décrire le modèle d'ordre réduit et des modèles de type boîte noire pour modéliser l'EM.

Dans le cas général, la plupart des modèles sont des modèles non linéaires par rapport aux paramètres (NLP). Pour estimer les paramètres de tels modèles, nous utilisons des algorithmes d'identification basés sur la minimisation d'un critère quadratique par approche de type erreur de sortie [12].

Le plan de cette communication est le suivant. Dans la Section II, nous introduisons la problématique et les principales notations utilisées au sein de cet article. Dans la Section III, nous analysons le biais dû à l'EM. Par la suite (Section IV), nous nous intéressons à la réjection de ce biais en caractérisant l'EM par un modèle de type boîte noire en lui imposant des contraintes de non concurrence avec le modèle d'ordre réduit. Dans la Section V, nous présentons un algorithme d'identification estimant les paramètres du modèle d'ordre réduit en tenant compte des contraintes de non concurrence. La Section VI est consacrée à la validation, sur des données de simulation, de cette méthode d'estimation de paramètres physiques.

II. PROBLÉMATIQUE ET NOTATIONS

Considérons un système réel continu multivariable d'ordre inconnu, modélisable comme suit

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}} = g(\underline{x}, \underline{\theta}, \underline{u}) \\ \underline{y} = f(\underline{x}, \underline{\theta}, \underline{u}) \\ \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \end{cases} \quad (1)$$

où \underline{x} est le vecteur d'état, \underline{u} est le vecteur d'entrée, \underline{y} est le vecteur de sortie, f et g sont des fonctions non linéaires et $\underline{\theta}$ représente le vecteur des paramètres du système. En pratique, la structure du système réel multivariable étant généralement très complexe, d'ordre relativement élevé, voire infini, des modèles

d'ordre réduit caractérisés par le vecteur paramètres $\underline{\theta}_r$, sont traditionnellement employés pour modéliser le comportement du procédé. La relation d'entrée sortie de tels modèles peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} Y_r^1(s) \\ \vdots \\ Y_r^{n_y}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_r^{11}(s) & \cdots & H_r^{1n_u}(s) \\ \vdots & & \vdots \\ H_r^{n_y1}(s) & \cdots & H_r^{n_y n_u}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^1(s) \\ \vdots \\ U^{n_u}(s) \end{bmatrix} \quad (2)$$

où $H_r^{ij}(s)$, $i \in [1, n_y]$ et $j \in [1, n_u]$, est la transmittance du modèle d'ordre réduit entre la sortie i et l'entrée j et s est la variable de Laplace.

Lors de l'estimation des paramètres des modèles d'ordre réduit, un biais apparaît. Ce dernier peut être répertorié selon deux catégories. La première cause de biais sur les estimées est liée à la présence de bruits sur les mesures d'entrée et/ou sortie. La seconde, nommée erreur de modélisation, est inhérente aux erreurs de structure lors du choix du modèle représentant le comportement du procédé. Dans la suite de cet article, le problème du biais dû aux perturbations est omis¹ afin de focaliser l'attention sur l'EM qui est, dans certaines situations, prépondérante devant l'erreur de mesure.

On peut écrire, pour tout $i \in [1, n_y]$

$$\begin{aligned} Y^i(s) &= Y_r^i(s) + Y_m^i(s) \\ &= \sum_{j=1}^{n_u} H_r^{ij}(s)U^j(s) + \sum_{j=1}^{n_u} H_m^{ij}(s)U^j(s) \end{aligned} \quad (3)$$

où $H_m^{ij}(s)$ est le modèle de l'EM. Dans cette communication, nous essayons d'estimer les paramètres $\underline{\theta}_r$ du modèle d'ordre réduit et d'identifier l'EM en appliquant une technique de réjection de biais.

III. ESTIMATION DES PARAMÈTRES DES MODÈLES D'ORDRE RÉDUIT

A. Estimation des modèles d'ordre réduit

On suppose disposer de K couples de données expérimentales $\{u^j(k), y^i(k)\}$, $k \in [1, K]$, $j \in [1, n_u]$ et $i \in [1, n_y]$. On souhaite dans un premier temps estimer $\underline{\theta}_r$. Une approche classique consiste à minimiser le critère quadratique

$$J(\underline{\theta}_r) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(k, \underline{\theta}) - y_r^i(k, \underline{\theta}_r))^2 = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (\varepsilon^i(k))^2 \quad (4)$$

où $\underline{\theta}$ représente le vecteur paramètres du système réel et y_r^i est la sortie i du modèle d'ordre réduit.

Deux catégories d'algorithmes d'identification peuvent être utilisés pour minimiser ce critère : les algorithmes d'identification à erreur d'équation et les algorithmes d'identification à erreur de sortie. Les algorithmes à erreur d'équation ne sont utilisables qu'avec des modèles LP. Puisque la plupart des modèles sont des modèles NLP, nous préférons utiliser un algorithme d'identification à erreur de sortie [13] malgré le volume de calculs qu'il nécessite. Pour estimer les paramètres d'un modèle NLP, une technique d'optimisation non linéaire doit être utilisée [14]. Plusieurs choix sont possibles [15]. Le notre s'est porté sur l'algorithme de Marquardt [13] qui réalise un compromis stabilité/vitesse de convergence entre la technique du gradient et celle

de Newton. A l'itération $l + 1$ nous avons plus particulièrement

$$\underline{\theta}_{r_{l+1}} = \underline{\theta}_{r_l} - [J''(\underline{\theta}_{r_l}) + \mu I_d]^{-1} J'(\underline{\theta}_{r_l}) \quad (5)$$

avec

$$J'(\underline{\theta}_{r_l}) = -2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} \varepsilon^i(k) \sigma^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) \text{ le gradient,}$$

$$J''(\underline{\theta}_{r_l}) \approx 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} \sigma^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) \sigma^i(k, \underline{\theta}_{r_l})^T \text{ le hessien approché,}$$

$$\underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) = \frac{\partial y^i(k, \underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}_{r_l}} \forall i \in [1, n_y]$$

où I_d est la matrice d'identité et μ est un paramètre de réglage. Cet algorithme, grâce au réglage du paramètre μ , permet d'évoluer entre une technique de Gradient loin de l'optimum ($\mu \rightarrow \infty$) et une technique de Newton ($\mu \rightarrow 0$) qui conduit à accélérer la convergence de l'algorithme au voisinage de l'optimum [10].

B. Erreur de modélisation

En utilisant l'algorithme de Marquardt, l'équation de l'erreur d'estimation est donnée par

$$\Delta \underline{\theta}_r = \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} \underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) \underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l})^T \right)^{-1} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^{n_y} \underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) y_m^i(k) \right). \quad (6)$$

Cette relation montre que l'erreur d'estimation dépend directement de $y_m^i(k)$. Il est aisé de vérifier qu'asymptotiquement

$$\left[\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \left(\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} \underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) \underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l})^T \right) \right] \Delta \underline{\theta}_{r_\infty} = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left(\sum_{i=1}^{n_y} \underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_{r_l}) y_m^i(k) \right). \quad (7)$$

Cette erreur est asymptotiquement nulle si $\underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_r)$ n'est pas corrélé avec $y_m^i(k)$. Or, $\underline{\sigma}^i(k, \underline{\theta}_r)$ et $y_m^i(k)$ sont tous les deux corrélés avec u_k^i . L'estimateur de $\underline{\theta}_r$ est donc asymptotiquement biaisé. Pour éliminer ce biais, nous proposons d'approcher l'EM par un ensemble de modèles de type boîte noire.

IV. RÉJECTION DU BIAIS DÛ À L'ERREUR DE MODÉLISATION

Au paragraphe précédent, il a été montré qu'un biais créé par l'EM apparaît lors de l'estimation des paramètres du modèle d'ordre réduit. Pour réduire ce biais, il est possible de mettre au point une technique de réjection de biais basée sur la caractérisation de l'EM à l'aide d'un modèle boîte noire, en imposant des contraintes pour ne pas concurrencer l'explication du comportement du modèle d'ordre réduit. Pour des raisons de simplicité, nous choisissons des modèles LP de type FIR pour décrire cette EM [9].

A. Modèle étendu prenant en compte l'erreur de modélisation

Pour identifier l'EM, nous imposons à $H_m^{ij}(s)$ une structure particulière de type boîte noire, notée dans la suite de cet article²

¹Des bruits de mesure en sortie de type bruit blanc Gaussien seront néanmoins ajoutés dans l'exemple de simulation (Section VI).

²Le changement de notation est utilisé pour insister sur un choix particulier de structure.

$G_m^{ij}(s)$. Définissons le modèle étendu

$$\begin{aligned} Y_e^i(s) &= \sum_{j=1}^{n_u} [H_r^{ij}(s)U^j(s) + G_m^{ij}(s)U^j(s)] \\ &= Y_r^i(s) + \sum_{j=1}^{n_u} Y_g^{ij}(s) \quad \forall i \in [1, n_y] \end{aligned} \quad (8)$$

où $Y_g^{ij}(s) = G_m^{ij}(s)U^j(s)$. Pour estimer les paramètres du modèle étendu, le critère à minimiser s'écrit

$$\begin{aligned} J_e(\underline{\theta}_e) &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(k, \underline{\theta}) - y_e^i(k, \underline{\theta}_e))^2 \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(k, \underline{\theta}) - y_r^i(k, \underline{\theta}_r) - \sum_{j=1}^{n_u} y_g^{ij}(k, \underline{\theta}_g))^2 \end{aligned} \quad (9)$$

avec

$$\underline{\theta}_e^T = \begin{bmatrix} \underline{\theta}_r^T & \underline{\theta}_g^T \end{bmatrix}.$$

Certains travaux de recherche décrivent le modèle de l'EM à l'aide de fonctions de Laguerre [16]. Néanmoins, l'utilisation de ce type de fonction présente un problème si l'EM a un caractère oscillant amorti. La qualité de l'approximation dépend en effet du choix du pôle de Laguerre. Nous proposons dans cette communication un modèle FIR, où le coefficient de réglage est le nombre de paramètres du modèle FIR [9]. Le modèle FIR est défini comme suit

$$y_g^{ij}(k, \underline{\theta}_g) = \underline{\varphi}_g^j(k)^T \underline{\theta}_g^{ij} \quad (10)$$

avec

$$\underline{\varphi}_g^j(k) = [u^j(k-1) \cdots u^j(k-I_{ij})]^T \quad (11)$$

$$\underline{\theta}_g^T = [g_1^{ij} \cdots g_{I_{ij}}^{ij}] \quad (12)$$

où I_{ij} représente le nombre de paramètres du modèle FIR pour une sortie i et une entrée j . Pour simplifier les calculs, nous supposons que tous les modèles $H_r^{ij}(s)$ et $G_m^{ij}(s)$ ont respectivement le même nombre de paramètres N et $I = I_{ij}$.

B. Contrainte de non concurrence par les moments

Généralement $H_r^{ij}(s)$ est une approximation basses fréquences du système réel et $H_m^{ij}(s)$ représente réciproquement une contribution hautes fréquences. Dans certains cas, on considère au contraire que $H_r^{ij}(s)$ représente une approximation hautes fréquences du système réel $H^{ij}(s)$ et $H_m^{ij}(s)$ décrit un comportement basses fréquences.

Afin que le modèle de l'EM ne reproduise pas le comportement du modèle d'ordre réduit, nous imposons des contraintes de non concurrence entre ces deux modèles. Pour cela, on va utiliser un outil mathématique bien adapté à la définition de ces contraintes : la méthode des moments. Nous utilisons les moments temporels [17] lorsque $H_r^{ij}(s)$ a un comportement basses fréquences et les moments fréquentiels [18] dans le cas contraire.

B.1 Rappel de la méthode des moments

Soit un système de réponse impulsionnelle $h(t)$ et de transmittance

$$H(s) = L\{h(t)\}. \quad (13)$$

Le développement en série de Taylor de $H(s)$ au voisinage de $s_0 = j\omega_0$ vaut

$$H_{Tay}(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (j\omega - j\omega_0)^n A_{n, j\omega_0}(h(t)) \quad (14)$$

avec

$$A_{n, \omega_0}(h(t)) = \int_0^{\infty} \frac{(t)^n}{n!} \exp^{-j\omega_0 t} h(t) dt. \quad (15)$$

Les coefficients $A_{n, \omega_0}(h(t))$ représentent les moments fréquentiels de $h(t)$ lorsque $\omega_0 \neq 0$ et les moments temporels dans le cas où $\omega_0 = 0$. $H_{Tay}(j\omega) \rightarrow H(j\omega)$ dans le rayon de convergence de la série [5]. Les premiers moments peuvent être utilisés pour caractériser l'approximation fréquentielle ou temporelle entre deux fonctions de transfert, autour de $\omega = \omega_0$.

B.2 Expression des contraintes en basses fréquences ($\omega_0 = 0$)

Plaçons-nous dans le cas où le modèle $H_r^{ij}(j\omega)$ est une approximation basses fréquences de $H^{ij}(j\omega)$. Alors

$$\begin{cases} H_r^{ij}(j\omega) \rightarrow H^{ij}(j\omega) \\ G_m^{ij}(j\omega) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0. \quad (16)$$

A l'aide des premiers moments temporels, on peut quantifier l'approximation (16) par

$$\begin{cases} A_n(h_r^{ij}(t)) \rightarrow A_n(h^{ij}(t)) \\ A_n(g_m^{ij}(t)) \rightarrow 0 \end{cases} \text{ lorsque } \omega \rightarrow 0 \quad (17)$$

pour $n = 0$ à $N - 1$. Si la condition (17) est vérifiée, g_m^{ij} et h_r^{ij} sont non concurrents dans l'explication du comportement de h^{ij} grâce aux N contraintes sur les paramètres du modèle boîte noire. D'après l'expression des moments temporels (17) et en utilisant une intégration approchée du type rectangle, on peut écrire [18]

$$A_n(g_m^{ij}) = \sum_{k=0}^{K-1} C_{nk} g_k^{ij} \quad \text{avec} \quad C_{n,k} = \frac{(T_e)^{n+1}}{n!} k^n \quad (18)$$

où T_e est la période d'échantillonnage et g^{ij} sont les coefficients de la réponse impulsionnelle g_m^{ij} . On détermine les contraintes en exprimant le fait que les moments temporels de g_m^{ij} sont nuls. Cela permet de développer l'expression (18) comme suit

$$C_{n,1} g_1^{ij} + C_{n,2} g_2^{ij} + \dots + C_{n,i} g_i^{ij} + \dots + C_{n,I} g_I^{ij} = 0 \quad (19)$$

avec n variant de 0 à $N - 1$. $\underline{\theta}_g^{ij}$ peut être représenté de la façon suivante

$$\underline{\theta}_g^{ij} = \begin{bmatrix} g_{c,j}^{ij} \\ \underline{g}_{id}^{ij} \end{bmatrix} \quad (20)$$

avec $\underline{g}_c^{ij} = [g_1^{ij} \ \dots \ g_N^{ij}]^T$ paramètres contraints et $\underline{g}_{id}^{ij} = [g_{N+1}^{ij} \ \dots \ g_I^{ij}]^T$ paramètres indépendants. Le développement de l'équation (19) pour $n \in [0, N-1]$ nous donne

$$= - \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,1} & \dots & C_{0,N} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N-1,1} & \dots & C_{N-1,N} \end{bmatrix}}_E \underbrace{\begin{bmatrix} g_1^{ij} \\ \vdots \\ g_N^{ij} \end{bmatrix}}_{\underline{g}_c^{ij}} - \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,N+1} & \dots & C_{0,I} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N-1,N+1} & \dots & C_{N-1,I} \end{bmatrix}}_F \underbrace{\begin{bmatrix} g_{N+1}^{ij} \\ \vdots \\ g_I^{ij} \end{bmatrix}}_{\underline{g}_{id}^{ij}} \quad (21)$$

ce qui permet d'écrire

$$\begin{bmatrix} E & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{g}_c^{ij} \\ \underline{g}_{id}^{ij} \end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \underline{g}_c^{ij} = -E^{-1}F\underline{g}_{id}^{ij} \quad (22)$$

E étant une matrice carrée inversible $\in \mathbb{R}^{N \times N}$. Posons

$$\underline{\varphi}_c^j(k)^T = [u^j(k-1) \ \dots \ u^j(k-N)] \quad (23)$$

$$\underline{\varphi}_{id}^j(k)^T = [u^j(k-N-1) \ \dots \ u^j(k-I)]. \quad (24)$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} y_g^{ij}(k) &= \underline{\varphi}_c^j(k)^T \underline{g}_c^{ij} + \underline{\varphi}_{id}^j(k)^T \underline{g}_{id}^{ij} \\ &= [\underline{\varphi}_{id}^j(k)^T - \underline{\varphi}_c^j(k)^T E^{-1}F] \underline{g}_{id}^{ij}. \end{aligned} \quad (25)$$

La sortie du modèle de type boîte noire s'écrit finalement

$$y_g^{ij}(k) = \underline{\psi}_{id}^j(k)^T \underline{g}_{id}^{ij} \quad (26)$$

$$\underline{\psi}_{id}^j(k)^T = \underline{\varphi}_{id}^j(k)^T - \underline{\varphi}_c^j(k)^T E^{-1}F. \quad (27)$$

B.3 Expression des contraintes en hautes fréquences ($\omega_o \neq 0$)

Grâce aux moments fréquentiels, on peut généraliser la formulation des contraintes au cas où le modèle d'ordre réduit $H_r(j\omega)$ coïncide avec le système en hautes fréquences, c'est-à-dire au voisinage de $\omega = \omega_o$. A l'aide des premiers moments fréquentiels, on obtient la quantification de l'approximation hautes fréquences par

$$A_{n,\omega_o}(h_r^{ij}(t)) \stackrel{\omega \rightarrow \omega_o}{\approx} A_{n,\omega_o}(h^{ij}(t)) \quad \text{pour } n = 0 \text{ à } N-1$$

et réciproquement pour le modèle boîte noire

$$A_{n,\omega_o}(g_m^{ij}(t)) \stackrel{\omega \rightarrow \omega_o}{\approx} 0 \quad \text{pour } n = 0 \text{ à } N-1$$

avec [1]

$$\begin{aligned} A_{n,\omega_o}(g_m^{ij}(t)) &\approx \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(kT_e)^n}{n!} \cos(\omega_o k T_e) g_k^{ij} T_e \\ &\quad - j \sum_{k=0}^{K-1} \frac{(kT_e)^n}{n!} \sin(\omega_o k T_e) g_k^{ij} T_e. \end{aligned} \quad (28)$$

Dans ces conditions d'approximation, g_m^{ij} est non concurrent de h_r^{ij} grâce aux $N_c = 2N$ contraintes sur les paramètres du modèle FIR. On impose deux fois plus de contraintes que dans le

cas basses fréquences car on doit annuler les parties réelle et imaginaire des moments fréquentiels. En nous référant à la démarche de calcul relative aux moments temporels, nous obtenons

$$= - \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,1} & \dots & C_{0,N_c} \\ S_{0,1} & \dots & S_{0,N_c} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N_c-1,1} & \dots & C_{N_c-1,N_c} \\ S_{N_c-1,1} & \dots & S_{N_c-1,N_c} \end{bmatrix}}_{\tilde{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_1^{ij} \\ \vdots \\ g_{N_c}^{ij} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{g}}_c^{ij}} - \underbrace{\begin{bmatrix} C_{0,N_c+1} & \dots & C_{0,I} \\ S_{0,N_c+1} & \dots & S_{0,I} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{N_c-1,N_c+1} & \dots & C_{N_c-1,I} \\ S_{N_c-1,N_c+1} & \dots & S_{N_c-1,I} \end{bmatrix}}_{\tilde{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} g_{N_c+1}^{ij} \\ \vdots \\ g_I^{ij} \end{bmatrix}}_{\tilde{\underline{g}}_{id}^{ij}} \quad (29)$$

avec

$$C_{n,k} = k^n \cos(\omega_o k T_e) \quad (30)$$

$$S_{n,k} = k^n \sin(\omega_o k T_e) \quad (31)$$

ce qui permet d'écrire

$$\tilde{E} \tilde{\underline{g}}_c^{ij} = -\tilde{F} \tilde{\underline{g}}_{id}^{ij} \quad (32)$$

avec \tilde{E} une matrice carrée $\in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$ et $\tilde{\underline{g}}_c^{ij}$ un vecteur de dimension N_c . Alors

$$\tilde{\underline{g}}_c^{ij} = -\tilde{E}^{-1} \tilde{F} \tilde{\underline{g}}_{id}^{ij}. \quad (33)$$

En définissant

$$\underline{\varphi}_g^j = \begin{bmatrix} \underline{\varphi}_c^j \\ \underline{\varphi}_{id}^j \end{bmatrix} \quad (34)$$

avec

$$\underline{\varphi}_c^j(k)^T = [u^j(k-1) \ \dots \ u^j(k-N_c)] \quad (35)$$

$$\underline{\varphi}_{id}^j(k)^T = [u^j(k-N_c-1) \ \dots \ u^j(k-I)] \quad (36)$$

on obtient

$$y_g^{ij}(k) = \underline{\varphi}_g^j(k)^T \underline{\theta}_g^{ij}. \quad (37)$$

Or, on a décomposé $\underline{\varphi}_g^j(k)$ et $\underline{\theta}_g^{ij}$ de l'équation (37), ce qui permet d'écrire

$$y_g^{ij}(k) = \tilde{\underline{\varphi}}_c^j(k)^T \tilde{\underline{g}}_c^{ij} + \tilde{\underline{\varphi}}_{id}^j(k)^T \tilde{\underline{g}}_{id}^{ij}. \quad (38)$$

A partir de l'expression de $\tilde{\underline{g}}_c^{ij}$, on exprime $y_g^{ij}(k)$ en fonction des paramètres contraints, soit

$$y_g^{ij}(k) = [\tilde{\underline{\varphi}}_{id}^j(k)^T - \tilde{\underline{\varphi}}_c^j(k)^T \tilde{E}^{-1} \tilde{F}] \tilde{\underline{g}}_{id}^{ij}. \quad (39)$$

On pose

$$\tilde{\underline{\psi}}_{id}^j(k)^T = \tilde{\underline{\varphi}}_{id}^j(k)^T - \tilde{\underline{\varphi}}_c^j(k)^T \tilde{E}^{-1} \tilde{F}. \quad (40)$$

La nouvelle expression de la sortie $y_g^{ij}(k)$ s'écrit alors

$$y_g^{ij}(k) = \tilde{\underline{\psi}}_{id}^j(k)^T \tilde{\underline{g}}_{id}^{ij}. \quad (41)$$

Remarque : Les expressions sont équivalentes à celles obtenues avec les moments temporels. Toutefois, les matrices \tilde{E} , \tilde{F} et les vecteurs $\tilde{\underline{g}}_c^{ij}$ et $\tilde{\underline{g}}_{id}^{ij}$ ont des dimensions différentes.

V. ALGORITHME D'IDENTIFICATION

Dans la Section IV, nous avons modélisé notre système par un modèle d'ordre réduit NLP et un modèle boîte noire qui permet d'estimer l'EM. En appliquant un algorithme à erreur de sortie, nous aurons un nombre important de paramètres à identifier. Nous allons alors récrire l'algorithme d'identification afin d'estimer les paramètres du modèle d'ordre réduit et d'identifier implicitement les paramètres du modèle boîte noire. Dans cette partie, nous allons présenter un algorithme d'identification qui permet d'estimer directement les paramètres du modèle d'ordre réduit et implicitement les paramètres du modèle FIR. Le critère quadratique à minimiser s'écrit

$$J_e(\underline{\theta}_e) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(k) - y_e^i(k, \underline{\theta}_e))^2. \quad (42)$$

Le modèle étendu $y_e^i(k, \underline{\theta})$ est composé de deux parties : une LP et une autre NLP

$$y_e^i(k, \underline{\theta}_e) = \underbrace{y_r^i(k, \underline{\theta}_r)}_{NLP} + \sum_{j=1}^{n_u} \underbrace{y_g^{ij}(k, \underline{g}_{id}^{ij})}_{LP}. \quad (43)$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_u} y_g^{ij}(k, \underline{g}_{id}^{ij}) &= \underline{\psi}_{id}^1(k)^T \underline{g}_{id}^{i1} + \dots + \underline{\psi}_{id}^{n_u}(k)^T \underline{g}_{id}^{in_u} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\psi}_{id}^1(k)^T & \dots & \underline{\psi}_{id}^{n_u}(k)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{g}_{id}^{i1} \\ \vdots \\ \underline{g}_{id}^{in_u} \end{bmatrix} \\ &= \Psi(k)^T \underline{g}_{id}^i. \end{aligned} \quad (44)$$

Définissons $\check{y}^i(k) = y^i(k) - y_r^i(k)$, alors le critère (42) devient

$$\bar{J}_e(\underline{g}_{id}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (\check{y}^i(k) - \Psi(k)^T \underline{g}_{id}^i)^2. \quad (45)$$

Les paramètres \underline{g}_{id}^i peuvent être estimés par l'algorithme des moindres carrés

$$\hat{\underline{g}}_{id_{MC}}^i = R^{-1} \sum_{k=1}^K \Psi(k)^T \check{y}^i(k) \quad (46)$$

$$\text{où } R = \sum_{k=1}^K \Psi(k)\Psi(k)^T. \quad (47)$$

A partir de l'estimation de $\hat{\underline{g}}_{id}^i$, nous pouvons reformuler le critère (42)

$$\begin{aligned} \bar{J}_e(\hat{\underline{\theta}}_r) &= \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(k) - \hat{y}_r^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r) - \Psi(k)^T R^{-1} \\ &\quad \sum_{k=1}^K \Psi(k)(y^i(k) - \hat{y}_r^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r)))^2. \end{aligned} \quad (48)$$

On remarque bien que ce critère dépend seulement de $\hat{\underline{\theta}}_r$. Les paramètres $\hat{\underline{g}}_{id}^i$ sont estimés implicitement.

$$\begin{aligned} \text{Posons } \hat{y}_e^i(k) &= \hat{y}_r^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r) + \Psi(k)^T R^{-1} \\ &\quad \sum_{k=1}^K \Psi(k)(y^i(k) - \hat{y}_r^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r)). \end{aligned} \quad (49)$$

Les fonctions de sensibilité du modèle étendu s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_e^i(k) &= \frac{\partial \hat{y}_e^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r)}{\partial \hat{\underline{\theta}}_r} = \underline{\sigma}_r^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r) - \\ &\quad \Psi(k)^T R^{-1} \sum_{k=1}^K \Psi(k) \underline{\sigma}_r^i(k, \hat{\underline{\theta}}_r). \end{aligned} \quad (50)$$

Ainsi, nous pouvons écrire le gradient et le hessien

$$\bar{J}'_e(\hat{\underline{\theta}}_{r_l}) = -2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} (y^i(k) - \hat{y}_e^i(k)) \sigma_e^i(k, \hat{\underline{\theta}}_{r_l}) \quad (51)$$

$$\bar{J}''_e(\hat{\underline{\theta}}_{r_l}) \approx 2 \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_y} \sigma_e^i(k, \hat{\underline{\theta}}_{r_l}) \sigma_e^i(k, \hat{\underline{\theta}}_{r_l})^T. \quad (52)$$

On minimise ensuite \bar{J}_e par un algorithme de PNL tel que celui de Marquardt [13]

$$\hat{\underline{\theta}}_{r_{l+1}} = \hat{\underline{\theta}}_{r_l} - [\bar{J}''_e(\hat{\underline{\theta}}_{r_l}) + \mu I_d]^{-1} \bar{J}'_e(\hat{\underline{\theta}}_{r_l}). \quad (53)$$

VI. SIMULATION NUMÉRIQUE

Afin d'illustrer les propriétés de la méthodologie décrite précédemment, nous allons considérer un système multivariable à deux entrées et une sortie

$$\begin{aligned} Y^1(s) &= \frac{1}{0.001s^3 + 0.107s^2 + 0.71s + 1} U^1(s) \\ &\quad + \frac{1}{0.0012s^3 + 0.127s^2 + 0.71s + 1} U^2(s) \\ &= H^{11}(s)U^1(s) + H^{12}(s)U^2(s) \end{aligned} \quad (54)$$

où les pôles de $H^{11}(s)$ sont $s_1^{11} = -2$, $s_2^{11} = -5$ et $s_3^{11} = -100$ et de $H^{12}(s)$ sont $s_1^{12} = -2.5$, $s_2^{12} = -3.33$ et $s_3^{12} = -100$. En basses fréquences, nous pouvons négliger l'influence des pôles s_3^{11} et s_3^{12} sur le comportement du système. On obtient alors le modèle d'ordre réduit suivant

$$\begin{aligned} Y_r^1(s) &= \frac{1}{0.1s^2 + 0.7s + 1} U^1(s) \\ &\quad + \frac{1}{0.12s^2 + 0.7s + 1} U^2(s) \end{aligned} \quad (56)$$

ainsi que le vecteur paramètres correspondant

$$\theta_r^T = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3] = [0.1 \ 0.7 \ 0.12 \ 0.7]. \quad (57)$$

Pour identifier les paramètres du modèle d'ordre réduit, on va appliquer deux excitations différentes de type S.B.P.A et de période d'échantillonnage $T_e = 5ms$. En supposant que la sortie du système soit perturbée par un bruit blanc de rapport Signal sur Bruit (variance du signal/variance du bruit) de 10 et en appliquant dans un premier temps l'algorithme d'identification décrit dans la Section III, nous calculons les valeurs moyennes des paramètres estimés (en faisant 300 tirages de Monte Carlo)

Paramètres	Valeurs estimées	Ecart type
a_0	0.1119	0.0340
a_1	0.7278	0.0713
a_2	0.1220	0.0322
a_3	0.7134	0.0821

TABLE I
ESTIMATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE D'ORDRE RÉDUIT SEUL

D'après le Tableau I, on remarque bien l'existence d'un biais. Afin de réduire l'EM, on associe deux modèles FIR, de longueur I au modèle d'ordre réduit. On introduit deux contraintes sur chaque paramètre g^1 et g^2 de FIR (puisque l'on a quatre paramètres à estimer) afin que les moments $A_0(g^1), A_1(g^1)$ et $A_0(g^2), A_1(g^2)$ soient nuls.

La Figure 1 représente les différentes estimations de θ_r et de l'écart type en fonction de la longueur I du FIR.

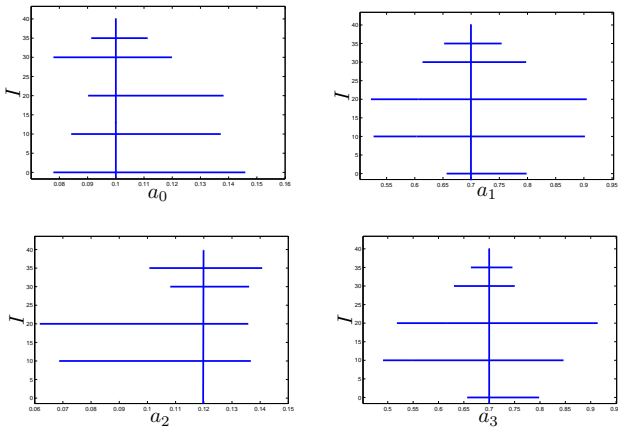


Fig. 1. Estimation des paramètres du modèle étendu

Le biais sur l'estimation des paramètres décroît lorsque I augmente. Le modèle FIR permet de diminuer le biais dû à l'EM. D'après la Figure 2, nous vérifions que le modèle d'ordre réduit explique la dynamique du système en basses fréquences, tandis que le modèle étendu permet d'approcher le comportement fréquentiel du système sur une bande plus large.

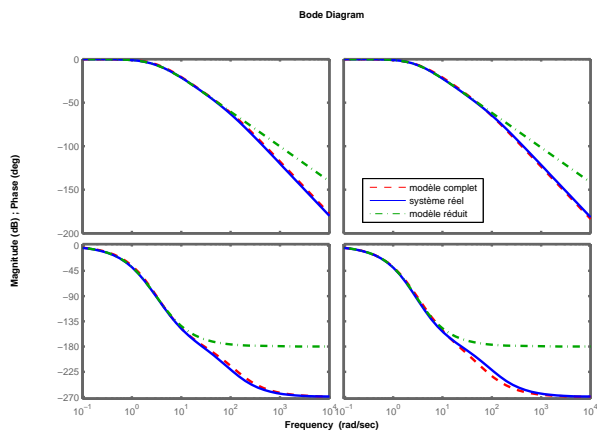


Fig. 2. Signal de sortie du système réel, modèle réduit et modèle étendu

VII. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons présenté une méthodologie d'estimation des paramètres physiques d'un système multivariable à l'aide de modèles d'ordre réduit. Une technique de réjection du biais est appliquée afin de minimiser l'EM. Pour éviter la concurrence entre les modèles d'ordre réduit et les modèles de l'EM, on a dû exprimer des contraintes de concurrence entre modèles d'ordre réduit et modèles d'erreur. La minimisation d'un critère quadratique prenant en compte un modèle étendu du système est obtenu grâce à une technique évitant la

minimisation explicite par rapport au vecteur des paramètres du modèle étendu.

Pour illustrer les performances de cette technique, nous avons appliqué cette méthodologie en simulation à un système multivariable. On constate que la méthodologie proposée permet d'estimer sans biais les paramètres des modèles d'ordre réduit. Les paramètres des modèles de l'EM, non estimés explicitement, peuvent l'être *a posteriori* si on souhaite définir une borne de cette EM dans un objectif de commande, par exemple.

L'approche par fonction de transfert peut s'avérer limitée lorsque le nombre d'entrées et de sorties augmente fortement. La suite de ce travail portera sur la modélisation du système à l'aide de représentations d'état. La forme d'état permettra d'adopter une technique minimisant la norme H_∞ en lieu et place de la méthode de moment.

RÉFÉRENCES

- [1] C. Baron, *Contribution à l'estimation de paramètres physiques à l'aide du modèles d'ordre réduit*. PhD thesis, Université de Poitiers, December 2003.
- [2] L. Ljung, *System identification : theory for the user*. Prentice Hall, 1999.
- [3] X. Bombois, *Connecting prediction error identification and robust control analysis : a new framework*. PhD thesis, Université catholique de Louvain Faculté des sciences appliquées, November 2000.
- [4] T. Bohlin and S. Graebe, "Issues in non-linear stochastic grey-box identification," in *the 10 IFAC Symposium on System Identification*, (Denmark), July 1994.
- [5] C. Baron, T. Poinot, and J.-C. Trigeassou, "Estimation de paramètres physiques à l'aide de modèles d'ordre réduit : Application à un système électromécanique," *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, July 2002.
- [6] E. Bai, "Adaptive quantification of model uncertainties by rational approximation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36(4), pp. 441–453, 1991.
- [7] H. Hjalmarsson and L. Ljung, "Estimating model variance in the case of undermodeling," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37(7), pp. 1004–1008, 1992.
- [8] T. Poinot, J.-C. Trigeassou, and E. Lenger, "Estimation paramétrique d'un système continu avec quantification des erreurs de variances et de modélisation," in *Automatique Génie Informatique, Image et Signal*, (Angers, France), pp. 33–40, December 1997.
- [9] G. Goodwin, M. Gevers, and B. Ninness, "Quantifying the error in estimated transfer functions with application to model order selection," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 37(7), pp. 913–928, 1992.
- [10] J.-C. Trigeassou and T. Poinot, *Identification des systèmes*, ch. Identification des systèmes à représentation continue, pp. 177–211. Sous la direction de I. D. Landau and A. B. Voda, Paris : Hermes science publication, 2001.
- [11] C. Baron, T. Poinot, J.-C. Trigeassou, and O. Bachelier, "Physical parameter estimation using reduced order models," *Methods and Models in Automation and Robotics*, vol. 1, pp. 445–450, 2002.
- [12] E. Walter and L. Pronzato, *Identification de modèles paramétriques à partir de données expérimentales*. Masson, 1994.
- [13] D. W. Marquardt, "An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11, pp. 431–441, 1963.
- [14] E. Walter and L. Pronzato, *Identification of parametric models from experimental data. Communications and Control Engineering Series*. Springer, 1997.
- [15] D. M. Himmelblau, *Applied non linear programming*. Mc Graw Hill, 1972.
- [16] B. Wahlberg, "System identification using laguerre model," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 36(5), pp. 551–562, 1991.
- [17] J.-C. Trigeassou, "La méthode des moments en automatique," *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, pp. 705–711, July 2000. Lille, France.
- [18] T. Poinot, "Contribution à l'identification des systèmes à représentation continue et des systèmes fractionnaires." HDR, Poitiers, France, November 2005.