

Approximation convexe de systèmes ($\max, +$)-linéaires

Euriell LE CORRONC¹, Bertrand COTTENCEAU¹,
Laurent HARDOUIN¹,

¹ Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés
62, Avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France

euriell.lecorronc@etud.univ-angers.fr, bertrand.cottenceau@univ-angers.fr,
laurent.hardouin@univ-angers.fr

Résumé— Dans le cadre de la théorie des systèmes ($\max, +$)-linéaires, ce document considère la transformée de Legendre-Fenchel afin d'obtenir une approximation convexe par valeur supérieure des séries périodiques représentatives de Systèmes à Événements Discrets. Les algorithmes permettant la manipulation de ces séries à travers une forme canonique sont de complexité linéaire en la taille des séries.

Mots-clés— Systèmes à Événements Discrets, algèbre ($\max, +$), transformée de Legendre-Fenchel, séries formelles périodiques, dioïde, semi-anneau idempotent.

I. INTRODUCTION

Les Systèmes à Événements Discrets (SED) sujets à des phénomènes de synchronisation et de délai peuvent être décrits par des modèles linéaires grâce à l'utilisation d'une structure algébrique particulière appelée *dioïde* ou encore *semi-anneau idempotent*. Cette approche, analogue à la théorie conventionnelle en automatique classique, est appelée théorie des systèmes ($\max, +$)-linéaires (théorie détaillée dans les ouvrages [1] et [2]). Ses applications vont des systèmes de production aux réseaux informatiques ([3]), en passant par les réseaux de transport ([2] et [4]) et permettent par exemple d'accéder à la commande de ces systèmes (toujours en analogie avec l'automatique classique) ou de réaliser de l'analyse de performance (calcul du taux de production).

Grâce aux avancées dans ce domaine, il existe aujourd'hui des outils informatiques, tels que la librairie MinMaxGD créée par le LISA ([5]) ou la bibliothèque de calcul pour le Network Calculus ([6]), permettant de représenter ces systèmes linéaires sous forme de séries périodiques. Dès lors que des phénomènes transitoires importants se font jour comme présenté dans l'application au réseau ferroviaire allemand [2, Chap8], certaines manipulations réalisées par ces outils, dont les algorithmes sont issus des rapports [7], [8] et [9], sont coûteuses en temps de calcul et en occupation de mémoire. Le cas échéant, il est important de pouvoir compter sur des modèles alternatifs.

L'objectif à long terme de ce travail consiste donc en la recherche de représentations approchées de séries périodiques dont les représentations informatiques auront pour

intérêt d'occuper moins d'espace mémoire et pour lesquelles les algorithmes seront également plus efficaces. Il est par exemple possible, à l'instar des calculs par intervalle ([10]), d'envisager une représentation de type « conteneur » : une série périodique serait alors encadrée par deux représentations plus simples à manipuler.

Une première étape de cette approche est proposée dans ce document. En effet, grâce à l'utilisation de la transformée de Legendre-Fenchel ([11]), il est possible d'obtenir une approximation par valeur supérieure d'une série périodique, telle que soient réduites à la fois :

- la taille des données manipulées,
- la complexité des algorithmes.

Cette transformée n'étant pas injective, donc non inversible, il est ici question d'approximation. En revanche, de par ses caractéristiques, la transformée de Legendre-Fenchel conduit à ne manipuler que des séries convexes, affines par morceaux et ultimement affines, pour lesquelles les algorithmes sont particulièrement efficaces, algorithmes de complexité linéaire en la taille des séries.

Afin de présenter ce travail, la section II introduit tout d'abord certains outils algébriques nécessaires à l'étude des Systèmes à Événements Discrets dans les dioïdes, ainsi que la modélisation de ces systèmes grâce à l'utilisation du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Ensuite, dans la section III, le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, construit en quotientant $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la transformée de Legendre-Fenchel, est présenté. Les algorithmes manipulant une forme canonique des séries périodiques appartenant à ce dioïde sont également fournis.

II. PRÉLIMINAIRES ALGÈBRIQUES

Cette section a pour but de présenter de manière informelle quelques définitions, propriétés et théories nécessaires à l'utilisation de la structure algébrique particulière appelée *dioïde* ou encore *semi-anneau idempotent*. Le lecteur intéressé est invité à parcourir les références suivantes : [1], [12], [9], [4] et [13].

A. Théorie des dioïdes

Définition 1 (Dioïde, [1, §4.2]). Un dioïde (ou semi-anneau idempotent) est un ensemble $\mathcal{D}$ muni de deux lois

notées $\oplus$ et $\otimes$. La somme $\oplus$ est associative, commutative, idempotente ($\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$) et d'élément neutre ε . Le produit $\otimes$ est quant à lui associatif, distributif à gauche et à droite par rapport à l'addition et d'élément neutre e . De plus, ε est l'élément absorbant de la loi $\otimes$.

Exemple 1 (Dioïdes $\mathbb{Z}_{max}$ et $\mathbb{Z}_{min}$). L'ensemble $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty\})$ muni de l'opération $\max$ (noté $\oplus$) et de l'addition usuelle (noté $\otimes$) correspond au semi-anneau idempotent $\mathbb{Z}_{max}$ pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. L'ensemble $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ correspond quant à lui au semi-anneau idempotent $\mathbb{Z}_{min}$ pour lequel $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$.

Exemple 2 (Dioïde $\mathcal{C}_v$). L'ensemble des fonctions convexes¹ $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ munies des opérations suivantes $\forall f, g \in \mathcal{C}_v$:

$$\begin{aligned} f \oplus g &: \forall x, (f \oplus g)(x) = \max(f(x), g(x)), \\ f \otimes g &: \forall x, (f \otimes g)(x) = f(x) + g(x), \end{aligned}$$

est un dioïde noté $\mathcal{C}_v$. Les éléments neutres correspondant à ces lois sont notés $\varepsilon : x \mapsto -\infty$ pour la loi $\oplus$ et $e : x \mapsto 0$ pour la loi $\otimes$.

Définition 2 (Série formelle, [1, §4.7]). Une série formelle s en l'indéterminée z et à coefficients $s(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est définie par l'expression suivante :

$$s = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} s(k) z^k.$$

Définition 3 (Dioïde de séries formelles, [1, §4.7]). L'ensemble des séries formelles munies des opérations suivantes :

$$\begin{aligned} s_a \oplus s_b &\triangleq \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} (s_a(k) \oplus s_b(k)) z^k, \\ s_a \otimes s_b &\triangleq \bigotimes_{k=k_a+k_b} (s_a(k_a) \otimes s_b(k_b)) z^k \end{aligned}$$

forme un dioïde noté $\mathcal{D}[[z]]$.

Exemple 3 (Dioïde $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$). Le dioïde de séries formelles en deux indéterminées commutatives γ et δ , à coefficients booléens dans $\mathbb{B}$ et à exposants dans $\mathbb{Z}$ est noté $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$. La série $s \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ s'écrit de manière unique :

$$s = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}} s(n,t) \gamma^n \delta^t \quad \text{avec} \quad s(n,t) = \begin{cases} e & \text{ou} \\ \varepsilon. \end{cases}$$

Les éléments neutres de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ sont $\varepsilon = \bigoplus_{k,t \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k \delta^t$ pour la loi $\oplus$ (série nulle) et $e = \gamma^0 \delta^0$ pour la loi $\otimes$. Graphiquement, une série de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ peut être représentée par une collection de points (n, t) du plan $\mathbb{Z}^2$, l'axe horizontal correspondant à l'indéterminée γ et l'axe vertical à l'indéterminée δ . Les coefficients booléens sont alors synonymes de présence ($s(n, t) = e$) ou d'absence ($s(n, t) = \varepsilon$) d'un point.

Définition 4 (Homomorphisme). Une application Π d'un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ dans un dioïde $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ est un homomorphisme si $\forall a, b \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \Pi(a \oplus b) &= \Pi(a) \oplus \Pi(b) \quad \text{et} \quad \Pi(\varepsilon) = \varepsilon, \\ \Pi(a \otimes b) &= \Pi(a) \otimes \Pi(b) \quad \text{et} \quad \Pi(e) = e. \end{aligned}$$

¹ Une fonction est dite convexe si son épigraphe est convexe ([1, §3.3]).

Définition 5 (Congruence). Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, une congruence est une relation d'équivalence (notée $\mathcal{R}$) compatible avec les lois $\oplus$ et $\otimes$, soit $\forall a, b, c \in \mathcal{D}$:

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow \begin{cases} (a \oplus c) \mathcal{R} (b \oplus c), \\ (a \otimes c) \mathcal{R} (b \otimes c). \end{cases}$$

Remarque 1 (Congruence induite par un homomorphisme). Si l'application $\Pi : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{C}$ est un homomorphisme, alors la relation $\forall a, b \in \mathcal{D}$:

$$a \stackrel{\Pi}{\equiv} b \Leftrightarrow \Pi(a) = \Pi(b)$$

est une congruence.

Définition 6 (Classe d'équivalence). Soit un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ muni d'une congruence $\mathcal{R}$, la classe d'équivalence d'un élément $a \in \mathcal{D}$, notée $[a]_{\mathcal{R}}$, correspond à l'ensemble des éléments équivalents à a selon $\mathcal{R}$ soit :

$$[a]_{\mathcal{R}} \triangleq \{x \in \mathcal{D} \mid x \mathcal{R} a\}.$$

Définition 7 (Dioïde quotient, [1, §4.2]). L'ensemble des classes d'équivalence d'un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ obtenu selon une congruence $\mathcal{R}$ et muni des lois $\oplus$ et $\otimes$ définies comme suit :

$$[a]_{\mathcal{R}} \oplus [b]_{\mathcal{R}} \triangleq [a \oplus b]_{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad [a]_{\mathcal{R}} \otimes [b]_{\mathcal{R}} \triangleq [a \otimes b]_{\mathcal{R}},$$

forme le dioïde $\mathcal{D}$ quotienté par $\mathcal{R}$, noté $\mathcal{D}/_{\mathcal{R}}$.

Remarque 2 (Élément maximal). Si $\mathcal{R}$ est une congruence, alors $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in [a]_{\mathcal{R}}, \alpha_1 \oplus \alpha_2 \in [a]_{\mathcal{R}}$ et plus généralement :

$$\bigoplus_{x \in [a]_{\mathcal{R}}} x \in [a]_{\mathcal{R}}.$$

Toute classe $[a]_{\mathcal{R}}$ admet donc un élément maximal, somme de tous les éléments de cette classe.

Exemple 4 (Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$). Le dioïde $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ quotienté par la congruence $\mathcal{R}$ définie pour $\forall a, b \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$:

$$a \mathcal{R} b \Leftrightarrow (\gamma \oplus \delta^{-1})^* a = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* b \quad (1)$$

est appelé $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Graphiquement, la multiplication d'un monôme $\gamma^n \delta^t$ de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ par $(\gamma \oplus \delta^{-1})^*$ revient à considérer cet élément non plus comme un point (n, t) de $\mathbb{Z}^2$ mais comme un cône Sud-Est de sommet de coordonnées (n, t) .

Remarque 3 (Opérateur $$).* L'application notée $*$ et appelée étoile de Kleene est définie pour un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $\forall a \in \mathcal{D}$ telle que :

$$a^* = \bigoplus_{k \geq 0} a^k \quad \text{avec} \quad a^0 = e.$$

B. Représentation des SED dans les dioïdes

L'utilisation du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ permet une modélisation de la dynamique des SED faisant apparaître des phénomènes de synchronisation et de délai, à travers des systèmes d'équations linéaires. En effet, la congruence (1) permet de

tenir compte du caractère monotone croissant des trajectoires de tels systèmes. Il est donc possible d'obtenir la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(\gamma, \delta) = Ax(\gamma, \delta) \oplus Bu(\gamma, \delta) \\ y(\gamma, \delta) = Cx(\gamma, \delta) \end{cases} \quad (2)$$

avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{k \times k}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{k \times m}$ et $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times k}$ (k , m et p désignent respectivement les tailles des vecteurs d'état, d'entrée et de sortie). Dans ces équations, l'opérateur γ traduit un décalage événementiel alors que l'opérateur δ représente un décalage temporel.

Tout comme en automatique classique, la relation de transfert d'un système obtenue à partir de la représentation d'état correspond également à la sortie de ce système en réponse à une impulsion. Ainsi, d'après le système d'équation (2), la relation de transfert suivante sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ apparaît :

$$\begin{aligned} y(\gamma, \delta) &= Hu(\gamma, \delta) = CA^*Bu(\gamma, \delta) \\ &= (CB \oplus CAB \oplus CA^2B \oplus \dots)u(\gamma, \delta) \end{aligned}$$

avec $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ la matrice de transfert du système². De manière générale, les éléments de cette matrice de transfert H sont des *séries périodiques* et causales ([7]) de la forme :

$$s = p \oplus q\tau^*$$

avec

$$p = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}, \quad q = \bigoplus_{j=1}^{\beta} \gamma^{N_j} \gamma^{T_j} \quad \text{et} \quad r = \gamma^{\nu} \delta^{\tau}. \quad (3)$$

Le polynôme p caractérise la période transitoire de la série alors que le polynôme q représente le motif du régime périodique. Cette périodicité est fournie par le monôme r avec le ratio $\sigma_{\infty} = \nu/\tau$ et représente la pente ultime de la série. La représentation d'une série minimisant à la fois la taille du transitoire et celle du motif périodique correspond à la *forme canonique* de cette série.

Remarque 4 (Librairie de calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$). La bibliothèque logicielle MinMaxGD ([5]) permet la réalisation de calculs sur des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ tels que les opérations $\oplus$, $\otimes$ et $*$. Les résultats sont systématiquement fournis sous forme canonique.

Remarque 5 (Inconvénients de cette représentation). La forme canonique d'une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ n'est pas toujours une représentation concise. Par exemple, le résultat mis sous forme canonique de la somme suivante :

$$\begin{aligned} &(\gamma^{13} \delta^{14})^* \oplus \gamma^4 (\gamma^{14} \delta^{15})^* \\ &= \gamma^0 \delta^4 \oplus \dots \oplus \gamma^{2898} \delta^{3109} (\gamma^{2899} \delta^{3122})^* \end{aligned}$$

présente un motif transitoire contenant une cinquantaine de monômes. Par conséquent, les algorithmes de manipulation des séries sous cette forme sont pénalisés à la fois en efficacité et en occupation mémoire lorsque les comportements transitoires sont très longs.

² Matrice dont le calcul est détaillé dans [1, Lemme 4.108].

III. DIOÏDE $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Les algorithmes utilisés afin de manipuler les séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ limitent pour l'instant les domaines d'application de la théorie des systèmes $(\max, +)$ -linéaires aux systèmes dont le comportement transitoire (cf. p dans (3)) n'est pas trop important. En effet, pour de tels systèmes, il est souvent difficile de calculer l'étoile de la matrice d'état (cf. A dans (2)) puisque ce calcul nécessite k^3 calculs d'étoile de séries et chacune de ces opérations n'est pas linéaire en la taille de la série.

Afin de répondre à cette problématique, cette section rappelle tout d'abord qu'il est possible d'associer à une série de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ une fonction convexe. Cette transformation, notée $\mathcal{F}$, est comparable à la transformée de Legendre-Fenchel (présentée dans [1] et utilisée dans le cadre du Network Calculus [11]). Modulo cette transformée, les algorithmes des opérations de somme, de produit et d'étoile sont de complexité algorithmique $\mathcal{O}(n)$, où n est égal à la somme de la taille du transitoire et du motif de la série périodique (algorithmes discutés dans [14]). Ces opérations sont simplement celles du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ quotienté par $\mathcal{F}$, dioïde alors noté $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ (introduit dans [15]). En outre, toute classe du dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ possède un élément maximal, ce qui garantit un majorant du résultat qui aurait été obtenu sans la transformée.

A. Transformée de Legendre-Fenchel

Définition 8 (Transformée de Legendre-Fenchel d'une série de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, [11] et [1, §3.3]). La transformée de Legendre-Fenchel d'une série de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est l'application $\mathcal{F} : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \mapsto \mathcal{C}_v$ qui, à une série $f \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ définit par :

$$f = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} \gamma^c \delta^{f(c)}$$

associe la fonction convexe suivante :

$$x \mapsto \max_{c \in \mathbb{Z}} (f(c) + (c \times x)).$$

Exemple 5. Soit le polynôme $p \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ défini par $p = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^4$. La fonction convexe associée à p (cf. figure 1) est la suivante $\mathcal{F}(p)(x) = \max(x+1, 3x+2, 4x+4)$.

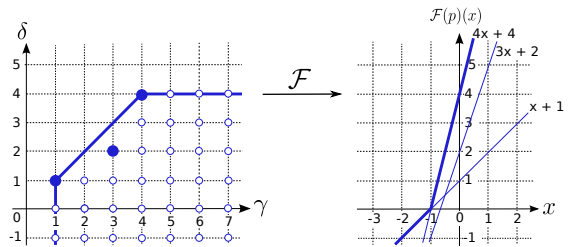


Fig. 1. Transformée de Fenchel du polynôme $p \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Propriété 1. L'application $\mathcal{F} : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \mapsto \mathcal{C}_v$ est un homomorphisme non injectif :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(a \oplus b) &= \mathcal{F}(a) \oplus \mathcal{F}(b), \\ \mathcal{F}(a \otimes b) &= \mathcal{F}(a) \otimes \mathcal{F}(b). \end{aligned}$$

Ainsi, plusieurs éléments différents dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ peuvent être représentés par une seule fonction convexe. Ils ont alors la même transformée de Fenchel et sont équivalents entre eux modulo cette transformée. Par exemple, selon la figure 1, le polynôme $p_1 \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ défini par $p_1 = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^4$ est représenté par la même fonction convexe que le polynôme $p_2 \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ défini par $p_2 = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^4$ ($\mathcal{F}(p_1) = \mathcal{F}(p_2)$). Cette équivalence modulo $\mathcal{F}$ peut également se vérifier selon une autre caractéristique comme le montre le théorème suivant.

Théorème 1 ([1, §6.4.2]). Deux séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ont la même transformée de Fenchel si et seulement si, elles ont la même « enveloppe convexe ».

Remarque 6 (Enveloppe convexe). Le terme « enveloppe convexe » utilisé dans le théorème 1 désigne l'enveloppe convexe des points de $\mathbb{Z}^2$ représentant la série dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

B. Construction de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

D'après la remarque 1, l'application $\mathcal{F} : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \mapsto \mathcal{C}_v$ étant un homomorphisme, la relation suivante $\forall a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$:

$$a \stackrel{\mathcal{F}}{\equiv} b \Leftrightarrow \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b)$$

est une congruence notée $\stackrel{\mathcal{F}}{\equiv}$.

Définition 9 (Dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$). Le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ quotienté par la congruence $\stackrel{\mathcal{F}}{\equiv}$ est appelé $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$.

Ainsi, un élément de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, soit une classe d'équivalence modulo $\mathcal{F}$, regroupe toutes les séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ayant la même transformée de Fenchel. En outre, d'après le théorème 1, tous les éléments d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ ont en commun la même enveloppe convexe. Une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ peut donc être caractérisée par l'enveloppe de l'ensemble de ses représentants.

D'autre part, il est possible de représenter cette enveloppe en ne gardant que ses points extrémaux associés à la mise sous forme irréductible de la pente ultime. Il s'agit alors d'une représentation unique (forme canonique) intéressante de par sa faible taille et est notée de la manière suivante, pour $s \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$:

$$s = p \oplus mr^*$$

avec

$$p = \bigoplus_{i=1}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}, \quad m = \gamma^N \delta^T \quad \text{et} \quad r = \gamma^\nu \delta^\tau. \quad (4)$$

Sous cette forme, le motif n'est plus représenté par un polynôme (cf. q dans (3)) mais par un unique monôme m .

Par ailleurs, il est important de noter que le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ étant un dioïde quotient, chacun de ses éléments est une classe d'équivalence pour laquelle il existe un élément maximal appartenant à $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ (cf. remarque 2). Graphiquement, le représentant maximal d'un élément de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ correspond à la « meilleure approximation

entière par en-dessous » de l'enveloppe convexe de cet élément (cf. figure 6).

C. Algorithmes associés à $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Afin de manipuler les séries périodiques du dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, plusieurs algorithmes sont donnés ici. Il s'agit notamment de la recherche de la forme canonique d'une série de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, de l'addition et du produit de deux séries périodiques ainsi que l'étoile d'une série périodique. L'ensemble de ces algorithmes sont de complexité linéaire en la taille des séries. Le nombre de monômes du polynôme $p \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ est noté α (cf. (4)) et ainsi, le nombre de monômes considérés avant la pente ultime est donné par $n = \alpha + 1$ (nombre de monômes de p et monôme m).

Algorithme 1 (Forme canonique d'une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$).

L'algorithme de mise sous forme canonique d'une série de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ correspond à la recherche de son enveloppe convexe associée à la mise sous forme irréductible de sa pente asymptotique. Cet algorithme est écrit selon la *Marche de Graham* (connue en géométrie algorithmique et décrite dans [16]) qui permet d'obtenir l'enveloppe convexe d'un ensemble de points déjà triés avec une complexité algorithmique linéaire.

Complexité. Dans le pire des cas, l'ensemble des monômes de la série n'est parcouru que deux fois, la complexité de cet algorithme est donc de $\mathcal{O}(n)$ avec n , le nombre de monômes de la série d'origine.

Exemple 6. Soit la série périodique $s \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ suivante :

$$s = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus \gamma^7 \delta^9 \oplus (\gamma^9 \delta^{12} \oplus \gamma^{12} \delta^{13})(\gamma^4 \delta^2)^*.$$

La forme canonique de cette série est donnée par (cf. figure 2) :

$$s' = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^8 \oplus \gamma^9 \delta^{12} (\gamma^2 \delta^1)^*.$$

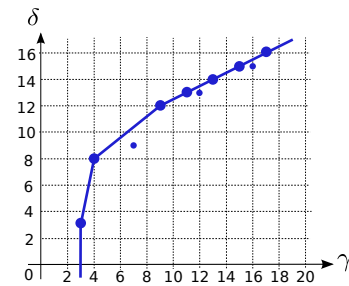


Fig. 2. Forme canonique s' de la série $s \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Les algorithmes donnés par la suite supposent les séries périodiques initialement sous forme canonique au sens de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ et rendent un résultat également sous forme canonique. Par ailleurs, les opérations sur $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ sont les mêmes que sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ (aux simplifications près).

Algorithme 2 (Addition de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$).

L'algorithme d'addition de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ effectue tout d'abord une fusion des polynômes $(p_1 \oplus m_1)$ et $(p_2 \oplus m_2)$ dans une série résultat dont la pente asymptotique est donnée par la pente ultime la plus grande des deux séries considérées ($\max(\tau_1/\nu_1, \tau_2/\nu_2)$). Ensuite, ce résultat n'étant pas nécessairement sous forme canonique, l'algorithme 1 de mise en forme canonique lui est appliqué.

Complexité. Soit n le nombre de monômes des deux séries ($n = n_1 + n_2$), la complexité de l'opération de fusion des polynômes est de $\mathcal{O}(n)$. L'application de l'algorithme 1 de mise sous forme canonique donnant également une complexité en $\mathcal{O}(n)$, la complexité finale de l'opération reste en $\mathcal{O}(n)$.

Exemple 7. Soient deux séries s_1 et $s_2 \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ définies par :

$$s_1 = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^6 \delta^5 (\gamma^3 \delta^1)^*,$$

$$s_2 = \gamma^2 \delta^0 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^5 (\gamma^1 \delta^1)^*.$$

L'addition de ces deux séries est donnée par (cf. figure 3) :

$$s = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^3 (\gamma^1 \delta^1)^*.$$

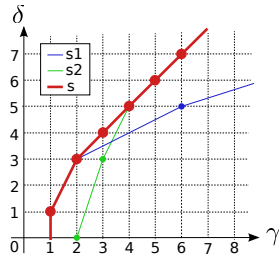


Fig. 3. Addition des séries s_1 et $s_2 \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Algorithme 3 (Produit de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$).

Théorème 2 ([3, §3.1.6]). Le produit de deux séries convexes et affines par morceaux est une série également convexe, obtenue en mettant bout à bout les segments triés par pentes décroissantes des deux séries opérantes.

Les séries considérées dans ces algorithmes étant sous forme canonique, elles sont convexes et affines par morceaux. Ainsi, ce théorème fournit l'algorithme nécessaire au produit de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$.

Complexité. Soit n le nombre de monômes des deux séries ($n = n_1 + n_2$), la construction de la série résultat reposant sur l'association de segments ne nécessite qu'un seul parcours des monômes de deux séries. Ainsi, la complexité de cette opération est de $\mathcal{O}(n)$.

Exemple 8. Soient deux séries s_1 et $s_2 \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ définies par :

$$s_1 = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^6 \delta^6 (\gamma^3 \delta^1)^*,$$

$$s_2 = \gamma^2 \delta^0 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^5 (\gamma^1 \delta^1)^*.$$

Le produit de ces deux séries est donné par (cf. figure 4) :

$$s = \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^8 (\gamma^1 \delta^1)^*.$$

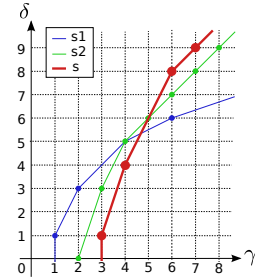


Fig. 4. Produit des séries s_1 et $s_2 \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Algorithme 4 (Étoile de Kleene d'une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$).

L'étoile de Kleene d'une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ a toujours la forme suivante :

$$s = (\gamma^k \delta^l)^*,$$

avec l/k sous forme irréductible. La paire d'exposants (k, l) de cette série résultat prend sa valeur parmi les exposants de l'ensemble de ses monômes p , m et r tel que :

$$\frac{l}{k} = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq \alpha} \left\{ \frac{t_i}{n_i} \right\}, \frac{T}{N}, \frac{\tau}{\nu} \right\}.$$

L'algorithme de calcul de l'étoile de Kleene d'une série consiste donc à parcourir ses monômes jusqu'à trouver le rapport l/k le plus grand.

Complexité. Lors de cet algorithme et dans le pire des cas, les monômes de la série ne sont parcourus qu'une seule fois. Ainsi, la complexité de cette opération est de $\mathcal{O}(n)$ avec n , le nombre de monômes de la série.

Exemple 9. Soit une série $s_1 \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ définie par :

$$s_1 = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^6 \delta^6 (\gamma^3 \delta^1)^*.$$

L'étoile de Kleene de cette série est donnée par (cf. figure 5) :

$$s = \gamma^0 \delta^0 (\gamma^2 \delta^3)^*.$$

Algorithme 5 (Représentant maximal d'une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$).

Le représentant maximal d'une série périodique $s \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ appartient au dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et correspond à la « meilleure approximation entière par en-dessous » de l'enveloppe convexe de la série s . L'algorithme de recherche

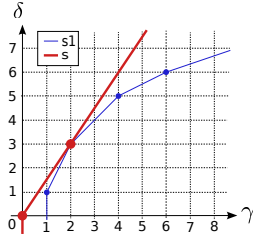


Fig. 5. Étoile de Kleene de la série $s \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

de ce représentant maximal consiste donc à se déplacer selon l'axe γ , de valeur entière à valeur entière, tout en déterminant la plus grande valeur entière selon δ inférieure ou égale à l'enveloppe convexe. Ce même traitement est appliqué à la pente ultime selon un seul motif.

Complexité. Lors de cet algorithme, tous les entiers compris entre n_0 et $N + \nu$ (cf. (4)) sont parcourus ce qui fournit une complexité en $\mathcal{O}(n)$ pour cette opération avec $n = N + \nu - n_0$.

Exemple 10. Soit le polynôme $p \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ suivant :

$$p = \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^7 \delta^9 \oplus \gamma^{15} \delta^{13} \oplus \gamma^{20} \delta^{14}.$$

Le représentant maximal dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ de ce polynôme³ est donné par (cf. figure 6) :

$$\begin{aligned} & \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^9 \\ & \oplus \gamma^9 \delta^{10} \oplus \gamma^{11} \delta^{11} \oplus \gamma^{13} \delta^{12} \oplus \gamma^{15} \delta^{13} \oplus \gamma^{20} \delta^{14}. \end{aligned}$$

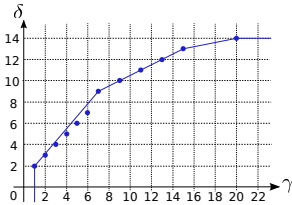


Fig. 6. Représentant maximal du polynôme $p \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

IV. CONCLUSION

Ce document aura tout d'abord permis de rappeler quelques définitions inhérentes à l'utilisation de la structure algébrique appelée dioïde et utilisée dans théorie des systèmes $(\max, +)$ -linéaires. Cette théorie permet notamment la modélisation des Systèmes à Événements Discrets faisant apparaître des phénomènes de synchronisation et de délai par des séries périodiques appartenant au semi-anneau idempotent $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Des outils informatiques manipulant ces séries périodiques existent ([5]), mais ils sont rapidement limités en temps de calcul et/ou en occupation mémoire.

³ Il est à noter que certains monômes ($\gamma^8 \delta^9$, $\gamma^{10} \delta^{10}$, etc.) n'apparaissent pas dans la représentation du fait des simplifications liées à $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ (cf. exemple 4).

Ce document propose donc une représentation approchée des séries périodiques dans le but de réduire la complexité des algorithmes les manipulant et ainsi, les temps de calculs. Une approximation convexe par valeur supérieure d'une série périodique est rendue possible grâce à l'utilisation du dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, issu du quotient de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la transformée de Legendre-Fenchel, et conduit à en simplifier l'écriture tout en conservant leurs caractéristiques fortes comme le taux de production. Cette représentation a notamment permis de définir des algorithmes efficaces de calculs de somme, produit et étoile des séries (complexité linéaire en la taille des séries).

RÉFÉRENCES

- [1] F. BACCELLI, G. COHEN, G. OLSDER et J.P. QUADRAT : *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and sons, 1992. <http://cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf>.
- [2] B. HEIDERGOTT, G. OLSDER et J. WOUDE : *Max Plus at Work, Modeling and Analysis of Synchronized Systems : a Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton University Press, 2006.
- [3] J.Y. LE BOUDEEC et P. THIRAN : *Network Calculus : A Theory of Deterministic Queuing Systems for the Internet*. Springer, 2001.
- [4] L. HOUSSIN : *Contribution à la Commande de Systèmes à Événements Discrets : Applications aux Réseaux de Transport*. Thèse de doctorat, LISA - Université d'Angers, 2006. <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/THESES/theses.html>.
- [5] L. HARDOUIN, M. LHOMMEAU et B. COTTENCEAU : Minmaxgd, librairie de calcul sur des séries périodiques dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ permettant la modélisation de systèmes $(\max, +)$ linéaires. LISA - Université d'Angers, 1998 - 2006. http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/documentation_minmaxgd.pdf.
- [6] S. LAGRANGE : Bibliothèque de calcul pour le network calculus. LISA - Université d'Angers, 2007. <http://www.istia.univ-angers.fr/~lagrange/spip.php?article21>.
- [7] S. GAUBERT : *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, INRIA - Ecole des Mines de Paris, 1992. <http://www.inria.fr/rrrt/tu-0190.html>.
- [8] B. GRUET : Etude d'une structure de commande en boucle fermée. Rapport de DEA, ISTIA - Université d'Angers, 1995. <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/DEA/dea.html>.
- [9] B. COTTENCEAU : *Contribution à la Commande de Systèmes à Événements Discrets : Synthèse de Correcteurs pour les Graphes d'Événements Temporisés dans les Dioïdes*. Thèse de doctorat, LISA - Université d'Angers, 1999. <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/THESES/theses.html>.
- [10] M. LHOMMEAU, L. HARDOUIN, B. COTTENCEAU et L. JAULIN : Interval analysis and dioid : application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 40(11):1923–1930, 2004.
- [11] M. FIDLER et S. RECKER : Conjugate network calculus : A dual approach applying the legendre transform. *Computer Networks*, 50(8):1026–1039, 2006.
- [12] G. COHEN : Two dimensional domain representation of timed event graphs. *Summer School on Discrete Event Systems*, June, 1993.
- [13] L. HARDOUIN : Sur la commande linéaire de systèmes à événements discrets dans l'algèbre $(\max, +)$. Habilitation à Diriger des Recherches, ISTIA - Université d'Angers, 2004. <http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/publications.html>.
- [14] E. LE CORRANC : Développement d'outils de calcul garantis et efficaces pour les systèmes $(\max, +)$ -linéaires. Rapport de Master Recherche, ISTIA - Université d'Angers, 2008. <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/DEA/dea.html>.
- [15] A. ABEKA : Utilisation de la transformée de fenchel pour représenter la dynamique des systèmes $(\max, +)$ -linéaires. Rapport de DEA, ISTIA - Université d'Angers, 2005. <http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/DEA/dea.html>.
- [16] J. ELSCHNER et IG GRAHAM : An optimal order collocation method for first kind boundary integral equations on polygons. *Numerische Mathematik*, 70(1):1–31, 1995.