

# Etude numérique sur un observateur du type Luenberger pour des systèmes de vibration en dimension infinie

Xiao-Dong LI<sup>1</sup>, Cheng-Zhong XU<sup>1</sup>, Yue-Jun PENG<sup>2</sup>, Marius TUCSNAK<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Université de Lyon, Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés, CNRS UMR 5007, Université Claude Bernard Lyon 1, 43, Boulevard du 11 Novembre, 69622 Villeurbanne, France.

<sup>2</sup>Laboratoire de Mathématiques, CNRS UMR 6620, Université Blaise Pascal Clermont-Ferrand 2, 63177 Aubière, France.

<sup>3</sup>Institut Elie Cartan & INRIA Lorraine, Université Henri Poincaré Nancy 1, BP 239, 54506 Vandoeuvre-lès-Nancy, France.

e-mail : [lix@lagep.cpe.fr](mailto:lix@lagep.cpe.fr), [xu@lagep.univ-lyon1.fr](mailto:xu@lagep.univ-lyon1.fr)  
<http://www.lagep.cpe.fr/>

*Résumé*— Dans cet article nous proposons un observateur du type Luenberger en dimension infinie appliqué pour une classe de systèmes de vibration. Nous faisons des études numériques de l'observateur basé sur un modèle de poutre élastique du type Euler-Bernoulli. La méthode des éléments finis est adoptée comme l'outil principal dans ces études. L'intervalle spatial est divisé en  $N$  sous-intervalles sur lesquels nous utilisons comme fonctions de base les fonctions de Hermite de degré 3, afin d'approximer la fonction inconnue qui est la solution du système étudié. Quelques résultats des simulations numériques sont fournis pour illustrer la convergence de l'observateur construit.

*Mots-clés*— Observateurs, stabilité exponentielle, systèmes linéaires réguliers, équation de poutre du type Euler-Bernoulli, systèmes de vibration, fonctions de base hermitiennes, méthode des éléments finis.

## I. INTRODUCTION

Un observateur est un système dynamique auxiliaire permettant de reconstituer l'état du système original à partir de ses entrées et sorties. Pour un système dynamique donné, il permet de fournir une estimation sur l'état courant du système tout en utilisant les observations précédemment enregistrées. La synthèse d'un observateur est une tâche particulièrement importante et difficile dans le contexte de systèmes dynamiques en dimension infinie. En effet la dimension de l'espace des observations physiques à notre disposition est toujours finie et limitée dans la pratique, alors que l'espace d'état du système est de dimension infinie. Dans certaines applications on aurait besoin de restaurer un nombre infini de variables d'état pour pouvoir appliquer la commande. Par exemple, une loi de feedback d'état stabilisante a été proposée dans [6] pour la commande d'un système de vibration corps-poutre en rotation. La variable de commande est le couple appliqué sur la partie du corps rigide. Par conséquent la loi de commande proposée est simple à réaliser en pratique, à condition que l'on ait accès à toutes les variables d'état. Or ces variables

d'état sont définies dans un espace de dimension infinie, ce qui nous empêche d'y accéder directement. Afin de pouvoir appliquer la loi de commande en temps réel nous proposons d'estimer ces variables en utilisant un observateur. On applique ensuite la loi de feedback basée sur les variables d'état estimées. Notre objectif de départ est de démontrer la stabilisation globale du système en boucle fermée au travers d'un observateur exponentiellement convergent. Autrement dit on souhaite appliquer le principe de séparation (voir [7], [20] et [9]) pour un système de dimension infinie. Nous devons souligner qu'un observateur est non seulement sollicité dans l'implantation de lois de commande par retour d'état. Les observateurs sont également utilisés dans le contrôle et la supervision des procédés.

Un observateur du type Luenberger en dimension finie a été proposé dans [3] dans un contexte des systèmes non-linéaires en dimension finie. Il a été démontré que l'observateur convergeait pour des systèmes bilinéaires dissipatifs en dimension infinie avec des entrées régulièrement persistantes, voir [26] et [10]. En revanche, seule la stabilité au sens faible a été obtenue pour l'observateur, qui est le meilleur résultat que l'on puisse acquérir. En effet, par l'hypothèse sur la continuité et la dimension finie de l'opérateur d'observation, la stabilité exponentielle, souhaitée pour les applications, n'était pas réalisable.

Dans cet article, sous l'hypothèse de l'observabilité exacte pour le système considéré, nous proposons un observateur du type Luenberger qui converge exponentiellement, ce qui est une amélioration des résultats de [7], [3], [26] et [10] dans la construction d'observateurs. Cette amélioration est obtenue à l'aide des opérateurs d'observation non-bornés (ils sont typiquement des observations frontières). En ce sens-là, notre article est la continuité et le prolongement de nos travaux sur la construction d'observateurs. L'idée de la construction d'observateur est basée sur les ré-

sultats de la stabilisation des systèmes de vibration avec contrôle et observation colocalisés. La convergence exponentielle d'un tel observateur est bien connue en dimension finie. Par contre, en dimension infinie le même observateur ne fonctionne pas toujours. Par exemple, en dimension infinie une grande valeur de gain de correction peut provoquer l'instabilité exponentielle de l'erreur de l'observateur. Pour cette raison, nous avons besoin d'effectuer une étude plus précise sur l'observateur. En même temps nous menons une étude sur la robustesse de l'observateur vis à vis de la perturbation et de la variation des constantes.

Dans cet article nous présentons d'abord la structure générale de l'observateur en dimension infinie pour des systèmes de vibration. Nous montrons que le système de corps-poutre en rotation entre dans ce cadre-là. En appliquant au système les résultats théoriques que nous avons déjà développés dans [8], nous construisons un observateur sous la forme explicite d'équations aux dérivées partielles (EDP). En utilisant la méthode des éléments finis nous entreprenons une étude numérique sur la dynamique du système de vibration et celle de l'observateur. On rencontre certaines difficultés dans la simulation numérique de ces EDPs. Cela nous permet de mieux comprendre l'obstacle à la mise en oeuvre pratique de l'observateur. En particulier, nous présentons ici quelques résultats numériques sur la distribution spectrale et l'évolution dynamique des systèmes simulés. Cette analyse numérique nous permet de vérifier le résultat théorique obtenu et de choisir un schéma numérique mieux adapté. Ces démarches sont instructives pour l'application réelle de l'observateur. La contribution ici consiste à exploiter le potentiel d'applications de l'observateur à travers des études numériques de l'observateur sur l'exemple d'un modèle de poutre élastique. En constatant que l'observateur converge bien avec la vitesse angulaire variant dans le temps, nous sommes amenés à envisager dans les travaux futures l'extension de l'observateur à d'autres systèmes de vibration et une démonstration de la stabilité en boucle fermée observateur-loi de commande.

Cet article est organisé de la manière suivante : notre résultat principal est présenté dans la section 2. On prouve que l'observateur proposé est exponentiellement convergent si le gain de correction est petit. Afin de montrer l'application potentielle de notre observateur, nous travaillons sur un système de poutre élastique en rotation comme un exemple. Dans cet exemple, nous expliquons comment obtenir une vitesse de convergence arbitraire de l'observateur en utilisant une construction ultérieure. L'observateur proposé possède une structure du type capteur-actionneur colocalisé relativement simple de telle sorte que l'extension à d'autres systèmes de vibration est possible à réaliser, tels des systèmes étudiés dans [12] et [11]. Dans la section 3, quelques résultats de simulations sont présentés.

## II. RÉSULTAT PRINCIPAL ET APPLICATION À UN SYSTÈME DE VIBRATION

Soient  $U, X$  et  $Y$  des espaces de Hilbert. Considérons le système linéaire dans l'espace d'état  $X$  :

$$\begin{cases} \dot{w}(t) = Aw(t) + Bu(t), \\ w(0) = w_0, \\ y(t) = Cw(t), \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

L'observateur du type Luenberger pour le système dynamique (II.1) proposé dans [8] est gouverné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{w}}(t) = [A - \kappa C^* C] \hat{w}(t) + Bu(t) + \kappa C^* y(t), \quad \kappa > 0, \\ \hat{w}(0) = \hat{w}_0, \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

où  $C^*$  désigne l'opérateur adjoint de  $C$ .

La contribution principale de [8] est le résultat suivant :

*Theorem 1:* Soit  $A$  le générateur d'un  $C_0$  groupe unitaire sur  $X$ . Supposons que  $(A, C^*, C)$  et  $(A, B, C)$  sont réguliers et  $(A, C)$  est exactement observable. Alors il existe deux constantes  $K_{max} \geq K_{min} \geq 0$  telles que l'observateur (II.2) sur  $X$  est exponentiellement convergent pour  $0 < \kappa < 1/K_{max}$  et que l'observateur correspondant (II.2) est exponentiellement divergent si un certain nombre  $\kappa > 1/K_{min}$  est un feedback admissible pour le triple  $(A, C^*, C)$ .

Ce théorème est lié à la stabilisation exponentielle de feedback colocalisé qui est étudiée dans [19] et les travaux de recherche [24]. La preuve du théorème est inspirée d'un ancien article [13].

Le modèle hybride corps-poutre en rotation que nous considérons est constitué d'un disque tournant avec comme appendice une poutre du type Euler-Bernoulli. Le disque tourne librement autour de son axe fixé. La poutre est supposée non extensible et se contraint à se déplacer dans un plan qui est perpendiculaire au plan du disque. Ce modèle représente une situation idéalisée du mouvement d'un engin spatial.

Nombreux auteurs ont élaboré des lois de commande par retour d'état stabilisantes pour des modèles similaires, voir [2], [25], [27], [16], [6], [4], [14] et [5]. En particulier, la loi de commande par retour d'état considérée dans [6] est non locale. Par conséquent, pour les applications on est obligé de mesurer toutes les variables d'état qui sont de dimension infinie et donc physiquement non réalisables. Cependant, le moment de force et la force latérale sur l'extrémité fixé de la poutre sont physiquement mesurables tout comme la vitesse angulaire du disque.

La construction d'un observateur est donc désirable pour estimer toutes les variables d'état à partir de ces mesures. Notre objective du futur consiste, en appliquant le principe de séparation proposé dans [9], à mettre en cascade notre observateur et la loi de commande par retour d'état dans [6] afin de réaliser la stabilisation.

En raison de la simplification du modèle, on normalise des coefficients physiques comme la raideur élastique, la longueur et la masse volumique de la poutre par 1. Le comportement dynamique du système est décrit par :

$$\begin{cases} w_{tt}(x, t) + w_{xxxx}(x, t) = \omega_*^2 w(x, t) \quad \text{dans } \Omega^+ \\ w(0, t) = w_x(0, t) = 0, \\ w_{xx}(1, t) = w_{xxx}(1, t) = 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \\ y(t) = w_{xx}(0, t), \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

où  $\Omega^+ = (0, 1) \times \mathbb{R}^+$ , la vitesse angulaire  $\omega_*$  est une constante réelle positive (éventuellement zéro). Pour la construction d'observateur supposons que  $\omega_* < \sqrt{l_1}$ , où  $l_1$  désigne la plus petite valeur propre de l'opérateur différentiel  $P = \partial_{xxxx}$ , avec  $D(P) = \{f \in H^4(0, 1) | f(0) = f_x(0) = 0; f_{xx}(1) =$

$f_{xxx}(1) = 0$ }. Ainsi le système (II.3) est anti-adjoint et nous pouvons appliquer le Théorème 1 avec un observateur du type Luenberger comme suivant :

$$\begin{cases} \hat{w}_{1t}(x, t) = \hat{w}_2(x, t) - \kappa F(x) \{ \hat{w}_{1xx}(0, t) - y(t) \}, \\ \hat{w}_{2t}(x, t) = -\hat{w}_{1xxx}(x, t) + \omega_*^2 \hat{w}_1(x, t), \\ \hat{w}_1(0, t) = \hat{w}_{1x}(0, t) = 0, \\ \hat{w}_{1xx}(1, t) = \hat{w}_{1xxx}(1, t) = 0, \\ \hat{w}(x, 0) = \hat{w}_0(x), \hat{w}_t(x, 0) = \hat{w}_1(x), \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

où  $\kappa > 0$  et  $F(x)$  est la solution unique de l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} F''''(x) - \omega_*^2 F(x) = 0, \\ F(0) = F'(1) = F''(1) = 0, \\ F'(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{II.5})$$

Posons  $H_L^2 = \{f \in H^2(0, 1) \mid f(0) = f_x(0) = 0\}$ . L'espace d'état du système (II.3) et (II.4) est un espace de Hilbert  $X = H_L^2 \times L^2(0, 1)$  muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_X = \int_0^1 [f_{1xx} g_{1xx} + f_2 g_2 - \omega_*^2 f_1 g_1] dx.$$

L'espace  $Y = \mathbb{R}$  est muni du produit scalaire  $L^2$  usuel.

D'après le Théorème 1 nous avons des résultats suivants :

*Theorem 2:* Supposons que la vitesse angulaire constante  $\omega_* < \sqrt{1}$ . Alors le système (II.3) et l'observateur (II.4) possède une solution unique dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; X^2)$  pour les données initiales  $(w_0, w_1, \hat{w}_0, \hat{w}_1) \in X^2$ . De plus, il existe quelques constantes positives  $M$  et  $\alpha$  telles que

$$\left\| \begin{pmatrix} \hat{w}_1(\cdot, t) \\ \hat{w}_2(\cdot, t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w(\cdot, t) \\ w_t(\cdot, t) \end{pmatrix} \right\|_X \leq M e^{-\alpha t} \left\| \begin{pmatrix} \hat{w}_0 \\ \hat{w}_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \right\|_X.$$

On prouve que l'observateur est exponentiellement convergent.

*Theorem 3:* L'observateur (II.4) est exponentiellement stable pour tout gain de correction  $\kappa > 0$ . De plus, sa vitesse de convergence exponentielle est déterminée par la borne spectrale du générateur  $A^\kappa = A - \kappa C^* C$ . Elle peut être rendue aussi grande comme on veut, en remplaçant  $\kappa [F(x) \ 0]^T$  par  $\kappa [F(x) \ 0]^T + B(x)$  avec quelques  $\kappa$  et  $B(x)$  appropriés.

### III. RÉSULTATS DES SIMULATIONS

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode des éléments finis pour simuler le système d'observateur.

#### A. Fonctions de base hermitiennes

Nous proposons un schéma de semi-discrétisation en espace. Supposons que l'intervalle  $E = [0, 1]$  est uniformément subdivisé en  $N$  éléments  $E_i = [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Désignons par  $h$  la longueur du pas.

Notre système original contient des termes de dérivées partielles d'ordre très élevé (des dérivées spatiales sont d'ordre 4 dans l'exemple de la poutre). En outre, la continuité sur la dérivée spatiale d'ordre 1 de la solution (la pente de la courbe) entre les intervalles adjacents doit être garantie car la solution devrait être dans  $H^2(0, 1)$ .

Ainsi nous avons besoin d'introduire l'interpolation hermitienne avec les fonctions polynomiales (donc  $\mathcal{C}^\infty$  par morceaux) définie sur  $E_i$  (qui admet un prolongement continu sur  $E$  en s'annulant sur  $E \setminus E_i$ ) comme suivant :

$$\begin{cases} H_1^i(x) = \frac{1}{4}(\xi_i^3(x) - 3\xi_i(x) + 2), \\ H_2^i(x) = \frac{h}{8}(\xi_i^3(x) - \xi_i^2(x) - \xi_i(x) + 1), \\ H_3^i(x) = \frac{1}{4}(-\xi_i^3(x) + 3\xi_i(x) + 2), \\ H_4^i(x) = \frac{h}{8}(\xi_i^3(x) + \xi_i^2(x) - \xi_i(x) - 1), \end{cases}$$

et  $H_j^i|_{E \setminus E_i} = 0$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , où  $\xi_i(x) = (2x - x_i - x_{i+1}) / (x_{i+1} - x_i)$ ,  $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ , sont des *coordonnées locales* permettant de mettre toutes les opérations sur un élément standardisé  $[-1, 1]$ . Il est avantageux d'effectuer ces transformations puisqu'il simplifie le calcul de la matrice du système global en concaténant les matrices par bloc obtenues sur chaque élément standardisé.

Définissons sur  $E$  des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_1^0(x) &= H_1^0(x), \\ \phi_2^0(x) &= H_2^0(x); \end{aligned}$$

avec le support  $E_0$ ;

$$\begin{aligned} \phi_1^i(x) &= H_3^{i-1}(x) + H_1^i(x), \\ \phi_2^i(x) &= H_4^{i-1}(x) + H_2^i(x); \end{aligned}$$

avec les supports  $E_{i-1} \cup E_i$ ,  $i = 1, \dots, N-1$  et

$$\begin{aligned} \phi_1^N(x) &= H_3^{N-1}(x), \\ \phi_2^N(x) &= H_4^{N-1}(x), \end{aligned}$$

avec le support  $E_N$ .

Les vecteurs  $\phi_l^k$ ,  $k = 0, \dots, N$ ,  $l = 1, 2$  forment une base de l'espace vectoriel  $\tilde{V}_h$  engendré par ces vecteurs, qui est de dimension  $2N+2$  (inclus dans  $H^2$ ).

#### B. Approximation numérique

Avec la séparation des variables, la solution approchée  $w_h \in \tilde{V}_h$  que nous cherchons peut s'écrire comme

$$w_h(t, x) = \sum_{k=0}^N w^k(t) \phi_1^k(x) + \tilde{w}^k(t) \phi_2^k(x).$$

Les conditions aux limites  $w(0, t) = w_x(0, t) = 0$  dans (II.3) impliquent que  $w^0 = \tilde{w}^0 = 0$ . Ainsi nous pouvons choisir l'espace  $V_h = \text{vect}(\phi_1^1, \phi_2^1, \dots, \phi_1^N, \phi_2^N)$  (qui est de dimension  $2N$ ) comme notre espace de discrétisation contenu dans  $H_L^2$ .

Avec  $\phi_l^k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, 2$  comme les fonctions de base, calculons le produit scalaire  $L^2$  usuel à deux membres des deux équations dans le système original discrétisé (II.4). Par l'intégration par parties, ceci donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 w_{1t}(x) \phi_l^k(x) dx &= \int_0^1 w_2(x) \phi_l^k(x) dx, \\ \int_0^1 w_{2t}(x) \phi_l^k(x) dx &= - \int_0^1 w_{1xx}(x) \phi_{lxx}^k(x) dx \\ &\quad + \omega_*^2 \int_0^1 w_1(x) \phi_l^k(x) dx, \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

où  $w_1 = w_h$  et  $w_2 = w_{ht}$ .

Ainsi le problème discrétisé revient à résoudre le système dynamique suivant :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix},$$

où  $W_1(t) = [w^1(t), \tilde{w}^1(t), \dots, w^N(t), \tilde{w}^N(t)]^T$  et  $W_2(t) = [w_t^1(t), \tilde{w}_t^1(t), \dots, w_t^N(t), \tilde{w}_t^N(t)]^T$  désignent les inconnus,  $I$  est la matrice d'identité de taille  $2N$  et  $J = S^{-1}R - \omega_*^2 I$  avec  $S$  et  $R$ , respectivement, la matrice de masse et la matrice de rigidité données par

$$S_{p,q} = \int_0^1 \phi_l^k(x) \phi_{l'}^{k'}(x) dx,$$

$$R_{p,q} = \int_0^1 \phi_{lxx}^k(x) \phi_{l'xx}^{k'}(x) dx,$$

avec  $p = 2k + l - 2$  et  $q = 2k' + l' - 2$ , pour  $k, k' = 1, \dots, N$ ,  $l, l' = 1, 2$ .

Il est clair que  $S$  et  $R$  sont des matrices (creuses) symétriques pentadiagonales de taille  $2N \times 2N$  et  $R$  est inversible.

Un calcul similaire donne les formulations variationnelles du système d'observateur :

$$\int_0^1 \hat{w}_{1t}(x) \phi_l^k(x) dx = \int_0^1 \hat{w}_2(x) \phi_l^k(x) dx - \int_0^1 F(x) \phi_l^k(x) dx$$

$$\cdot \kappa(\hat{w}_{1xx}(0, t) - w_{1xx}(0, t)),$$

$$\int_0^1 \hat{w}_{2t}(x) \phi_l^k(x) dx = - \int_0^1 \hat{w}_{1xx}(x) \phi_{lxx}^k(x) dx$$

$$+ \omega_*^2 \int_0^1 \hat{w}_1(x) \phi_l^k(x) dx. \quad (\text{III.2})$$

En combinant les formulations variationnelles (III.1) et (III.2) qui correspondent respectivement au système original et observateur, le problème discrétisé devient :

Trouver  $W_1, W_2, \hat{W}_1$  et  $\hat{W}_2 \in V_h$  tels que

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 \\ -J & 0 & 0 & 0 \\ K & 0 & -K & I \\ 0 & 0 & -J & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \hat{W}_1 \\ \hat{W}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{III.3})$$

où  $K = S^{-1}P$  avec  $P$  donnée par

$$P_{p,m} = \begin{cases} \kappa \phi_{mxx}^1(0) \int_0^1 F(x) \phi_l^k(x) dx, & m=1,2, \\ 0, & m=3, \dots, N, \end{cases}$$

avec  $p = 2k + l - 2$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $l = 1, 2$ .

Remarquons que  $P_{p,m} = 0$ ,  $m = 3, \dots, N$ , ceci est dû au fait que  $w_{1xx}(0, t) = w^1(t) \phi_{1xx}^1(0) + \tilde{w}^1(t) \phi_{2xx}^1(0)$  et  $\hat{w}_{1xx}(0, t) = \hat{w}^1(t) \phi_{1xx}^1(0) + \tilde{\hat{w}}^1(t) \phi_{2xx}^1(0)$ .

Pour déterminer  $P_{p,m}$ ,  $m = 1, 2$ , nous avons besoin de calculer explicitement la solution  $F(x)$  de l'équation différentielle (II.5). Si  $\omega_* = 0$ , la solution se donne sous une forme simple  $F(x) = x$ . Dans le cas où  $\omega_* \neq 0$ , nous avons

$$F(x) = \alpha(ch(\sqrt{\omega_*}x) - \cos(\sqrt{\omega_*}x)) + \beta sh(\sqrt{\omega_*}x)$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{\omega_*}} - \beta\right) \sin(\sqrt{\omega_*}x),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes qui dépendent de  $\sqrt{\omega_*}$ .

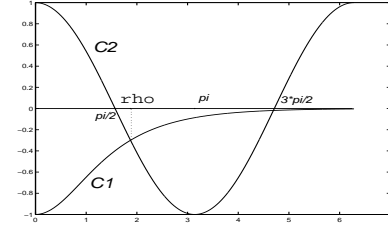


Fig. 1. Paramètre  $\rho$  vérifiant l'équation  $ch(\rho) \cdot \cos(\rho) + 1 = 0$ ; courbes  $C_1 : y = -1/\text{ch}(x)$ ;  $C_2 : y = \cos(x)$ .

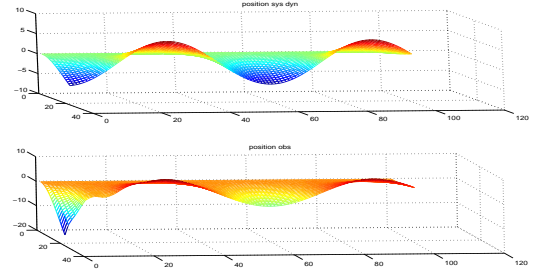


Fig. 2. Vecteurs des positions du système dynamique (en haut) et de l'observateur (en bas), respectivement, dans le cas où  $\omega_* = 0$ .

### C. Résultats des simulations

Prenons le nombre des points de discrétisation  $N = 20$  et la longueur du pas temporel  $dt = 0.03$ . Choisissons le gain de correction  $\kappa = 3$  et la vitesse angulaire constante  $\omega_* = 1.1$  dans le cas où  $\omega_* \neq 0$ . Les conditions initiales sont posées comme suivant :

$$\begin{cases} w(0, x) = -2\gamma[ch(\rho x) - \cos(\rho x)] + 2(sh(\rho x) - \sin(\rho x)), \\ w_t(0, x) = 0, \end{cases}$$

où  $\gamma = -(sh(\rho) + \sin(\rho))/(ch(\rho) + \cos(\rho))$  avec  $\rho \simeq 1.8751$  (qui vérifie  $ch(\rho)\cos(\rho) + 1 = 0$ ). (Voir Fig.1).

Il est clair qu'avec ces conditions initiales le système original comporte comme une oscillation harmonique simple.

Pour le système d'observateur, prenons  $(\hat{w}_0 \hat{w}_1)^T = 2(w_0 w_1)^T$  comme les conditions initiales.

Nous utilisons la subroutine *ode15s* de Matlab pour résoudre le système dynamique (III.1) avec les conditions initiales précédentes. Les profils  $w(t, x)$  et  $\hat{w}(t, x)$  représentent, respectivement, les positions du système original et de l'observateur du type Luenberger construit dans le

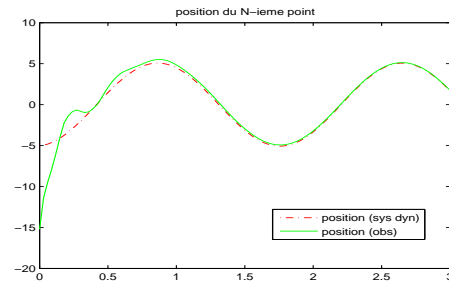


Fig. 3. Evolution des positions au  $N$ -ième point pour le système dynamique (en tiret) et de l'observateur (en solide), respectivement, dans le cas où  $\omega_* = 0$ .

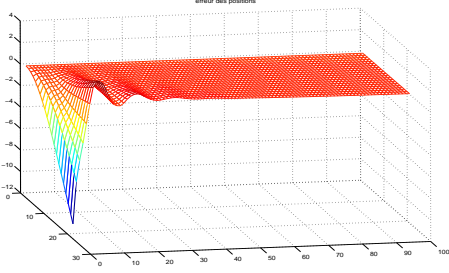


Fig. 4. Evolution de l'erreur  $w - \hat{w}$  dans le cas où  $\omega_* = 0$ .

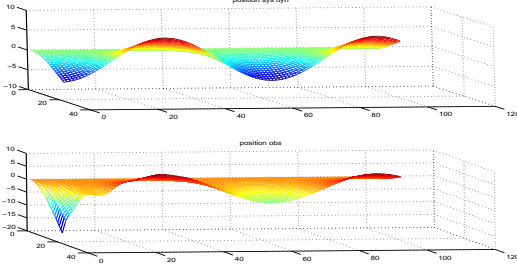


Fig. 5. Vecteurs des positions du système dynamique (en haut) et de l'observateur (en bas), respectivement, dans le cas où  $\omega_* \neq 0$ .

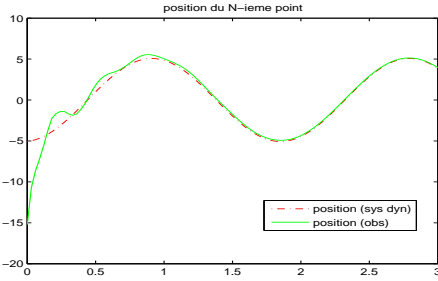


Fig. 6. Evolution des positions au  $N$ -ième point du système dynamique (en tiret) et de l'observateur (en solide), respectivement, dans le cas où  $\omega_* \neq 0$ .

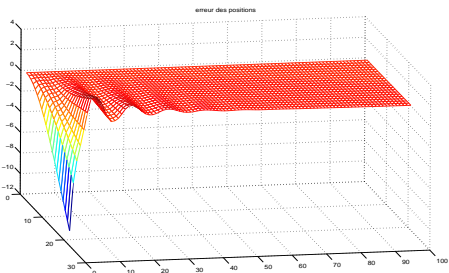


Fig. 7. Evolution de l'erreur  $w - \hat{w}$  dans le cas où  $\omega_* \neq 0$ .

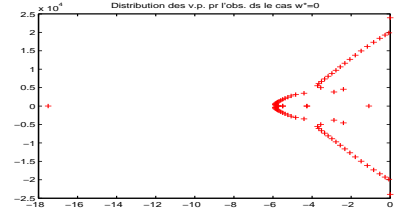


Fig. 8. Distribution des valeurs propres du système d'erreur dans le cas où  $\omega_* = 0$ .

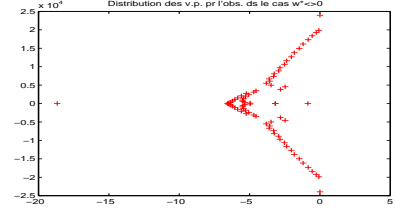


Fig. 9. Distribution des valeurs propres du système d'erreur dans le cas où  $\omega_* \neq 0$ .

cas où  $\omega_* = 0$  (respectivement  $\omega_* \neq 0$ ). Ils sont illustrés dans Fig.2 (respectivement Fig.4). En particulier, Fig.3 et Fig.5 illustrent les dynamiques d'erreur de l'observateur au  $N$ -ième point sur l'intervalle  $[0, 1]$ , respectivement, pour les cas où  $\omega_* = 0$  et  $\omega_* \neq 0$ . Pour les erreurs à chaque point sur l'intervalle  $[0, 1]$ , les deux cas sont aussi représentés, respectivement, dans Fig.4 et Fig.7. Remarquons ici que l'observateur a mis plus de temps pour approcher l'état réel dans le cas où  $\omega_* \neq 0$  que dans le cas où  $\omega_* = 0$ . Nous pouvons améliorer la vitesse de convergence en choisissant des meilleurs paramètres de gain, cela fait partie de notre étude du futur. Les distributions des valeurs propres du système d'erreur pour les deux cas sont aussi présentées dans Fig.8 et Fig.9.

Etant donné un  $\omega_* < \sqrt{l_1}$ , on a également prouvé qu'il existe un certain  $\delta > 0$  tel que l'observateur est exponentiellement convergent en remplaçant  $\omega_*$  par une fonction  $\omega(t)$  vérifiant  $|\omega(t) - \omega_*| < \delta, \forall t \geq 0$ . En choisissant  $\omega(t) = \omega_* \cdot \sin^2(t)$ , les dynamiques du système et de l'observateur sont illustrées dans Fig.10, Fig.11 et Fig.12.

#### IV. CONCLUSIONS

Nous avons présenté ici un observateur du type Luenberger construit pour une classe de systèmes de vibration

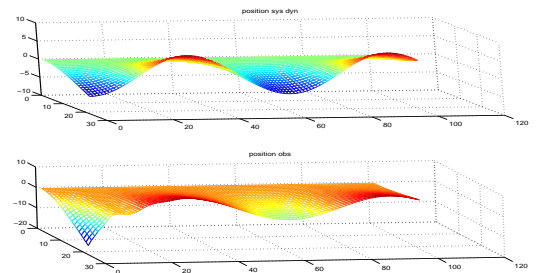


Fig. 10. Vecteurs des positions du système dynamique (en haut) et de l'observateur (en bas), respectivement, dans le cas où  $\omega_*$  variant.

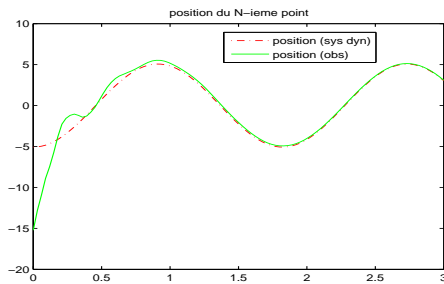


Fig. 11. Evolution des positions au  $N$ -ième point du système dynamique (en tiret) et de l'observateur (en solide), respectivement, dans le cas où  $\omega_*$  variant.

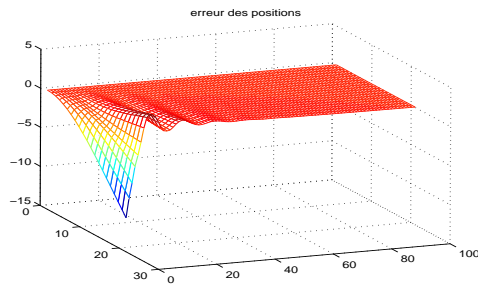


Fig. 12. Evolution de l'erreur  $w - \hat{w}$  dans le cas où  $\omega_*$  variant.

en dimension infinie et les résultats des simulations numériques appliquées à une application concrète. Le futur travail se concentre sur l'extension de la construction de l'observateur aux autres systèmes de vibration étudiés dans [12] et [11]. Théoriquement nous espérons aussi à étudier la possibilité de la construction sous un contexte plus général comme dans [15]. Comme nous avons indiqué dans la section 4, pour le système de rotation corps-poutre, notre objective est de mettre en cascade notre observateur et la loi de commande proposée dans [6] afin d'achever la stabilisation. La vitesse de convergence de notre observateur peut être rendue aussi vite que nous voulons par une construction ultérieure en utilisant la base de Riesz (cf. [18]). En plus, nous prouvons que l'observateur construit reste valable pour toutes les vitesses angulaires qui sont assez proche d'une certaine vitesse constante est petite au sens de la norme  $L^\infty$  uniforme. L'observateur est exponentiellement convergent pour toutes les vitesses angulaires  $\omega(t)$  localisées dans une petite  $L^\infty$  boule centrée sur  $\omega_*$  constant.

#### RÉFÉRENCES

- [1] J.Bailleuil and M.Levi, « Rotational elastic dynamics, » *Physica*, 27D :43-62, 1987.
- [2] A.M.Bloch and E.S.Titi, « On the dynamics of rotating elastic beams, » *Proc. Conf. New Trends System Theory*, Conte, Perdon et Wyman Eds., Birkaiser, Genova, Italy, 1990.
- [3] F.Celle and J.P.Gauthier and D.Kazakos and G.Sallet, « Synthesis of nonlinear observers : a harmonic analysis approach, » *Math. System Theory*, 22 :291-322, 1989.
- [4] B.Chentouf and J.F.Couchouron, « Nonlinear feedback stabilization of a rotating body-beam system, » *Rapport de recherche de l'INRIA*, No.3823, 1999.
- [5] B.F.Conrad and M.Pierre, « Stabilization of Euler-Bernoulli beam by nonlinear boundary feedback, » *Rapport de recherche de l'INRIA*, No.1235, 1990.
- [6] J.M.Coron and B.d'Andrea-Novell, « Stabilization of a rotating body-beam without damping, » *IEEE Trans. Auto. Control*, 43 : 608-618, 1998.
- [7] R.F.Curtain and A.J.Pritchard, *Infinite Dimensional Linear Systems*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [8] A.J.Deguenon, G.Sallet and C.Z.Xu, « A Luenberger observer for infinite dimensional skew-symmetric systems with application to an elastic beam, » *Proc. 2nd Int. Symp on Comm. Control and Signal*, Marrakech, 2006.
- [9] J.P.Gauthier and I.Kupka, « A separation principle for bilinear systems with dissipative drifts, » *IEEE Trans. Auto. Control*, 37 : 1970-1974, 1992.
- [10] J.P.Gauthier and C.Z.Xu and A.Bounabat, « An observer for infinite-dimensional skew-adjoint bilinear systems. » *J. Math. Sys., Estimation and Control*, 8 :31-50, 1998,
- [11] B.Z.Guo and X.Zhang, « The regularity of the wave equation with partial Dirichlet control and collocated observation, » *SIAM J. Contr. Optim.*, 44 :1598-1613, 2005.
- [12] B.Z.Guo and Z.C.Shaoh, « Regularity of a Schrodinger equation with Dirichlet control and collocated observation, » *Sys. Control Lett.*, 54 :1135-1142, 2005.
- [13] V.Jurdjevic and J.P.Quinn, « Controllability and stability, » *J. Differential Equations*, 28 :381-389, 1978.
- [14] H.Laousy and C.Z.Xu and G.Sallet, « Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system, » *IEEE Trans. Auto. Control*, 41 :241-245, 1996.
- [15] I.Lasiecka, « Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary, » *J. Differential Equations*, 79 :340-381, 1989.
- [16] O.Morgul, « Control of a rotating flexible structure, » *IEEE Trans. Auto. Control*, 39 :351-356, 1994.
- [17] A.Pazy, *Semigroups of Linear Operators et Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [18] B.P.Rao, « Le taux optimal de décroissance de l'énergie dans l'équation de poutre de Rayleigh, » *C.R. Acad. Sci. Paris*, 325 : 737-742, 1997.
- [19] M.Slemrod, « A note on complete controllability and stabilizability for linear control systems in Hilbert spaces, » *SIAM J. Contr. Optim.*, 12 :500-508, 1974.
- [20] E.D.Sontag, *Mathematical Control Theory : Deterministic Finite Dimensional Systems*, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [21] O.J.Staffans and G.Weiss, *Transfer functions of regular linear systems Part II : The System Operator and the Lax-Phillips Semigroup*, Manuscript, 2000.
- [22] M.Tucsnak and G.Weiss, « Simultaneous exact controllability and some applications, » *SIAM J. Contr. Optim.*, 38 :1408-1427, 2000.
- [23] G.Weiss, « Regular linear systems with feedback, » *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 7 :23-57, 1994.
- [24] G.Weiss and R.F.Curtain, « Exponential stabilization of vibrating systems by collocated feedback, » *Proc. 7th IEEE Mediterranean Symposium on Control and Automation*. Haifa, Israel, June 1999.
- [25] C.Z.Xu and Baillieul, « Stabilizability and stabilization of a rotating body beam system with torque control, » *IEEE Trans. Auto. Control*, 38 :1754-1765, 1993.
- [26] C.Z.Xu and P.Ligarius and J.P.Gauthier, « An observer for infinite-dimensional dissipative bilinear systems, » *Computers Math. Applic.*, 29 :13-21, 1995.
- [27] C.Z.Xu and G.Sallet, « Boundary stabilization of rotating flexible system, » *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, 185. (Curtain, Bensoussan, and Lions Eds.). Springer-Verlag, New York, 347-365, 1992.
- [28] C.Z.Xu and G.Weiss, « Spectral properties of infinite-dimensional closed-loop systems, » *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 17 :153-172, 2005.