

Contrôleurs à réinitialisation pour les systèmes avec saturation.

Thomas LOQUEN, Christophe PRIEUR, Sophie TARBOURIECH

LAAS-CNRS, Université de Toulouse
7 avenue du Colonel Roche - 31077 Toulouse Cedex 4, France

{tloquen, cprieur, tarbour}@laas.fr

Résumé— Les contrôleurs avec réinitialisation sont une classe de systèmes hybrides dont les états peuvent être réinitialisés sous certaines conditions. Dans cet article, nous exploitons les propriétés de ces contrôleurs pour élargir le domaine de stabilité du système soumis à saturation. A l'aide de fonction de Lyapunov quadratiques, nous proposons des conditions constructives (LMI) pour garantir la stabilité asymptotique du système en boucle fermée. La synthèse de loi de réinitialisation est faite avec pour objectif d'obtenir une estimation du domaine d'attraction du système la meilleure possible.

Mots-clés— systèmes hybrides, réinitialisation, saturation.

I. INTRODUCTION

Les systèmes avec réinitialisation sont une classe de système hybride dont tout ou partie des états peuvent être réinitialisés si une certaine relation algébrique est satisfaite. Ces systèmes hybrides vont donc être caractérisés par des états suivant alternativement une évolution continue (représentée par une équation différentielle) et une évolution discrète (saut instantané). Les trajectoires continues sont solutions d'une équation du type $\dot{x} = f(x, v)$ et sont actives dans un sous-espace de l'espace d'état appelé espace de flux, noté \mathcal{F} . La dynamique discrète, correspondant à des sauts instantanés décrits par des équations du type $x^+ = g(x, v)$, est seulement active dans une région de l'espace d'état appelée espace de saut, noté \mathcal{J} .

Une première catégorie de ces contrôleurs à réinitialisation a été introduite par Clegg [4]. L'Intégrateur de Clegg est un circuit analogique se comportant comme un intégrateur linéaire lorsque ses tensions d'entrée et de sortie sont de même signe et il est remis à zéro dans le cas contraire. Cette loi de réinitialisation a pour but de réduire la phase de l'intégrateur. Ce type de fonctionnement a ensuite conduit au premier système dynamique exploitant cette fonction de réinitialisation, le First Order Reset Element (FORE) [8]. Récemment, s'appuyant sur le développement de travaux sur la modélisation et la notion de solution des systèmes hybrides ([5], [14]), des méthodes ont été proposées pour l'analyse de la stabilité de ces systèmes et sur la caractérisation des améliorations, en terme de performance de la boucle fermée, apportées par l'utilisation de contrôleur à réinitialisation. Citons aussi l'étude d'un critère \mathcal{L}_2 pour une boucle fermée contenant un Intégrateur de Clegg ou un FORE ([13], [18]), l'étude d'un critère \mathcal{H}_2 pour une classe plus générale de contrôleurs [17]. Ces travaux ont pu mettre en évidence l'avantage, dans certains cas, de préférer un contrôleur à réinitialisation à un contrôleur linéaire

classique. Ils sont complétés par des résultats prenant en compte la possibilité d'incertitudes paramétriques [10], la présence de saturation [11] ou encore différentes classes de références [12]. Citons aussi [19], où le saut ne met pas forcément les états d'un contrôleur FORE à zéro.

Par ailleurs, la relation algébrique considérée pour autoriser la réinitialisation peut prendre différentes formes. Ainsi dans [1] (et références associées) les états du contrôleur sont remis à zéro lorsque son entrée (souvent l'erreur entre une référence et une sortie) est nulle (voir aussi [20]). Dans [12] et [13], la condition de saut porte sur le signe de l'entrée et de la sortie du contrôleur : comme pour l'intégrateur de Clegg et le FORE, la réinitialisation a lieu lorsque l'entrée et la sortie du régulateur ont un signe différent.

Dans tous ces travaux, la réinitialisation est exploitée afin de pouvoir améliorer les performances de la boucle de commande, par rapport au cas linéaire. Nous proposons, dans cet article, d'utiliser la flexibilité des contrôleurs à réinitialisation pour agrandir le domaine de stabilité d'un système soumis à saturation. En effet, la présence dans la boucle de commande d'une non-linéarité de type saturation en amplitude peut être la source de cycles limites, de points d'équilibres parasites ou encore de l'instabilité du système [15]. Ainsi, il devient difficile, voire impossible, d'obtenir la stabilité globale du système (au sens où pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, toute trajectoire correspondante converge vers un même état d'équilibre). Il est donc, dans ce cas, nécessaire de considérer un domaine de stabilité locale et en particulier de pouvoir caractériser (exactement ou par estimation) ce domaine. La détermination d'une région de stabilité asymptotique est un problème largement abordé dans la littérature [9], [16]. De même, plusieurs approches existent pour la synthèse de lois de commande pour élargir cette région (approche anti-windup [7],...) et dans ce but, les contrôleurs hybrides peuvent aussi être une solution. Pour cela, après avoir posé le problème considéré, nous allons d'abord proposer des conditions pour l'analyse de la stabilité d'un système saturé en entrée et commandé par un système à réinitialisation. La condition de saut proposée met les états du contrôleur à zéro afin d'obtenir une région de stabilité plus grande qu'une région nominale. Ensuite, nous étendons ces conditions pour la synthèse d'une nouvelle loi de saut qui permette l'élargissement du domaine de stabilité. Enfin, ces résultats sont mis en oeuvre sur un exemple numérique.

Notations. La matrice identité de taille n est notée I_n et

la matrice nulle de dimension $n \times m$, $0_{n \times m}$. Lorsqu'aucune confusion n'est possible, ces matrices sont respectivement notées I et 0 . Pour deux matrices symétriques A et B , $A > B$ traduit le fait que $A - B$ est définie positive. A' est la matrice transposée de A . La matrice avec des éléments diagonaux $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ est notée $diag(A, B)$. Les acronymes LMI et MIMO signifient, respectivement, Linear Matrix Inequalities et Multiple Inputs Multiple Outputs.

II. POSITION DU PROBLÈME

Soit le système à commander :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p \text{sat}(y_r) \\ y &= C_p x_p \end{aligned}, \quad (1)$$

où $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ est l'état du système, $y \in \mathbb{R}$ une sortie mesurée et $y_r \in \mathbb{R}$ la sortie du contrôleur. Les matrices A_p , B_p , C_p sont constantes et de dimensions appropriées.

La fonction de saturation est définie de la manière suivante :

$$\text{sat}(y_r) = \text{sign}(y_r) \min(|y_r|, u_0), \quad (2)$$

où u_0 est un scalaire positif représentant le niveau de saturation. Associé au système (1), nous considérons le contrôleur suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r &= A_c x_r + B_c e \\ y_r &= C_c x_r + D_c e \end{aligned}, \quad (3)$$

Dans (3), l'état du contrôleur est noté $x_r \in \mathbb{R}^{n_c}$, sa sortie y_r et les matrices A_c , B_c , C_c , D_c sont constantes et de dimensions appropriées. L'entrée du contrôleur $e \in \mathbb{R}$ peut être vue comme l'erreur entre la sortie mesurée y et r une référence à suivre. Pour la suite de cet article nous considérons $r = 0$, soit :

$$e = -C_p x_p. \quad (4)$$

Voir [12], pour une étude des systèmes à réinitialisation avec références non nulles.

En combinant les relations (1), (3) et (4), le système en boucle fermée peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_f x - B\Psi(Kx) \\ y &= Cx \end{aligned}, \quad (5)$$

où $x[x'_p \ x'_r] \in \mathbb{R}^n$, avec $n = n_p + n_c$, est le vecteur d'état augmenté et nous considérons la non-linéarité suivante, dite zone-morte :

$$\psi(Kx) = Kx - \text{sat}(Kx), \quad (6)$$

avec

$$K = \begin{bmatrix} -D_c C_p & C_c \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Les matrices A_f , B et C sont constantes et définies comme :

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A_p - B_p D_c C_p & B_p C_c \\ -B_c C_p & A_c \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \end{bmatrix}, \\ C &= \begin{bmatrix} C_p & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans le cas de système contenant une non-linéarité de type saturation, il est important de pouvoir caractériser

le domaine d'attraction de l'origine. Pour le système (5), ce domaine correspond à la région de l'espace d'état où pour toute condition initiale $x(0) = x_0$, la trajectoire résultante converge asymptotiquement vers l'origine. Cependant la détermination exacte de ce domaine est, en général, impossible. Aussi, il est courant de chercher une estimation de ce domaine d'attraction exact et donc d'estimer une région de stabilité du système (5).

Au delà de la caractérisation de ce domaine de stabilité, nous proposons de modifier le contrôleur (3) pour élargir ce domaine. Pour cela nous considérons le contrôleur à réinitialisation, qui s'écrit de manière générale de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_r(t, i) &= A_c x_r(t, i) - B_c C_p x_p \\ x_r(t_{i+1}, i+1) &= A_r x_r(t_{i+1}, i) - B_r C_p x_p(t) \\ &\quad \text{si } (x_p(t_{i+1}), x_r(t_{i+1}, i)) \in \mathcal{J} \\ y_r(t, i) &= C_c x_r(t, i) + D_c e(t) \end{aligned} \quad (8)$$

où les matrices constantes A_r et B_r sont à calculer et les ensembles \mathcal{F} et \mathcal{J} à déterminer.

Ce système à réinitialisation est présenté comme un système hybride en utilisant le cadre introduit dans [5] où $x_r(t, i)$ est la valeur de l'état du contrôleur au temps t lorsque i sauts ont été effectués, $x_r(t_{i+1}, i)$ et $x_r(t_{i+1}, i+1)$ sont, respectivement, sa valeur avant et après une réinitialisation. Les sous-espaces de l'espace d'état \mathcal{F} et \mathcal{J} sont respectivement appelés espaces de flux et de saut. Tant que $(x_p, x_r) \in \mathcal{F}$, le système (8) se comporte de manière linéaire et la sortie y_r décrit une trajectoire continue correspondant aux matrices (A_c, B_c, C_c, D_c) . Lorsque $(x_p, x_r) \in \mathcal{J}$ l'état du contrôleur est instantanément modifié suivant les matrices constantes et de dimensions appropriées A_r et B_r .

Par la suite nous noterons \dot{x}_r pour $\dot{x}_r(t, i)$ et x_r^+ pour $x_r(t_{i+1}, i+1)$.

Nous notons $\mathcal{E}(P)$ la région de stabilité du système (5). Cet ellipsoïde n'est pas connue a priori et les résultats proposés permettront son estimation. Notre objectif est d'agrandir ce domaine de stabilité asymptotique nominal grâce au contrôleur à réinitialisation. Pour cela les espaces de flux et de saut seront respectivement définis comme l'intérieur et l'extérieur de ce domaine ($\mathcal{F} = \mathcal{E}(P)$ et $\mathcal{J} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{E}(P)$).

Dans ces conditions, le système en boucle fermée (5) se réécrit comme

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_f x - B\Psi(Kx) \\ y &= Cx \\ x^+ &= A_j x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{si } x \in \mathcal{E}(P) \\ \text{si } x \notin \mathcal{E}(P) \end{array} \quad (9)$$

où $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$ avec $P = P' > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de réinitialisation. Notons que lors d'un saut, les états du système à commander (1) restent constants. Ainsi, l'interconnexion des systèmes (1) et (8) conduit à une matrice de réinitialisation de la forme

$$A_j = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ -B_r C_p & A_r \end{bmatrix} \quad (10)$$

Le problème que nous cherchons à résoudre par la suite peut se résumer ainsi :

Problème 1: Pour une matrice A_j donnée, déterminer un domaine $\mathcal{E}(P)$ et une région de stabilité asymptotique la plus grande possible pour le système hybride (9).

Avant de présenter les principaux résultats, considérons le lemme technique suivant [7] :

Lemme 1: Considérons la matrice $G \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, nous définissons le domaine

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq (K - G)x \leq u_0\}, \quad (11)$$

Soit la fonction $\psi(Kx)$ défini en (6), si $x \in \Gamma$, alors la relation

$$\psi(Kx)'T[\psi(Kx) - Gx] \leq 0 \quad (12)$$

est satisfaite pour tout scalaire positif T .

III. PRINCIPAUX RÉSULTATS

Dans cette partie, nous allons développer les principaux résultats en fonction de la matrice A_j . Nous considérons deux cas : d'abord le saut met de manière classique les états du contrôleur à zéro, puis nous modifierons la matrice A_j pour permettre la synthèse d'une nouvelle loi de saut.

A. Etats du contrôleur remis à zéro

Dans ce paragraphe, nous imposons $A_j = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \\ 0 & 0_{n_r} \end{bmatrix}$, c'est-à-dire que nous annulons, lors du saut, la composante du vecteur d'état associé au contrôleur.

Théorème 1: Soit une matrice $N = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \end{bmatrix}$. S'il existe une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $Y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ et deux scalaires positifs S et α satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} WA'_f + A_f W & BS - Y' \\ SB' - Y & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} W & WK' - Y' \\ KW - Y & u_0^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} W & N' \\ N & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (15)$$

alors le domaine $\mathcal{E}(P) \cup \mathcal{D}$, avec $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x'Px \leq 1\}$, $P = W^{-1}$ et $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; |Nx| \leq \sigma^{-1}\}$, $\sigma = \sqrt{\alpha}$, est une région de stabilité asymptotique pour le système (9).

Preuve 1: Notons d'abord que l'inégalité (14) implique que le domaine $\mathcal{E}(P)$ est inclus dans la région Γ définie en (11) [3], [6]. En effet, en réécrivant (11) comme $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; x' \frac{(K-G)'(K-G)}{u_0^2} x \leq 1\}$, nous devons avoir $x' \frac{(K-G)'(K-G)}{u_0^2} x \leq x'Px \leq 1$, soit encore pour tout x ,

$$x' \left(\frac{(K-G)'(K-G)}{u_0^2} - P \right) x \leq 0 \quad (16)$$

La relation (16) est équivalente à

$$\left(P - \frac{(K-G)'(K-G)}{u_0^2} \right) \geq 0. \quad (17)$$

En appliquant le complément de Schur, le relation (17) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} P & (K-G)' \\ (K-G) & u_0^2 \end{bmatrix} \geq 0. \quad (18)$$

En pré et post-multipliant la LMI (18) par $diag(W, I)$ et en notant $W = P^{-1}$ et $Y = GW$, nous obtenons la LMI (14).

Considérons la fonction de Lyapunov quadratique

$$V(x) = x'Px \text{ avec } P = P' > 0, P \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (19)$$

Le long des trajectoires continues du système (9), la dérivée temporelle de la fonction (19) s'écrit

$$\dot{V}(x) = x'(A'_f P + P A_f)x - 2x'PB\psi(Kx) \quad (20)$$

pour tout $x \in \mathcal{E}(P)$ donc, avec la relation (14), pour tout $x \in \Gamma$, ou encore avec le Lemme 1

$$\dot{V}(x) \leq \dot{V}(x) - 2\psi(Kx)'T\psi(Kx) + 2\psi(Kx)'TGx. \quad (21)$$

En notant $\xi = \begin{bmatrix} x' & -\psi(Kx)' \end{bmatrix}'$, la partie droite de (21) s'écrit

$$\xi' L \xi = \xi' \begin{bmatrix} A'_f P + P A_f & PB - G'T \\ B'P - TG & -2T \end{bmatrix} \xi. \quad (22)$$

Ainsi nous aurons $\dot{V}(x) < 0$ si l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\begin{bmatrix} A'_f P + P A_f & PB - G'T \\ B'P - TG & -2T \end{bmatrix} < 0. \quad (23)$$

La pré et post-multiplication de (23) par $diag(W, S)$, avec $W = P^{-1}$ et $S = T^{-1}$, conduit à la LMI (13). Ainsi, le domaine $\mathcal{E}(P)$ est une région positivement invariante et contractive pour le système (9) [2], c'est-à-dire que pour toute condition initiale $x(0) \in \mathcal{E}(P)$ la trajectoire correspondante y reste confinée et converge vers l'origine.

La flexibilité amenée par le contrôleur à réinitialisation peut nous permettre de considérer des conditions initiales en dehors de ce domaine nominal $\mathcal{E}(P)$. En effet, si la condition initiale $x_0 = x(0)$ est telle que $x_0^+ \in \mathcal{E}(P)$ la stabilité asymptotique du système (9) sera garantie. Nous cherchons donc un domaine \mathcal{D} , le plus grand possible, tel que $x_0 \in \mathcal{D} \implies x_0^+ \in \mathcal{E}(P)$, i.e $\begin{bmatrix} x_{p0}^+ \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{E}(P)$. Il apparaît

donc que \mathcal{D} n'est pas limité dans la direction x_r (dû au fait que $x_{r0}^+ = 0$) et nous définissons $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; |Nx| \leq \sigma^{-1}\}$ avec σ un scalaire positif et $N = \begin{bmatrix} I_{n_p} & 0 \end{bmatrix}$. En utilisant la S-procédure [3], l'implication $|Nx| \leq \sigma^{-1} \implies x'A'_j P A_j x \leq 1$ s'écrit comme $\sigma^2 N'N - A'_j P A_j \geq 0$. En remarquant, dans notre cas, que $N'N = A_j$, cette inégalité devient $N'(\sigma^2 I - N P N')N \geq 0$, ou encore avec le complément de Schur [3] comme la LMI (15), avec $W = P^{-1}$ et $\alpha = \sigma^2$.

Finalement, toute trajectoire commençant dans \mathcal{D} ou $\mathcal{E}(P)$ convergera vers l'origine et la région de stabilité du système (9) est bien $\mathcal{E}(P) \cup \mathcal{D}$. ■

Remarque 1: Si la matrice de réinitialisation est telle que la substitution $N'N = A_j$ n'est pas possible, notons que l'inégalité (15) peut s'écrire

$$\begin{bmatrix} W & A'_j \\ A_j & \alpha N'N \end{bmatrix} \geq 0,$$

et reste linéaire en ses inconnues.

B. Nouvelle loi de saut

Si la mise à zéro des états du contrôleur est la solution la plus souvent utilisée dans la littérature, d'autres choix sont possibles. Dans ce paragraphe, nous souhaitons trouver une loi de réinitialisation pour élargir, le plus possible, un domaine de stabilité nominal. Pour cela, nous allons étendre, dans le Théorème 2, les conditions constructives du Théorème 1 pour répondre au problème suivant :

Problème 2: Trouver la loi de réinitialisation des états du contrôleur (8) (i.e les matrices A_r et B_r) et un domaine de stabilité nominal $\mathcal{E}(P)$ tels que la région de stabilité asymptotique du système hybride (9) soit la plus grande possible.

Pour cela, nous écrivons la matrice de saut du système (9) comme :

$$A_j = \overline{A}_j + E_r \Theta F_r, \quad (24)$$

$$\text{où } \overline{A}_j = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Theta = [A_r \quad B_r] \text{ et } F_r = \begin{bmatrix} -C_p & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Théorème 2: S'il existe des matrices symétriques, définies positives $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $Y \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\Theta \in \mathbb{R}^{2n_r \times n_r + 1}$ et un scalaire positif S satisfaisant

$$\begin{bmatrix} WA'_f + A_f W & BS - Y' \\ SB' - Y & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (25)$$

$$\begin{bmatrix} W & WK' - Y' \\ KW - Y & u_0^2 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (26)$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & (\overline{A}_j + E_r \Theta F_r)' \\ \overline{A}_j + E_r \Theta F_r & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad (27)$$

alors la région $\mathcal{E}(P) \cup \mathcal{D}$, avec $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$, $P = W^{-1}$ et $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P_1 x \leq 1\}$ est un domaine d'attraction de l'origine pour le système (9).

Preuve 2: Les inégalités (25) et (26) sont obtenues comme au Théorème 1. Elles garantissent que toute condition initiale dans $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$ conduit à une trajectoire strictement incluse dans $\mathcal{E}(P)$ et convergeant vers l'origine.

Comme précédemment, le Théorème 2 doit répondre à la question : quel est le plus grand ensemble $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P_1 x \leq 1\}$ (où P_1 est une matrice symétrique, définie positive), tel que $x_0 \in \mathcal{D} \implies x_0^+ \in \mathcal{E}(P)$? Nous voulons donc $x_0^+ \in \mathcal{E}(P)$ si $x_0 \in \mathcal{D}$ i.e.

$$x_0^+ A'_j P A_j x_0 \leq 1 \text{ si } x_0^+ P_1 x_0 \leq 1. \quad (28)$$

En utilisant successivement la S-procédure, la relation (28) est équivalente, pour tout x_0 , à

$$P_1 - A'_j P A_j \geq 0. \quad (29)$$

En appliquant le complément de Schur à la relation (29), nous obtenons l'inégalité $\begin{bmatrix} P_1 & A'_j \\ A_j & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0$, soit, avec (24) et $W = P^{-1}$, la LMI (27). ■

IV. SIMULATIONS

Avant de présenter un exemple numérique, nous posons pour chaque théorème précédent, le problème d'optimisation convexe associé.

A. Problèmes d'optimisation convexe

L'objectif du Problème 1 est de maximiser la taille de la région de stabilité asymptotique du système (9). Pour cela considérons le polyèdre $\Xi_0 = Co\{v_1, v_2, \dots, v_{n_r}\}$, $v_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, n_r$.

Pour le Théorème 1, nous considérons, par exemple, le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{W, Y, S, \alpha, \mu} \mu + \alpha \text{ sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} \mu & v'_j \\ v_j & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_r \\ \text{et les relations (13), (14), (15).} \end{cases} \quad (30)$$

La minimisation des scalaires positifs μ et α implique respectivement la maximisation de P et σ^{-1} et donc du domaine $\mathcal{E}(P) \cup \mathcal{D}$, avec $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$, $P = W^{-1}$ et $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; |Nx| \leq \sigma^{-1}\}$.

Le problème d'optimisation associé au Théorème 2 s'écrit comme :

$$\begin{cases} \min_{W, Y, S, P_1, \Theta, \mu_1, \mu_2} \mu_1 + \mu_2 \text{ sous les contraintes} \\ \begin{bmatrix} \mu_1 & v'_j \\ v_j & W \end{bmatrix} \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_r \\ \mu_2 - v'_j P_1 v_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_r \\ \text{et les relations (25), (26), (27).} \end{cases} \quad (31)$$

La minimisation des scalaires positifs μ_1 et μ_2 entraîne respectivement la maximisation des domaines $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$, $P = W^{-1}$ et $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P_1 x \leq 1\}$.

B. Mise en oeuvre

Pour illustrer nos résultats, nous proposons de déterminer la région de stabilité du système suivant :

$$\dot{x}_p(t) = 0.1x_p(t) + sat(y_r), \quad y(t) = x_p(t)$$

avec $u_0 = 1$ et connecté au contrôleur stabilisant [7] :

$$\dot{x}_r(t) = -0.2y(t), \quad y_r(t) = x_r - 2y(t)$$

La Figure 1 présente, en trait plein, le domaine de stabilité obtenu en résolvant le problème d'optimisation (30). Ce domaine est vu comme l'union de l'ellipse $\mathcal{E}(P)$, en pointillés, et du domaine $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; |Nx| \leq 6.2\}$.

En appliquant le Théorème 2 sous les contraintes du problème d'optimisation (31), nous trouvons la loi de saut : $x_r^+ = 0.74x_p$. Notons que le domaine nominal $\mathcal{E}(P)$ présenté Figure 2 est le même que sur la Figure 1, et est inclus dans le domaine $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P_1 x \leq 1\}$, en trait plein sur la Figure 2.

Remarque 2: Dans les deux exemples présentés, la taille totale de la région de stabilité calculée dépend de la taille du domaine de stabilité nominale. Les LMIs proposées dans les deux approches permettent d'agrandir, le plus possible, ce domaine dans la direction de l'état du contrôleur. Ainsi, il est intéressant de dilater au maximum l'ellipsoïde nominal dans la direction de l'état du système sans réinitialisation.

Remarque 3: Notons que les théorèmes proposés dans cet article peuvent être légèrement modifiés pour résoudre le

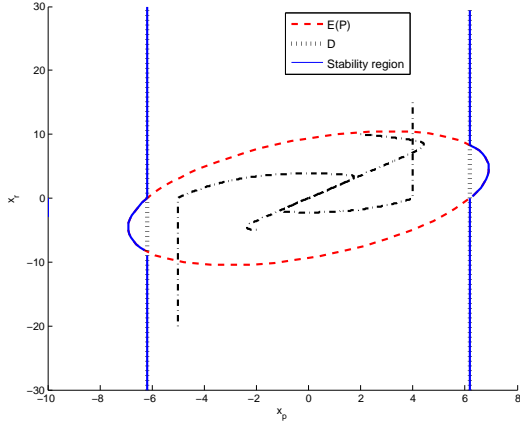


Fig. 1. Domaine de stabilité et trajectoires avec remise à zéros des états du contrôleur.

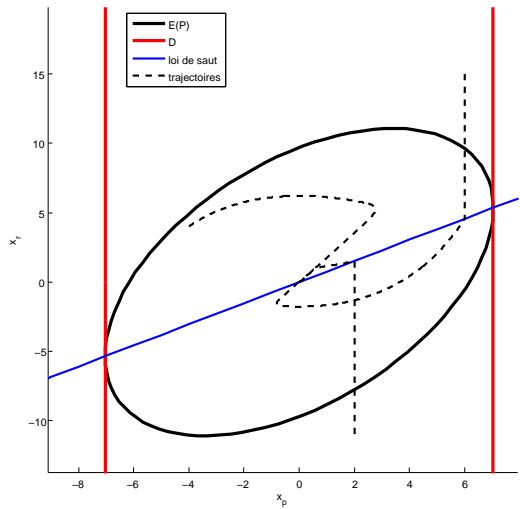


Fig. 2. Domaine de stabilité et trajectoires avec une nouvelle loi de saut.

problème suivant. Soit un système stable en boucle fermée soumis à une perturbation additive.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_f x + B_d d \text{ si } x \in \mathcal{F} \\ x^+ &= A_j x \text{ si } x \in \mathcal{J} \\ z &= C_2 x, \end{aligned} \quad (32)$$

où les espaces de flux et de saut sont décrits par

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \{x \in \mathbb{R}^n; |C_2 x| < z_0\}; \\ \mathcal{J} &= \{x \in \mathbb{R}^n; |C_2 x| \geq z_0\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Sous certaines conditions et sous certaines hypothèses sur la classe de perturbation considérées, le sous espace \mathcal{F} est un ellipsoïde et nous imposons des sauts au système (32) dès que la sortie z sort de cette région de l'espace d'état afin de la maintenir, en présence de perturbation, dans un domaine désiré.

V. CONTRÔLEUR MIMO

Dans ce paragraphe, nous proposons quelques remarques pour étendre les résultats précédents au cas d'un contrôleur multi-variables. Pour cela, définissons le système à contrô-

ler suivant :

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p x_p + B_p \text{sat}(y_r), \\ y &= C_p x_p, \end{aligned} \quad (34)$$

où $x_p \in \mathbb{R}^{n_p}$ est l'état du système, $y \in \mathbb{R}^p$ une sortie mesurée et $y_r \in \mathbb{R}^m$ la sortie du contrôleur. Les matrices A_p , B_p , C_p sont constantes et de dimensions appropriées. La fonction de saturation est définie pour chaque élément de $\text{sat}(y_r)$, $\forall i = 1, \dots, m$:

$$\text{sat}(y_{r(i)}) = \text{sign}(y_{r(i)}) \min(|y_{r(i)}|, u_{0(i)}), \quad (35)$$

où les scalaires positifs $u_{0(i)}$ représentent les niveaux de saturation. Associé au système (34), nous considérons le contrôleur hybride (8) avec pour sortie $y_r \in \mathbb{R}^m$ et pour entrée $e \in \mathbb{R}^p$ telle que $e = -y$. Comme précédemment, le système en boucle fermée peut s'écrire

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= A_f x - B \Psi(Kx) \\ y &= Cx \\ x^+ &= A_j x \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{si } x \in \mathcal{E}(P) \\ \text{si } x \notin \mathcal{E}(P) \end{array} \quad (36)$$

où $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$ avec $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive et $A_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de réinitialisation. Dans ce contexte multi-variables, la non-linéarité s'écrit $\Psi(Kx) = [\Psi(y_{r(1)}) \dots \Psi(y_{r(m)})]$ et le domaine

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n; -u_0 \leq (K_{(i)} - G_{(i)})x \leq u_{0(i)}, \\ i = 1, \dots, m\}, \quad (37)$$

avec $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$. En utilisant la démarche proposée pour obtenir le Théorème 1, le théorème suivant répond au Problème 1 dans le cas d'un contrôleur multi-variables.

Théorème 3: Soit une matrice $N = [I_{n_p} \ 0]$. S'il existe une matrice symétrique définie positive $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$, une matrice $Y \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et deux scalaires positifs S et α satisfaisant :

$$\begin{bmatrix} W A_f' + A_f W & B S - Y' \\ S B' - Y & -2S \end{bmatrix} < 0 \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} W & W K_{(i)}' - Y_{(i)}' \\ K_{(i)} W - Y_{(i)} & u_{0(i)}^2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (39) \\ i = 0, \dots, m$$

$$\begin{bmatrix} W & N' \\ N & \alpha I \end{bmatrix} \geq 0, \quad (40)$$

alors le domaine $\mathcal{E}(P) \cup \mathcal{D}$, avec $\mathcal{E}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n; x' P x \leq 1\}$, $P = W^{-1}$ et $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R}^n; |Nx| \leq \sigma^{-1}\}$, $\sigma = \sqrt{\alpha}$, est une région de stabilité asymptotique pour le système (36).

Notons que les inégalités (13) et (15) du Théorème 1 ne sont pas modifiées par le passage au cas MIMO, et amènent respectivement les LMIs (38) et (40). La relation (14) doit être considérée pour chaque composante du vecteur $\Psi(Kx)$ ce qui conduit à la relation (39) (voir [7]). Ces résultats et les simulations associées font parties d'études en cours.

VI. CONCLUSION

Pour un système en boucle fermée contenant une saturation, nous avons montré comment la modification du contrôleur, par l'ajout d'une loi de réinitialisation, pouvait permettre l'agrandissement d'une région de stabilité

asymptotique nominale. A l'aide de problèmes d'optimisation, nous avons illustré ces résultats en cherchant à maximiser les domaines de stabilité. Au delà de la synthèse d'une loi de réinitialisation, il serait intéressant de développer des méthodes de synthèse pour les espaces de flux et de saut. Par ailleurs, l'actionneur permettant d'injecter une commande au système pouvant être un système dynamique soumis à des saturations en amplitude et en dynamique, il conviendrait d'étendre les résultats proposés pour tenir compte de ces différents types de saturations. Ceci fait partie des études en cours.

RÉFÉRENCES

- [1] O. Beker, C.V. Hollot, and Y. Chait. Fundamental properties of reset control system. *Automatica*, 40(6) :905–915, 2004.
- [2] F. Blanchini. Set invariance in control. *Automatica*, 35 :1747–1767, 1999.
- [3] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies In Applied Mathematics, 1994.
- [4] J.C. Clegg. A non-linear integrator for servomechanisms. *Trans A.I.E.E.*, 77 (Part II) :41–42, 1958.
- [5] R. Goebel, J. Hespanha, A.R. Teel, C. Cai, and R. Sanfelice. Hybrid Systems : Generalized Solutions and Robust Stability. *Proc. NOLCOS, Stuttgart, Germany*, 2004.
- [6] J.M Gomes Da Silva Jr. and S Tarbouriech. Local stabilization of discrete-time linear systems with saturating controls : an LMI-based approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 46 :119–125, 2001.
- [7] J.M Gomes Da Silva Jr. and S Tarbouriech. Antiwindup design with guaranteed regions of stability : an LMI-based approach. *IEEE Trans. Autom. Control*, 50 :106–111, 2005.
- [8] I. Horowitz and P. Rosenbaum. Non-linear design for cost of feedback reduction in systems with large parameter uncertainty. *International Journal of Control*, 24(6) :977–1001, 1975.
- [9] T. Hu and Z. Lin. *Control Systems with Actuator Saturation : Analysis and Design*. Boston, MA : Birkhäuser, 2001.
- [10] T. Loquen, C. Prieur, and S. Tarbouriech. *Analyse de stabilité des systèmes avec réinitialisation en présence d'incertitudes*, volume 41/7-8. Journal Européen des Systèmes Automatisés, Hermes Science Publications, France, 2007.
- [11] T. Loquen, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Stability analysis for reset systems with input saturation. In *Proc. 46th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3272 – 3277, New Orleans, LA, USA, 2007.
- [12] T. Loquen, S. Tarbouriech, and C. Prieur. Stability of reset control systems with nonzero references. In *Proc. 47th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3272 – 3277, Cancun, Mexico, 2008.
- [13] D. Nešić, L. Zaccarian, and A.R. Teel. Stability properties of reset systems. *IFAC World Congress, Pragues*, 2004.
- [14] C. Prieur, R. Goebel, and A.R. Teel. Hybrid feedback control and robust stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 52(11) :2103–2117, 2007.
- [15] I. Queinnec, S. Tarbouriech, and G. Garcia. Anti-windup design for aircraft flight control. In *IEEE International Conf. on Control Applications*, pages 2541–2546, Munich, Germany, 2006.
- [16] S. Tarbouriech, G. Garcia, and A.H. Glattfelder (Eds.). *Advanced strategies in control systems with input and output constraints*. LNCIS, vol.346, Springer Verlag, 2007.
- [17] G. Witvoet, W.H.T.M. Aangent, W.P.M.H. Heemels, M.J.G. van de Molengraft, and M. Steinbuch. H2 performance analysis of reset control systems. In *Proc. 46th IEEE Conf. on Decision and Control*, pages 3278 – 3284, New Orleans, LA, USA, 2007.
- [18] L. Zaccarian, D. Nešić, and A.R. Teel. First order reset elements and the Clegg integrator revisited. *American Control Conference, Portland, OR*, pages 563–568, 2005.
- [19] L. Zaccarian, D. Nešić, and A.R. Teel. Set-point stabilization of SISO linear systems using first order reset elements. In *American Control Conference*, pages 5808–5809, New York, NY, 2007.
- [20] J. Zheng, Y. Guo, M. Fu, Y. Wang, and L. Xie. Improved reset control design for a pzt positioning stage. In *Proc. IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1272 – 1277, Singapore, 2007.