

Détection et Identification de défauts par Analyse en Composantes Principales

Baligh MNASSRI¹, El Mostafa EL ADEL¹, Bouchra ANANOU¹, Mustapha OULADSINE¹

¹Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes – UMR CNRS 6168
Domaine Universitaire de Saint-Jérôme
Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13397 Marseille Cedex 20, France

{baligh.mnassri, mostafa.eladel, bouchra.ananou, mustapha.ouladsine}@lsis.org
<http://www.lsis.org>

Résumé— La détection de défauts et les méthodes de diagnostic basées sur l'analyse en composantes principales (ACP) ont été largement développées et utilisées, parce qu'elles n'ont pas besoin de connaissances préalables sur le mécanisme du processus. L'ACP est un outil de modélisation basé sur une sélection d'un nombre optimal de composantes principales. Nous avons proposé, dans ce contexte, un critère permettant de choisir le nombre utile de composantes.

Pour le suivi d'un processus, deux statistiques, T2 et SPE, sont utilisées pour la détection des anomalies. Toutefois, pour identifier les variables défectueuses, les algorithmes de diagnostic les plus utilisés tels que le calcul des contributions des variables ont encore des problèmes lorsqu'ils sont appliqués sur des véritables processus industriels. Dans ce papier, l'idée est fondée sur le fait que la contribution classique au SPE, disponible dans la littérature, donne des résultats erronés. Le diagnostic proposé fait appel à deux nouvelles méthodes pour le calcul de la contribution au SPE afin d'en tirer des informations plus précises concernant les anomalies. Les résultats de simulation obtenus dans ce travail montrent l'efficacité des approches proposées.

Mots-clés— Diagnostic, Détection de défauts, Identification, ACP, SPE.

I. INTRODUCTION

La maîtrise statistique des processus a été principalement fondée sur des méthodes univariées. Cependant, l'application de ces approches à des systèmes de grande dimension (grand nombre de variables) devient difficile sinon impossible. En plus, les éléments de statistique descriptive univariée et bivariée ne donnent cependant aucune information lorsque les variables sont considérées simultanément. Cette étude simultanée des variables est précisément le but de l'analyse en composantes principales (ACP).

L'ACP est une technique descriptive permettant d'étudier les relations qui existent entre les variables, sans tenir compte, à priori, d'une quelconque structure [2]. Son but est d'identifier la structure de dépendance entre des observations multivariées afin d'obtenir une description ou une représentation compacte de ces dernières. Son utilisation a été restreinte à la projection des données sur les différents axes factoriels et au calcul de distances par rapport à ces axes comme outil de détection de valeurs aberrantes. Depuis les années 70, de nombreux travaux ont proposé d'utiliser l'ACP comme un outil de modélisation des processus à partir de laquelle un modèle peut être obtenu ([1], [2], [14]). Ce modèle permet d'estimer les variables ou

les paramètres du processus à surveiller.

L'ACP est une technique de projection orthogonale linéaire qui projette les observations multidimensionnelles représentées dans un espace de dimension m (m est le nombre de variables observées) sur un sous-espace de dimension inférieure ($\ell < m$) en maximisant la variance des projections. L'ACP linéaire est un outil de modélisation des relations linéaires entre les différentes variables représentant le comportement d'un processus quelconque. L'estimation des paramètres du modèle ACP est effectuée par calcul des valeurs et vecteurs propres de la matrice de corrélation des données. Cependant, pour la détermination de la structure du modèle, il faut déterminer le nombre optimal de composantes utiles pour sa construction. Pour cette raison, plusieurs critères de sélection du nombre de composantes sont présentés dans la littérature [14]. Dans ce papier, nous présentons un nouveau critère pour ce choix. Pour l'identification de défauts, nous considérons l'approche du calcul des contributions aux statistiques de détection à savoir le critère SPE et celui de Hotelling T2. Nous présentons également une nouvelle forme pour la contribution au SPE. Il s'agit d'une amélioration de la forme déjà proposée ([6], [7]) et qui permet un gain au niveau du temps de calcul.

Ce papier est organisé comme suit : la section 2 présentera un rappel du principe de l'analyse en composantes principales. Les deux statistiques, T2 et SPE, utilisées pour le suivi du processus sont ensuite décrites dans la section 3. Dans l'objectif d'identifier les défauts, nous proposons de traiter ce sujet par les approches du calcul des contributions. Dans la section 4, nous avons contribué à résoudre le problème de l'identification de défauts par deux nouvelles approches. Pour prouver l'efficacité de nos approches, nous réalisons un diagnostic pour un exemple de processus simulé dans la section 5. Ainsi nous proposons un nouveau critère pour la sélection de composantes principales utiles dans la construction du modèle ACP. La section 6 présentera une conclusion.

II. ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES (ACP)

L'intérêt majeur de l'ACP est d'offrir la meilleure visualisation possible des données multivariées, en identifiant les hyperplans dans lesquels la dispersion est maximale, met-

tant ainsi en évidence avec le maximum de précision les relations de proximité et d'éloignement entre les variables [2]. L'ACP consiste à remplacer une famille de variables par de nouvelles variables de variance maximale, non corrélées deux à deux et qui sont des combinaisons linéaires des variables originelles. Ces nouvelles variables, appelées composantes principales (CPs), définissent des plans factoriels qui servent de base à une représentation graphique plane des variables initiales. L'interprétation des résultats se restreint généralement aux deux premiers plans factoriels, sous réserve que ceux-ci expliquent la majeure partie de la variance du nuage des variables initiales.

Les variables d'un produit sont généralement exprimées par des unités de mesures et des échelles différentes. Pour cela, il est préférable d'appliquer une ACP sur une matrice X centrée et réduite (colonnes de moyennes nulles et écarts types unités). L'espace orthogonal défini par l'ACP est engendré par les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_a de la matrice de corrélation Σ de X . Considérons $x \in \mathfrak{R}^m$ un vecteur de données aléatoires constitué de m variables. Soit la matrice de données $X \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ de vecteurs lignes x_i^T qui rassemble les n mesures sur les m variables. L'ACP détermine une transformation optimale (vis-à-vis d'un critère de variance) et linéaire de la matrice de données X comme suit :

$$X = TP^T \quad (1)$$

avec $T = [t_1 \ t_2 \ \dots \ t_m] \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, où les vecteurs t_a sont appelés scores ou CPs et la matrice $P = [p_1 \ p_2 \ \dots \ p_m] \in \mathfrak{R}^{m \times m}$, où les vecteurs orthogonaux p_a sont les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_a de la matrice de corrélation Σ de X :

$$\Sigma = P\Lambda P^T \quad \text{avec} \quad PP^T = P^T P = I_m \quad (2)$$

où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1 \ \dots \ \lambda_m)$ est une matrice diagonale dont les éléments sont mis dans l'ordre décroissant.

Puisque l'objectif de l'ACP est de réduire la dimension de l'espace, les ℓ premières composantes principales ($\ell \ll m$) sont les plus significatives et suffisent pour expliquer la variabilité d'un processus à travers sa base de données X . Par conséquent, la partition en vecteurs propres et composantes principales donne respectivement :

$$P = [\hat{P}_\ell \ | \ \tilde{P}_{m-\ell}], \quad T = [\hat{T}_\ell \ | \ \tilde{T}_{m-\ell}] \quad (3)$$

Les ℓ premiers vecteurs propres constituent le sous-espace de représentation ou le sous-espace principal (SP) défini par : $S_p = \text{span}\{\hat{P}_\ell\}$. Alors que le sous-espace résiduel, noté SR, est décrit par : $S_r = \text{span}\{\tilde{P}_{m-\ell}\}$. Ces deux sous-espaces, S_p et S_r , sont orthogonaux.

Un vecteur d'observation x se projette sur le nouvel espace et se décompose sur les deux sous-espaces SP et SR respectivement comme suit :

$$\hat{x} = \hat{P}_\ell \hat{P}_\ell^T x = \hat{C}x \in S_p \quad (4)$$

$$\tilde{x} = \tilde{P}_{m-\ell} \tilde{P}_{m-\ell}^T x = \tilde{C}x \in S_r \quad (5)$$

$$\hat{x}^T \tilde{x} = \tilde{x}^T \hat{x} = 0 \quad \text{et} \quad x = \hat{x} + \tilde{x} \quad (6)$$

où \hat{x} et \tilde{x} sont respectivement la projection de x sur les deux sous-espaces S_p et S_r engendrés respectivement par les ℓ premières CPs et les $(m - \ell)$ restantes.

\hat{C} et $\tilde{C} = (I - \hat{C})$ représentent les matrices de projection respectivement sur le SP et le SR. Elles constituent le modèle ACP ce qui prouve que cette dernière peut être considérée comme une approche de modélisation avec laquelle on peut obtenir un modèle du système. Notons que la matrice \hat{C} n'est pas égale à la matrice identité. Si une valeur de cette matrice est proche de 1, cela signifie que la variable correspondante n'est pas corrélée avec les autres, et donc qu'elle est estimée à partir de sa mesure (cette variable est projetée complètement sur le SP).

III. DÉTECTION DE DÉFAUTS

Les défauts se traduisent par des valeurs aberrantes que l'on peut mettre en évidence par projection sur certains axes principaux. Après la construction du modèle ACP et pour tester une nouvelle observation, cette dernière sera projetée sur le nouvel espace. Elle sera caractérisée par une première distance, notée T2 de Hotelling, dans le SP et une seconde, appelée SPE : squared prediction error, dans le SR. Ces deux distances sont utilisées pour la surveillance et le suivi du processus.

La statistique de Hotelling mesure la variation dans le sous-espace principal ; elle est exprimée comme suit :

$$T2 = \hat{t}^T \hat{\Lambda}^{-1} \hat{t} = \sum_{a=1}^{\ell} \frac{t_a^2}{\lambda_a} \quad (7)$$

où $\hat{t} = \hat{P}^T x$. Généralement, pour un processus sous contrôle possédant des données qui suivent une distribution multinormale, la distance T2 peut être approchée par une distribution de Khi-deux. Ainsi, le système est normal si :

$$T2 \leq \chi_{\ell, 1-\alpha}^2 \quad (8)$$

avec ℓ degrés de liberté et $(1 - \alpha) \%$ représente le quantile de la distribution.

Un changement au niveau des variables corrélées indique une situation exceptionnelle car ces variables ne conservent pas leurs relations normales. Ainsi, l'observation x augmente sa projection sur le SR. En conséquence, l'amplitude de \tilde{x} atteint des valeurs anormales comparées à celles obtenues durant les conditions normales. Le critère SPE est l'amplitude de \tilde{x} ainsi son expression est donnée par :

$$SPE = \|\tilde{x}\|^2 = \|\tilde{C}x\|^2 = \tilde{t}^T \tilde{t} = \sum_{a=\ell+1}^m t_a^2 \quad (9)$$

où $\tilde{t} = \tilde{P}^T x$. Le processus est considéré normal si la statistique SPE ne dépasse pas une limite de contrôle donnée par ([3], [4], [5]) :

$$SPE \leq \delta_{1-\alpha}^2 = (\hat{\mu} + \hat{\sigma} z_{1-\alpha})^3 \quad (10)$$

avec $z_{1-\alpha} = \Phi^{-1}(1 - \alpha)$ en tant que $(1 - \alpha) \%$ quantile de la distribution gaussienne Φ . $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ sont respectivement la moyenne et l'écart-type estimés de $SPE^{2/3}$ calculé à partir des données utilisées pour la construction du modèle ACP.

IV. IDENTIFICATION DE DÉFAUTS

Une fois qu'un défaut est détecté, il est nécessaire d'identifier les variables qui sont en cause (localisation de défaut).

Pour réaliser cette tâche, nous utilisons les approches qui consistent à calculer les contributions des variables aux statistiques de détection ([8], [9], [11], [12]). Avec l'ACP, deux statistiques (T2 et SPE) sont utilisées pour la surveillance d'un processus. Par conséquent, chaque variable aura deux contributions.

A. La contribution au critère T2

Nous remarquons que la distance T2 de Hotelling est la somme des carrés des composantes principales normalisées dont chaque composante (score) s'exprime comme suit :

$$t_a = p_a^T x = \sum_{j=1}^m p_{aj} x_j \quad (11)$$

où p_{aj} est le j -ième élément du vecteur propre p_a correspondant à la valeur propre λ_a .

De l'équation (11), nous déduisons que la variable x_j contribue dans le calcul du score t_a avec :

$$c_j = p_{aj} x_j \quad (12)$$

Ceci implique que la contribution d'une variable x_j à une composante principale normalisée $(t_a/s_a)^2$ est :

$$c_j^{(t_a/s_a)^2} = \frac{t_a}{\lambda_a} p_{aj} x_j \quad \text{avec} \quad s_a^2 = \lambda_a \quad (13)$$

Cela prouve que la contribution totale de la variable x_j dans le calcul de toutes les composantes principales normalisées, c'est-à-dire sa contribution au calcul de T2 est :

$$C_j^{T2} = \sum_{a=1}^{\ell} c_j^{(t_a/s_a)^2} \quad (14)$$

Kourti et al. ([9], [11]) proposent de sélectionner les scores normalisés ayant subi une variation significative. En outre, la contribution totale de la variable x_j sera calculée sur les q (parmi les ℓ) composantes principales normalisées les plus élevées. Elle est exprimée comme suit :

$$C_j^{T2} = \sum_{a=1}^{q \in \{1 \dots \ell\}} c_j^{(t_a/s_a)^2} \quad (15)$$

avec les conditions suivantes : la contribution au score normalisé, donnée par l'équation (13), est mise à zéro si son signe est négatif (son signe est opposé au signe du score normalisé). Ainsi, les variables ayant la plus forte contribution totale sont considérées en défauts.

B. La contribution classique au critère SPE

De l'équation (9), nous déduisons que le critère SPE n'est autre que l'erreur quadratique de prédiction qui est égale à la somme des carrés des résidus des variables comme suit :

$$SPE = \|\tilde{x}\|^2 = \tilde{x}^T \tilde{x} = \sum_{j=1}^m \tilde{x}_j^2 \quad (16)$$

où \tilde{x}_j est le résidu de la j -ième variable. Cette approche propose que la contribution d'une variable au SPE s'exprime par le carré de son propre résidu ([11], [12]) :

$$CC_j^{SPE} = \tilde{x}_j^2 \quad (17)$$

Les variables qui contribuent d'une façon importante doivent être étudiées.

C. Une nouvelle contribution au SPE basée sur les résidus des variables (forme I)

La contribution d'une variable au SPE exprimée par l'équation (17) ne représente que son résidu. Cependant, pour déterminer la contribution d'une variable dans le calcul d'une distance quelconque, nous devons extraire la valeur par laquelle elle participe dans ce calcul.

Le résidu de la variable x_j est exprimé en fonction de sa mesure x_j et de son estimée \hat{x}_j . Cette dernière est en fonction du score t_a qui est lui-même, d'après l'équation (11), en fonction de x_j . Ceci implique que la variable x_j contribue même dans les résidus des autres $(m-1)$ variables. Pour calculer la contribution d'une variable x_j , il est nécessaire d'exprimer son résidu en fonction de sa mesure x_j uniquement. Après avoir développé l'équation (16), nous définissons un terme que nous appellerons la contribution relative (R_{uv}) d'une variable u dans le calcul d'un résidu v , notée comme suit :

$$R_{uv} = -x_v \tilde{x}_u c_{uv} \quad (18)$$

avec c_{uv} est la u -ième composante de la v -ième colonne de la matrice \hat{C} . Nous pouvons montrer que ([6], [7]) :

- La contribution de la variable x_j dans le calcul du carré de son résidu \tilde{x}_j^2 est :

$$C_j^{\tilde{x}_j^2} = x_j \tilde{x}_j - x_j \tilde{x}_j c_{jj} = x_j \tilde{x}_j + R_{jj} \quad (19)$$

- La contribution de la variable x_j dans le calcul du carré d'un résidu d'une variable x_r avec ($r \neq j$) est :

$$C_j^{\tilde{x}_r^2} = -x_j \tilde{x}_r c_{rj} = R_{rj} \quad (20)$$

Nous concluons que la contribution totale de la variable x_j au SPE est la somme de m termes : sa contribution au carré de son propre résidu donnée par l'équation (19), et celles correspondant aux carrés des autres $(m-1)$ résidus. Celles-ci peuvent être déduites de l'équation (20). Nous exprimons la contribution totale comme suit :

$$CI_j^{SPE} = x_j \tilde{x}_j + \sum_{r=1}^m R_{rj} \quad (21)$$

Selon le même principe que celui utilisé par Kourti et al. ([9], [11]) dans leur méthode pour le calcul de la contribution à la T2, nous ne considérons dans notre approche que les contributions positives. Pour cela, nous proposons d'annuler les contributions négatives données par les équations (19) et (20) car elles seront opposées respectivement aux signes de leurs résidus \tilde{x}_j^2 et \tilde{x}_r^2 . Par conséquent, nous avons proposé les deux contraintes suivantes lors du calcul de la contribution au critère SPE (21) :

$$\begin{cases} si \ r = j \ & \& \ R_{jj} < -x_j \tilde{x}_j \Rightarrow R_{jj} = -x_j \tilde{x}_j \\ si \ r \neq j \ & \& \ R_{rj} < 0 \Rightarrow R_{rj} = 0 \end{cases} \quad (22)$$

Par cette méthode, nous décidons que les variables ayant une forte contribution sont supposées en défauts et doivent être étudiées.

D. Une nouvelle contribution au SPE basée sur les CPs de l'ER (forme II)

Dans ce paragraphe, nous proposons une deuxième approche pour calculer la contribution au SPE. D'après l'équation (9), la distance SPE est exprimée avec les CPs du sous-espace résiduel. D'une manière similaire au calcul de la contribution au critère T2, nous pouvons définir autrement une contribution à la distance SPE. De l'équation (11), nous déduisons que la variable x_j contribue au calcul d'un carré d'une composante principale (t_a^2) par :

$$c_j^{t_a^2} = t_a p_{aj} x_j \quad (23)$$

Ceci implique que la contribution totale d'une variable x_j au critère SPE est la somme de ses contributions à toutes les $(m - \ell)$ dernières CPs puisque le SPE est la somme des carrés des CPs du SR :

$$CII_j^{SPE} = \sum_{a=\ell+1}^m c_j^{t_a^2} = \sum_{a=\ell+1}^m t_a p_{aj} x_j \quad (24)$$

Pour ne pas compter les contributions négatives, nous proposons de mettre à zéro la contribution donnée par (23) si son signe est négatif, car son signe sera opposé au signe du t_a^2 . Finalement, nous concluons que les variables ayant la plus grande contribution sont considérées des contributeurs majeurs aux défauts.

V. DIAGNOSTIC ET RÉSULTATS

Un diagnostic basé sur l'utilisation de l'outil ACP repose toujours sur une étape primordiale. Il s'agit de la sélection du nombre optimal de CPs pour la construction d'un modèle ACP qui représente adéquatement le système étudié. Si peu de CPs sont sélectionnées par rapport à celles exigées, le modèle sera inadéquat et la représentation des résultats du processus sera incomplète. Par contre, si plus de CPs sont retenues, le modèle sera surparamétré et peut éventuellement contenir des bruits de mesures. Pour cela, nous utilisons et comparons trois approches (PCV, VNR et PRESS) ([13], [14], [15]) disponibles dans la littérature pour la détermination de la structure d'un modèle ACP. Ainsi, nous améliorons le troisième critère (PRESS) pour la proposition d'un nouveau.

A. Pourcentage Cumulé de la Variance (PCV)

Le premier critère est le pourcentage cumulé de la variance (PCV). Il mesure le pourcentage de la variance capturée par les ℓ CPs :

$$PCV(\ell) = 100 \left(\frac{\sum_{j=1}^{\ell} \lambda_j}{\sum_{j=1}^m \lambda_j} \right) \% \quad (25)$$

Avec ce critère, on peut sélectionner un PCV qui peut satisfaisant par exemple 90%, 95%, ou 99% de la variabilité de X . C'est un critère très subjectif. Le problème est que nous cherchons un modèle tout en retenant le maximum possible de variance mais en même temps avec un minimum possible de CPs.

B. Variance de l'Erreur de Reconstruction (VER)

Le deuxième critère est la variance de l'erreur de reconstruction (VER). Lorsque le modèle ACP est utilisé pour reconstruire des valeurs manquantes ou des variables défectueuses, l'erreur de reconstruction est une fonction du nombre de CPs. Le minimum trouvé directement dans le calcul du VNR (variance non reconstruite) détermine le nombre de CPs à retenir. Le VNR de la j -ième variable est une fonction de ℓ et définit comme suit :

$$\sigma_j(\ell) = \text{var}\{\xi_j^T(x - x^j)\} = \frac{\tilde{\xi}_j^T \Sigma \tilde{\xi}_j}{(\tilde{\xi}_j^T \tilde{\xi}_j)^2} \quad (26)$$

où $\tilde{\xi}_j = \tilde{C}\xi_j$ et ξ_j correspond au j -ième colonne de la matrice identité.

Pour trouver le nombre optimal des CPs, il faut minimiser la variance $\sigma_j(\ell)$. En considérant tous les défauts possibles, le critère VNR à minimiser est le suivant :

$$VNR(\ell) = \min_{\ell} \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j(\ell)}{\text{var}\{\xi_j^T x\}} = \min_{\ell} \sum_{j=1}^m \frac{\sigma_j(\ell)}{\xi_j^T \Sigma \xi_j} \quad (27)$$

C. Validation croisée

La validation croisée est un critère statistique très populaire pour le choix du nombre de composantes utiles pour un modèle ACP. Cette procédure de validation croisée est basée sur la minimisation de la somme des carrés des erreurs de prédiction (PRESS) entre les données observées et celles estimées par le modèle obtenu à partir d'un jeu d'identification différent :

$$PRESS(\ell) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n SPE_k(\ell) \quad (28)$$

La ℓ -ième composante pour laquelle le minimum de $PRESS$ apparaît sera la dernière composante à retenir et donc le modèle ACP sera représenté par ℓ CPs.

Cependant et suite à un développement par la théorie des perturbations, on notera que pour n grand, la fonction $PRESS$ devient très voisine de la somme des valeurs propres du SR [17]. Suite à cette approximation, nous montrons que la quantité $PRESS$ n'est autre que la variance du vecteur résiduel donnant lieu à la distance SPE :

$$\begin{aligned} PRESS(\ell) &\approx \text{var}(\tilde{x}) = E(\|\tilde{x}\|^2) \\ &= \text{var}(\tilde{t}) = E(\|\tilde{t}\|^2) = \text{trace}(\tilde{\Lambda}) \end{aligned} \quad (29)$$

Par conséquent, la quantité $PRESS$ est alors décroissante en ℓ et son minimum correspond à la dernière composante principale ($\ell = m$). Ceci complique la tâche de sélection du nombre optimal de CPs. En plus, nous avons affirmé que l'efficacité de l'outil ACP est basée sur ce choix. En effet une détermination judicieuse de la structure du modèle ACP favorise durant la phase test la projection des défauts et des bruits sur le SR et non pas sur le SP. Par conséquent, en absence des défauts, le SPE devrait être une quantité très faible. Ce qui justifie le raisonnement de l'idée de la validation croisée qui consiste à la minimisation de la quantité $PRESS$. D'autre part, cela signifie que la moyenne de la distance T2 devrait être une quantité croissante en ℓ .

Puisque l'objectif est de sélectionner la CP qui correspond au minimum de la quantité PRESS, nous devons chercher aussi à maximiser la moyenne des T2 (MT2) :

$$\begin{aligned} MT2(\ell) &= \text{var}(\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{t}) = E(\|\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{t}\|^2) \\ &= \text{var}(\hat{P}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^T\hat{x}) = E(\|\hat{P}\hat{\Lambda}^{-\frac{1}{2}}\hat{P}^T\hat{x}\|^2) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T2_k(\ell) = \ell \end{aligned} \quad (30)$$

Cette fonction est strictement croissante et son maximum correspond à la dernière CP. Puisqu'il s'agit d'un problème d'optimalité, le nombre de CPs utiles pour la construction d'un modèle ACP, correspond à celle qui optimise les quantités PRESS et MT2. Pour cela, nous proposons d'étudier la valeur absolue de la différence entre ces deux critères afin d'aboutir à la forme donnée par :

$$Dif(\ell) = |MT2(\ell) - PRESS(\ell)| = |\ell - \text{trace}(\tilde{\Lambda})| \quad (31)$$

Par la suite, nous proposons d'analyser sa variation représentée par la fonction suivante :

$$\begin{aligned} G(\ell) &= \frac{Dif(\ell) - Dif(\ell - 1)}{Dif(\ell)} \\ &= \frac{\lambda_\ell + 1}{|\ell - \text{trace}(\tilde{\Lambda})|} \text{sgn}(\ell - \text{trace}(\tilde{\Lambda})) \end{aligned} \quad (32)$$

Cette fonction devrait avoir un maximum qui correspond à la q -ième composante principale. Ensuite, elle se stabilise à partir de la $(q + 1)$ -ième composante qui représente le nombre optimal à retenir :

$$G(q) = \underbrace{\max}_q \left(\frac{\lambda_q + 1}{|q - \text{trace}(\tilde{\Lambda})|} \text{sgn}(q - \text{trace}(\tilde{\Lambda})) \right) \quad (33)$$

La q -ième composante pour laquelle le maximum de la quantité G apparaît sera l'avant dernière composante à retenir. Le modèle ACP sera représenté par $\ell = q + 1$ CPs.

D. Résultats Numériques

Dans cet exemple, nous avons simulé une simple base de données de cinq variables qui a la structure suivante [16] :

$$X = As \quad (34)$$

où

$$A = \begin{bmatrix} -0.07 & 0.63 & -0.32 & -0.72 & -0.60 \\ -0.45 & -1.05 & -1.08 & -0.72 & 0.01 \\ 0.97 & 0.11 & -0.47 & -0.62 & 0.51 \\ 0.65 & 0.26 & -0.24 & 0.96 & -0.01 \\ -1.02 & 0.19 & -0.17 & 0.13 & -0.03 \end{bmatrix}$$

Les éléments de s sont des signaux aléatoires non corrélés centrés à moyenne nulle et d'écart type unité. Ces données sont constituées de 200 observations et se composent de deux parties. La première est composée des 100 premières observations. Elle représente le fonctionnement normal du processus et sert pour la recherche d'un modèle ACP. La deuxième moitié des données représente la partie test. Cette dernière est générée par l'ajout d'un défaut sous forme d'un vecteur aléatoire distribué normalement avec

une moyenne nulle et un écart type de 5. Le type de défaut est une dégradation dans la quatrième variable (Fig.1).

Pour construire le modèle ACP, les deux critères PCV et VNR indiquent respectivement 3 et 2 CPs à retenir (Fig.2). Cependant, l'allure du critère PRESS (Fig.3) est une courbe décroissante qui ne permet pas facilement la détermination du nombre de CPs utiles. Si nous cherchons le nombre de CPs qui peut satisfaire une minimisation du critère PRESS et en même temps une maximisation de MT2, nous pouvons déterminer cette valeur facilement à travers le nouvel indice G (Fig.4). D'après cette dernière, le nombre de CPs à retenir est 3. Pour la suite de ce papier, nous retenons ce nombre pour la construction du modèle ACP car il représente une valeur optimale qui rend l'étape de la détection de défauts plus efficace (Fig.5). Le monitoring ou bien le suivi du processus avec les deux critères T2 et SPE sont présentés dans la figure 5. Pour identifier la variable défectueuse, nous pouvons choisir librement deux observations aberrantes. Sans perte de généralité, nous considérons la 140ième et la 180ième observations.

Dans la figure 6, chaque variable possède un groupe de quatre barres (A, B, C et D) qui représentent respectivement la contribution à la T2, la contribution classique au SPE, la nouvelle contribution (forme I) au SPE et la nouvelle contribution (forme II) au SPE. Nous savons que la quatrième variable est la seule en défaut. Par conséquent, nous pouvons remarquer facilement, à partir de la figure 6, que les deux nouvelles approches sont plus efficaces que la contribution classique au SPE et même à la contribution à T2. Nos deux nouvelles méthodes ne suspectent que la variable défectueuse x_4 . Cependant, les autres approches suspectent d'autres variables en plus, exemple : x_1 (Fig 6.a) et x_2 (Fig 6.b). D'après la même figure, nous ne remarquons pas de grande différence entre nos deux nouvelles approches. Par contre, la méthode (forme II) est avantagée par rapport à celle de la forme I par le gain dans le temps de calcul.

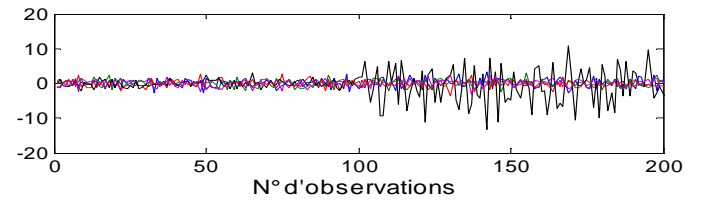


Fig. 1. Les mesures des variables (mesures dégradées : 4ième variable ; mesures normales : le reste des variables).

VI. CONCLUSION

Dans ce papier, nous avons exposé le suivi statistique des processus basé sur l'ACP, y compris la détection et l'identification de défauts. Deux indices de détection des anomalies, T2 et SPE, sont décrits pour la réalisation d'un tel monitoring. Nous avons présenté un nouveau critère plus efficace pour la sélection du nombre optimal de CPs utiles dans la construction d'un modèle ACP.

Le calcul des contributions est une méthode très utilisée pour l'identification ou l'isolation de défauts. Après une analyse de la contribution au critère T2 et de la contribution classique au critère SPE, nous avons prouvé que cette dernière ne permet pas d'identifier précisément les variables

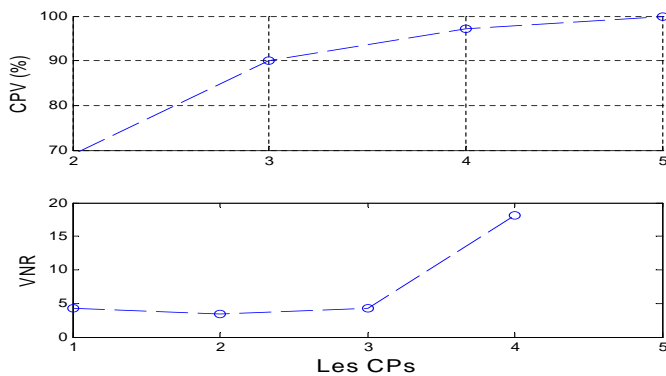


Fig. 2. Les deux critères de sélection : PCV et VNR.

défectueuses. Pour cette raison, et en se basant sur le fait que le défaut se projette sur le sous-espace résiduel, nous avons proposé deux nouvelles méthodes pour le calcul de la contribution au SPE et nous avons montré leurs efficacités à partir d'un exemple simulé.

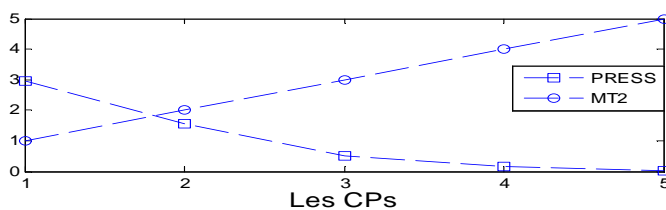


Fig. 3. Les deux critères : PRESS et MT2.

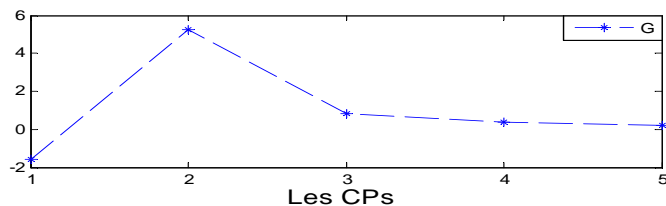


Fig. 4. Le nouveau critère de sélection : G.

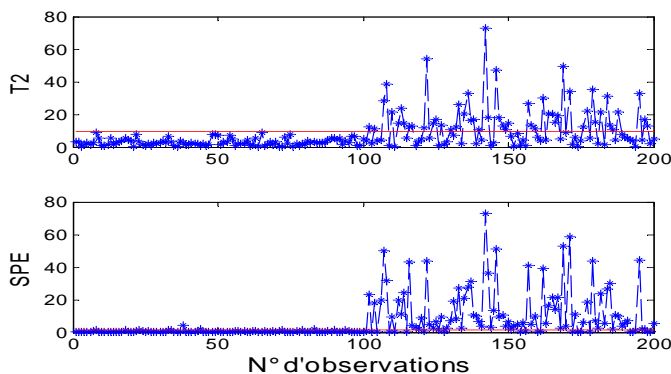


Fig. 5. Détection de défauts basée sur les critères T2 et SPE.

RÉFÉRENCES

[1] D. Wang and J.A. Romagnoli, « Robust multi-scale principal components analysis with applications to process monitoring, » *Journal of Process Control*, vol. 15, no. 8, pp. 869–882, 2005.
 [2] L. Lebart, A. Morineau et M. Piron, *Statistique Exploratoire Multidimensionnelle*, Dunod, Paris, France, 2004.

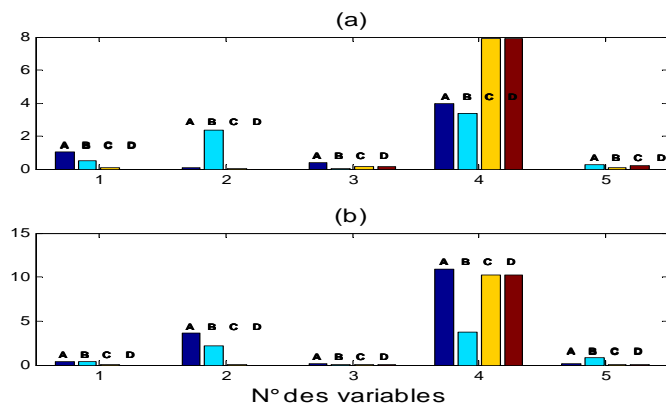


Fig. 6. Contributions des variables pour les observations : (a) 140ième, (b) 180ième; chaque variable possède un groupe de quatre barres représentant respectivement : (a) la contribution à la T2, (B) la contribution classique au SPE, (C) la nouvelle contribution au SPE (forme I) et (D) la nouvelle contribution au SPE (forme II).

[3] S. Verboven and M. Hubert, « LIBRA : a MATLAB Library for Robust Analysis, » *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 75, no. 2, pp. 127–136, 2005.
 [4] M. Hubert, P.J. Rousseeuw and K.V. Branden, « ROBPCA : A New Approach to Robust Principal Component Analysis, » *Technometrics*, vol. 47, no. 1, pp. 64–79, 2005.
 [5] S. Engelen, M. Hubert and B.K. Vandenberg, « A Comparison of Three Procedures for Robust PCA in High Dimensions, » *Austrian Journal of Statistics*, vol. 34, no. 2, pp. 117–126, 2005.
 [6] B. Mnassri, E.M. El Adel and M. Ouladsine, « Fault Localization Using Principal Component Analysis Based on a New Contribution to the Squared Prediction Error, » *16th Mediterranean Conference on Control and Automation*, Ajaccio, France, pp. 65–70, 2008.
 [7] B. Mnassri, B. Ananou, E.M. El Adel et M. Ouladsine, « Détection et localisation de défauts des Wafers par des approches statistiques multivariées et calcul des contributions, » *Conférence Internationale Francophone d'Automatique*, Bucarest, Roumanie, 2008.
 [8] J.A. Westerhuis, S.P. Gurden and A.K. Smilde, « Generalized contribution plots in multivariate statistical process monitoring, » *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems*, vol. 51, no. 1, pp. 95–114, 2000.
 [9] T. Kourti and J.F. MacGregor, « Multivariate SPC Methods for Processes and Product Monitoring, » *Journal of Quality Technology*, vol. 28, no. 4, pp. 409–428, 1996.
 [10] T. Kourti, P. Nomikos and J.F. MacGregor, « Analysis, monitoring and fault diagnosis of batch process using multiblock and multiway PLS, » *Journal of Process Control*, vol. 5, no. 4, pp. 277–284, 1995.
 [11] T. Kourti, « Application of latent variable methods to process control and multivariate statistical process control in industry, » *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, vol. 19, no. 4, pp. 213–246, 2005.
 [12] J.-M. Lee, C. Yoo and I.-B. Lee, « Statistical process monitoring with independent component analysis, » *Journal of Process Control*, vol. 14, no. 5, pp. 467–485, 2004.
 [13] S. Joe Qin and R. Dunia, « Determining the number of principal components for best reconstruction, » *Journal of Process Control*, vol. 10, no. 2, pp. 245–250, 2000.
 [14] S. Joe Qin « Statistical process monitoring : basics and beyond, » *Journal of Chemometrics*, vol. 17, no. 8–9, pp. 480–502, 2003.
 [15] S. Valle, W. Li and S. Joe Qin, « Selection of the Number of Principal Components : The Variance of the Reconstruction Error Criterion with a Comparison to Other Methods, » *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 38, no. 11, pp. 4389–4401, 1999.
 [16] C. Lee, S.W. Choi, J.-M. Lee and I.-B. Lee, « Sensor Fault Identification in MSPM Using Reconstructed Monitoring Statistics, » *Ind. Eng. Chem. Res.*, vol. 43, no. 15, pp. 4293–4304, 2004.
 [17] P. Besse, L. Ferre, « Sur l'usage de la validation croisée en analyse en composantes principales, » *Revue de statistique appliquée*, vol. 41, no. 1, pp. 71–76, 1993.