

# Une méthode algébrique de diagnostic de défauts

A. Moussa Ali<sup>\*</sup>, C. Join<sup>\*,\*\*</sup>, F. Hamelin<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> CRAN, Nancy-Université, CNRS, BP 239, 54506 Vandœuvre, France  
e-mail : {amoussaa,cjoin,fhamelin}@cran.uhp-nancy.fr

<sup>\*\*</sup> ALIEN-INRIA FUTURS, France. email : cedric.join@inria.fr

---

## Résumé

Cet article propose d'étendre au domaine du diagnostic de défauts les méthodes algébriques développées pour l'identification des systèmes linéaires (Fliess and Sira-Ramirez [2003]). En exploitant les outils et résultats de l'analyse pseudo-spectrale, une approche est proposée pour la génération d'indicateurs de défaut. Le principal atout de cette approche est qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de détecter, localiser et identifier les défauts uniquement à partir des mesures de la commande et de la sortie sans à avoir identifier explicitement un modèle du système. Un exemple numérique est fourni et commenté afin d'illustrer l'approche proposée.

Keywords: Théorie des distributions, analyse spectrale, défaut actionneur, défaut capteur, FDI

---

## 1. INTRODUCTION

La modélisation mathématique des systèmes (décrivant les relations entre les commandes et les sorties) est fondamentale pour effectuer le diagnostic de défauts à base de modèle. Le plus souvent, le modèle du processus n'est pas connu parfaitement et certains paramètres inconnus. Ainsi, des méthodes d'identification sont souvent nécessaires pour pouvoir appliquer toute méthode de diagnostic à base de modèle. On trouvera dans (Isermann [2006]) et (Patton et al. [2000]) la plupart des méthodes classiques d'identification pour les processus SISO linéaires et non linéaires qui sont appropriées au diagnostic de défauts.

Dans cet article et à l'opposé des approches classiques, aucune méthode d'identification du système n'est pas requise au préalable. En effet, les seules hypothèses que nous fixons concernent :

- la structure du système,
- la structure des signaux de défaut.

Plus précisément, pour la première hypothèse, nous considérons les systèmes régis par une équation différentielle à coefficients constants. En ce qui la seconde hypothèse, nous supposons que les défauts actionneur et capteur se modélisent par des signaux additifs dits structurés (Fliess and Sira-Ramirez [2003]).

Pour l'élaboration de l'algorithme de diagnostic, on adopte des formulations distributionnelles (également utilisées dans Belkoura and Richard [2006]). Ces formulations ont pour avantage de transformer le problème de diagnostic en un problème d'analyse pseudo-spectrale à partir duquel on peut détecter, localiser et identifier les défauts sans estimer explicitement les paramètres du système. Cet aspect différencie notre approche de celle proposée dans Fliess et al. [2004] où les paramètres incertains sont d'abord estimés puis utilisés pour détecter les défauts.

Le document est organisé comme suit. La section 2 est consacrée aux rappels des outils d'analyse mathématique utilisés dans le document. Dans la section 3, nous fixons les différentes hypothèses sur la structure du système et celles des signaux de défaut avant de définir et résoudre le problème de diagnostic. La section 4 applique la méthode à un système du premier ordre dont les paramètres sont inconnus.

## 2. OUTILS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

### 2.1 Théorie des distributions

Nous rappelons dans cette section quelques définitions et résultats de la théorie des distributions (Schwartz [1966]) et fixons quelques notations.

Soit  $\mathcal{K}$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Le support d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{K}$ , noté  $Supp(f)$ , est le plus grand ensemble fermé en dehors duquel la fonction est identiquement nulle. L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact dans  $\mathcal{K}$  est noté  $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ ,  $\mathcal{D}'(\mathcal{K})$  est l'espace des distributions sur  $\mathcal{K}$  i.e. l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur  $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ . Si une application  $f$  est localement mesurable sur  $\mathcal{K}$ , alors on définit la distribution régulière  $[f] \in \mathcal{D}'(\mathcal{K})$  pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\mathcal{K})$  par  $\langle [f], \phi \rangle = \int f(s)\phi(s)ds$ . De plus, si la fonction  $f$  est une fonction continue, excepté au point  $x$  où elle présente un saut fini  $s_x$ , alors  $[f] = \dot{f} - s_x\delta_x$ , avec  $\dot{f}$  la dérivée usuelle de  $f$ . Le complémentaire du plus grand ouvert de  $\mathcal{K}$  sur lequel une distribution  $T$  est identiquement nulle<sup>1</sup> est appelé le support de  $T$ ; on le note aussi  $Supp(T)$ . Un ensemble de distributions de grand intérêt dans la théorie du contrôle est l'ensemble  $\mathcal{D}'_+$  des distributions à support borné à gauche (contenu dans  $[0, +\infty[$ ). Muni de la loi de convolution et de l'addition, cet ensemble devient une

---

<sup>1</sup> On dit qu'une distribution  $T$  est nulle sur  $\Omega \subset \mathcal{K}$  si  $T(\phi) = 0$  pour tout  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

algèbre de convolution avec la distribution de Dirac  $\delta$  comme élément neutre de la convolution. On note par  $\delta_\tau$  la distribution de Dirac retardée de  $\tau$  par rapport à l'origine. On dit qu'une distribution  $T$  est d'ordre fini si il existe un entier  $m$  tel que pour tout compact  $\Omega \subset \mathcal{K}$  d'intérieur non vide

$$\exists C > 0 : \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega), |T(\phi)| \leq C \sup_{0 \leq i \leq m} \|\phi^{(i)}\|_\infty$$

Le plus petit entier  $m$  donnant l'inégalité ci-dessus, noté  $Ordre(T)$ , est appelé ordre de la distribution  $T$ . La distribution de Dirac  $\delta$  est d'ordre 0, de même qu'une distribution régulière. Les opérations de dérivation, d'intégration et de translation peuvent être traduites par des produits de convolution :

$$\dot{y} = \delta^{(1)} * y, \int_0^t y = H * y, y(t - \tau) = \delta_\tau * y$$

avec  $H$  l'échelon unitaire (Heaviside). Le théorème qui suit est le résultat principal sur lequel se fonde la méthode de détection et localisation de défauts présentée.

*Théorème 2.1.* (Schwartz [1966])

La multiplication d'une distribution  $T$  à support compact ( $Supp(T)$  compact) et d'ordre fini  $m$  par une fonction régulière  $\alpha$  s'annulant sur  $Supp(T)$  ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$ , est une distribution nulle (i.e  $\alpha T = 0$ ).

Enfin, nous clôturons cette partie en donnant deux résultats importants, faciles à vérifier et que nous utiliserons par la suite.

Pour tout  $k, n \in \mathbb{N}, t, \tau \in \mathbb{R}$ , on a

$$(t - \tau)^k \delta_\tau^{(n)} = \begin{cases} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \delta_\tau^{(n-k)} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1)$$

Pour tout  $S, T \in \mathcal{D}'(\mathcal{K}), t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , on a

$$t^n (S * T) = \sum_{k=0}^n C_n^k (t^k S) * (t^{n-k} T) \quad (2)$$

*Remarque 2.1.* le produit de convolution de deux distributions n'est pas toujours défini, mais est bien défini pour les distributions à support borné à gauche.

## 2.2 Analyse spectrale

Soient  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$  des matrices de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . On suppose qu'il existe au moins un vecteur  $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_i)_{1 \leq i \leq k}$  qui réduit le rang du faisceau de matrices  $\tilde{A}_0 - \tilde{\beta}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{\beta}_2 \tilde{A}_2 - \dots - \tilde{\beta}_k \tilde{A}_k$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\tilde{X} \in \mathbb{R}^n / \{0\}$  tel que

$$(\tilde{A}_0 - \tilde{\beta}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{\beta}_2 \tilde{A}_2 - \dots - \tilde{\beta}_k \tilde{A}_k) \tilde{X} = 0 \quad (3)$$

Soient maintenant  $A_0, A_1, \dots, A_k$  des matrices engendrées par perturbation des matrices  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$ . Le problème que l'on veut résoudre dans cette section est le suivant : connaissant les matrices perturbées  $A_0, A_1, \dots, A_k$  (sans connaître les matrices  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$ ), on souhaite déterminer le vecteur  $\beta = (\beta_i)_{1 \leq i \leq k}$  solution du problème

$$\begin{cases} \min_{\|X\|=1, \beta} \|(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k) X\|^2 \\ (A_0 - \beta_1 \tilde{A}_1 - \beta_2 \tilde{A}_2 - \dots - \beta_k \tilde{A}_k) X = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Notons que si la norme  $\|\bullet\|$  considérée est la norme quadratique  $\|\bullet\|_2$ , alors la quantité

$\min_{\|X\|=1, \beta} \|(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k) X\|$  est exactement  $\sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k)$ , où  $\sigma_{\min}(\bullet)$  désigne la plus petite valeur singulière. Ainsi le problème énoncé ci-dessus peut être remplacé par la recherche de  $\beta$  solution de

$$\begin{cases} \min_{\beta} \sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k) \\ (\tilde{A}_0 - \beta_1 \tilde{A}_1 - \beta_2 \tilde{A}_2 - \dots - \beta_k \tilde{A}_k) X = 0 \\ \|X\| = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Posons pour  $\epsilon \geq 0$

$$\Lambda_\epsilon(A_0, \dots, A_k) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_{\min}(A_0 - \lambda_1 A_1 - \dots - \lambda_k A_k) \leq \epsilon\}$$

L'ensemble  $\Lambda_\epsilon(A_0, \dots, A_k)$  a plus de chance d'être vide pour de petites valeurs de  $\epsilon$ . En supposant que le plus petit ensemble non vide est obtenu pour  $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\Lambda_{\epsilon_0}(A_0, \dots, A_k)$  fournit également une bonne approximation du vecteur  $\beta$  solution des problèmes (4) et (5). Le cas  $k = 1$  a déjà fait l'objet de quelques études dans la littérature (Boutry et al. [2005] et Wright and Trefethen [2002]) et fait appel à la notion de valeurs propres généralisées. Pour  $k > 1$ , on va montrer qu'avec des dimensions  $m$  et  $n$  convenables, on peut toujours se ramener au cas  $k = 1$ .

*Définition 2.1.* (Conoyau d'une matrice)

Le conoyau d'une matrice  $M$ , noté  $coker(M)$ , est une matrice  $N$  telle que  $NM = 0$ . Une matrice peut posséder plus d'une matrice conoyau.

Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m > n$  et  $A$  une matrice de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Il existe une matrice orthogonale  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et une matrice triangulaire rectangle  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que  $A = QR$ . Cette décomposition est connue sous le nom de factorisation  $qr$ . Elle nous fournit également un conoyau de dimension  $((m-n) \times m)$  de la matrice  $A$ , il s'agit de la matrice  $N$  dont les lignes sont les transposées des  $m-n$  dernières colonnes de  $Q$  (i.e.  $N = Q(:, n+1 : m)^T$ ). En effet,  $Q$  étant orthogonal, on a

$$NQ = [0_{m-n, n} \ I_{m-n}] \text{ et}$$

$$NA = NQR$$

$$= [0_{m-n, n} \ I_{m-n}] R$$

$$= 0_{m-n, n} R(1 : n, :) + I_{m-n} R(n+1 : m, :)$$

$$= 0_{m-n, n}$$

Donnons à présent une résolution du problème énoncé ci-dessus. Soit  $m > (k-1)n$  et considérons  $N_k$  le conoyau de la matrice  $A_k$  de dimension  $(m-n) \times m$  obtenu à partir de la décomposition  $qr$ , alors on peut écrire

$$\sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \dots - \beta_k A_k) =$$

$$\sigma_{\min}(N_k A_0 - \beta_1 N_k A_1 - \dots - \beta_{k-1} N_k A_{k-1})$$

car  $\sigma_{\min}$  est invariable par transformation orthogonale. Soit maintenant  $N_{k-1} \in \mathbb{R}^{(m-2n) \times (m-n)}$  le conoyau de  $N_k A_{k-1}$ . On a

$$\sigma_{\min}(N_k A_0 - \beta_1 N_k A_1 - \dots - \beta_{k-1} N_k A_{k-1}) =$$

$$\sigma_{\min}(N_{k-1} N_k A_0 - \dots - \beta_{k-2} N_{k-1} N_k A_{k-2})$$

Et ainsi de suite, on aboutit à l'égalité

$$\sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \dots - \beta_k A_k) =$$

$$\sigma_{\min}(P_{1,k} A_0 - \beta_1 P_{1,k} A_1)$$

où

$$P_{1,k} = N_2 N_3 \dots N_k \text{ et } N_j$$

de dimension  $(m - (k - j + 1)n) \times (m - (k - j)n)$ , désigne le conoyau de  $N_{j+1} N_{j+2} \dots N_k A_{j+1}$ ,  $2 \leq j \leq k - 1$  (ceci justifie le choix  $m > (k - 1)n$ ). Ces opérations permettent la détermination de  $\beta_1$  et la même démarche permet d'approximer les autres composantes du vecteur  $\beta$  solution du problème.

Un algorithme évident de calcul de  $\underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(A - \lambda B)$

pour  $A$  et  $B$  des matrices de même dimension consiste à évaluer  $\sigma_{\min}(A - \lambda_i B)$  pour des réels  $\lambda_i$  discrétisés et générer des courbes de niveaux sur lesquelles on relèvera les minima éventuels. Dans le cas de l'étude faite précédemment, pour chaque élément  $\beta_i$  cherché, le nombre de solutions distinctes varie entre 1 et  $\inf(n, m - (k - 1)n)$ . Des contraintes supplémentaires sur  $\beta$  permettront de chercher des solutions particulières aux problèmes (4) et (5).

Une autre manière pour déterminer le vecteur  $\beta$  est de déterminer chaque élément  $\beta_i$  en tenant compte des valeurs des éléments précédents. ainsi, en supposant  $\beta_1, \dots, \beta_{j-1}$  disponibles, on détermine  $\beta_j$  par

$$\beta_j = \underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(P_{j,k} A_0 - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_i P_{j,k} A_i - \lambda P_{j,k} A_j)$$

avec  $P_{j,k}$  la matrice conoyau commune des matrices  $A_{j+1}, \dots, A_k$  pour  $j = 1, \dots, k - 1$ .

Ceci permet un affinage des calculs et réduit les erreurs d'approximation. En effet, les multiplications successives par les matrices conoyau peuvent conduire à un résultat numériquement faux.

Dans la section suivante, nous montrons l'intérêt des notions présentées dans cette section, puisque la méthode de diagnostic que nous développons nous conduit à la résolution d'un problème mis sous la forme (3), avec les matrices  $A_i$  dépendant des informations du système et le vecteur  $\beta$  contenant les paramètres à utiliser pour accomplir la tâche de diagnostic.

### 3. DÉTECTION ET LOCATION DE DÉFAUTS

Avant le développement des différentes étapes de l'algorithme de diagnostic, nous allons fixer dans les deux prochaines sous-sections certaines hypothèses concernant la structure du système ainsi que les défauts considérés.

#### 3.1 Structure du modèle

On se situe dans le formalisme des distributions avec des descriptions entrées/sorties en supposant que la commande  $u_r(t)$  et la sortie  $y_r(t)$  du système considéré ( $\Sigma$ ) vérifient une équation de la forme

$$a_n y_r^{(n)} + a_{n-1} y_r^{(n-1)} + \dots + a_0 y_r = b u_r + \phi_0 \quad (6)$$

avec les dérivées  $y_r^{(i)}$  à considérer au sens des distributions,  $\phi_0$ , une distribution combinaison linéaire des dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $n - 1$  de la distribution de Dirac  $\delta$  (contenant les conditions initiales).

Etant données la commande  $u_r$  et les conditions initiales  $y_r(0)$ ,  $y_r^{(1)}(0)$ , ...,  $y_r^{(n-1)}(0)$  (donc  $\phi_0$ ), la résolution de l'équation (6) fait appel à la notion de solution de Green.

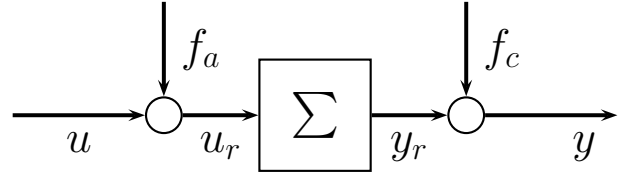


FIG. 1. Système avec défaut actionneur et défaut capteur.

En présence d'un défaut actionneur noté  $f_a$  et d'un défaut capteur noté  $f_c$ , le système est soumis à la commande  $u(t) + f_a(t)$  et délivre une sortie  $y(t) - f_c(t)$  où  $u(t)$  est la commande calculée par le contrôleur et  $y(t)$  est la sortie mesurée du système, comme illustré à la figure (1). Ainsi, les signaux  $u(t)$  et  $y(t)$  vérifient, à chaque instant  $t$ , l'équation (7) ci-dessous.

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = \phi_0 + b u + b f_a + a_n f_c^{(n)} + \dots + a_0 f_c \quad (7)$$

#### 3.2 Structure des défauts

Par la suite, nous dirons qu'un signal  $f$  est structuré (Fließ and Sira-Ramirez [2003]) s'il existe un entier  $m \in \mathbb{N}$  tel que la distribution  $f^{(m)}$  peut s'exprimer comme combinaison linéaire finie de  $(\delta_{\tau_i}^j)_{i,j \in \mathbb{N}}$  avec  $\tau_i \in \mathbb{R}$ . Il en résulte que tous les signaux de la forme  $k(t - \tau)^n H(t - \tau)$  sont structurés et en particulier les signaux échelon, rampe et en escaliers.

Dans ce document, nous traitons le cas des défauts  $f_a$  et  $f_c$  modélisés par des échelons retardés (défauts abrupts), à savoir

$$f_a = l_a H(t - \tau_a) \quad (8)$$

$$f_c = l_c H(t - \tau_c) \quad (9)$$

avec  $\tau_a$ ,  $l_a$  et  $\tau_c$ ,  $l_c$  les temps d'apparition et amplitudes respectifs de  $f_a$  et  $f_c$ . Notons que la considération de la structure particulière ci-dessus ne constitue pas une restriction à l'application de l'algorithme que nous allons développer, celui-ci pouvant s'appliquer au diagnostic de tout défaut de type structuré.

#### 3.3 Système avec défaut actionneur

Sous l'hypothèse d'un défaut actionneur modélisé par (8), l'équation (7) devient

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = \phi_0 + b u + b l_a H(t - \tau_a) \quad (10)$$

A partir de cette structure de modèle, des mesures de la commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$ , l'algorithme de détection de défauts présenté par la suite requiert que la connaissance de l'ordre  $n$ . Les paramètres  $a_i$  et  $b$  du système sont supposés inconnus, et ne sont pas à estimer. Cet algorithme se compose de trois étapes essentielles représentées par les trois opérations : dérivation, multiplication et intégration.

La dérivation des deux membres de l'équation (10) donne

$$a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - b u^{(1)} = \phi_0^{(1)} + b l_a \delta_{\tau_a} \quad (11)$$

avec

(1)  $\phi_0^{(1)}$  une distribution de support  $Supp(\phi_0^{(1)}) = \{0\}$  et d'ordre  $Ordre(\phi_0^{(1)}) = n$ .

Ainsi  $t^k \phi_0^{(1)} = 0, \forall k > n$

(2)  $\delta_{\tau_a}$  une distribution de support  $Supp(\delta_{\tau_a}) = \{\tau_a\}$  et d'ordre  $Ordre(\delta_{\tau_a}) = 0$ .

Ainsi  $(t - \tau_a)\delta_{\tau_a} = 0$

Soit la fonction  $\alpha_1$  définie pour  $t \geq 0$  par

$$\alpha_1(t) = t^{n+1}(t - \tau_a) \quad (12)$$

alors

$$\alpha_1(a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}) = 0 \quad (13)$$

car, d'après le théorème (2.1), la multiplication par  $\alpha_1$  annihile les contributions de  $f_a$  ainsi que celles des conditions initiales (second membre de l'équation (11)).

En développant l'égalité (13), on obtient (pour  $t \geq 0$ )

$$t^{n+2}[a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu] - \tau_a t^{n+1}[a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu] = 0 \quad (14)$$

ou encore, en posant  $W_{i,j} = t^{n+i} y^{(j+1)}$  et  $V_i = t^{n+i} u^{(1)}$  pour  $i = 1, 2$  et  $j = 0, \dots, n$

$$\left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{2,j} - bV_2 \right] - \tau_a \left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{1,j} - bV_1 \right] = 0 \quad (15)$$

Notons que  $W_{i,j}$  et  $V_i$  peuvent se mettre, par application de (1) et (2), sous forme de combinaisons linéaires finies des dérivées des termes  $t^k y$  et  $t^k u$  respectivement. En effet on a :

$$W_{i,j} = \sum_{k=0}^{inf(n+i,j+1)} (-1)^k C_k^{n+i} \frac{(j+1)!}{(j+1-k)!} \delta^{(j+1-k)} * (t^{n+i-k} y)$$

$$V_i = \delta^{(1)} * (t^{n+i} u) - (n+1)(t^{n+i-1} u) \quad (16)$$

D'après ces relations, pour éliminer les dérivations dans l'égalité (15), il suffit d'appliquer successivement  $p$  fois la convolution par  $H$ , avec  $p > n$ . Ainsi dans l'égalité

$$H^{*p} \left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{2,j} - bV_2 \right] - \tau_a H^{*p} \left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{1,j} - bV_1 \right] = 0 \quad (17)$$

avec  $p > n$  et  $H^{*p} = \underbrace{H * H * \dots * H}_p$ , il ne figure plus

que des intégrations (plus robustes numériquement que les dérivations).

Remarquons que  $Supp(H^{*p} * \delta_{\tau_a}) = [\tau_a + \infty[$  et  $\forall t < \tau_a$

$$H^{*p} * \left[ \sum_{i=0}^n t^n a_i y^{(i+1)} - b t^n u^{(1)} \right] = 0$$

car

$$H^{*p} * [t^n \phi_0^{(1)}] = H^{*p} * [t^n \delta_{\tau_a}] = 0$$

Ainsi, pour  $t < \tau_a$ , l'égalité (15) ne permet pas l'estimation de  $\tau_a$  ( $\tau_a$  n'est pas identifiable avant l'apparition du défaut). Cependant pour  $t \geq \tau_a$ , les redondances obtenues par variation de la valeur de  $p$  dans l'égalité (17) nous donnent la formulation spectrale du problème

$$[A_2 - \tau_a A_1] X = 0 \quad (18)$$

en posant, pour  $i = 1, 2$

$$A_i = \begin{pmatrix} H^{*n+1} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+1} * V_i \\ H^{*n+2} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+2} * V_i \\ H^{*n+3} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+3} * V_i \\ \vdots & & \vdots \\ H^{*n+m} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+m} * V_i \end{pmatrix}$$

$$X = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_{n-p} \ \dots \ a_0 \ -b)^T \quad (19)$$

Une fois mise sous cette forme, l'estimation de  $\tau_a$  consiste au calcul de  $\Lambda_0(A_2, A_1)$  (voir section 2.2). En pratique les mesures des signaux  $u$  et  $y$  étant entachées d'erreurs, on aura plutôt  $\tau_a \in \Lambda_\epsilon(A_2, A_1)$ ,  $\epsilon > 0$ . Ainsi, la présence d'un défaut actionneur abrupt sur le système sera exprimée par la stationnarité, à partir de l'instant  $t \geq \tau_a$ , de l'une des valeurs prises par  $\tau_a$  (celle dont le vecteur singulier associé est le plus proche possible du vecteur associé à la valeur précédente).

Après avoir estimé le temps d'apparition du défaut actionneur  $\tau_a$ , un raisonnement similaire nous permet de déterminer l'amplitude  $l_a$  (ou la pente dans le cas d'un défaut de type rampe). En effet, en posant  $\alpha_2 = t^{n+1}$ , (11) devient :

$$\alpha_2(a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}) = b l_a \alpha_2 \delta_{\tau_a}$$

$$\Rightarrow \forall t \geq \tau_a \text{ et } p > n :$$

$$l_a = \frac{H^{*p} * [\alpha_2(q_{n+2} y^{(n+1)} + \dots + q_2 y^{(1)} + q_1 u^{(1)})]}{H^{*p} * [-q_1 \alpha_2 \delta_{\tau_a}]}$$

où  $q = (q_{n+2}, \dots, q_1)^T$  est le plus petit vecteur singulier<sup>2</sup> de la matrice  $A_2 - \tau_a A_1$ .

Les convolutions successives  $H^{*p}$  (intégrations successives) opèrent comme un filtre passe-bas et contribuent à atténuer les perturbations hautes fréquences sur les mesures des signaux.

Pour la génération des matrices  $A_i$ , on a considéré la fonction polynômiale  $\alpha_1$  dans le seul but de simplifier les calculs. Les fonctions amorties, par exemple de la forme  $\alpha(t) = e^{-at} t^{n+1} (t - \tau_a)$ ,  $a > 0$ , conduiraient à la même démarche de raisonnement, avec plus de robustesse par rapport aux bruits de mesure. En effet, ces dernières contribueront à atténuer les bruits de mesures, à l'opposé des fonctions polynômiales, qui accentuent l'effet de ces bruits.

### 3.4 Système avec défaut capteur

Nous reprenons l'étude faite dans la section précédente en considérant cette fois le système en présence non pas d'un défaut actionneur, mais d'un défaut capteur abrupt apparu à l'instant  $\tau_c$  avec une amplitude  $l_c$ . Un tel système est représenté par

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = \phi_0 + bu$$

$$+ l_c (a_n \delta_{\tau_c}^{(n-1)} + \dots + a_0 H(t - \tau_c)) \quad (20)$$

L'application de la dérivation donne

$$a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)} =$$

$$\phi_0^{(1)} + l_c (a_1 \delta_{\tau_c}^{(n)} + \dots + a_0 \delta_{\tau_c}) \quad (21)$$

<sup>2</sup> correspondant à la plus petite valeur singulière

Soit la fonction  $\alpha_3$  définie pour  $t \geq 0$  par

$$\alpha_3(t) = t^{n+1}(t - \tau_c)^{n+1} \quad (22)$$

alors (d'après le théorème (2.1))

$$\alpha_3(a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}) = 0 \quad (23)$$

En posant  $W_{i,j} = t^{n+i}y^{(j+1)}$  et  $V_i = t^{n+i}u^{(1)}$  pour  $i = 1, \dots, n+2$  et  $j = 0, \dots, n$ , on aboutit à la formulation spectrale suivante du problème

$$[A_{n+1} - \beta_n A_n - \dots - \beta_1 A_1 - \beta_0 A_0]X = 0 \quad (24)$$

avec  $A_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n+1$  et  $X$  définis par (19) et  $\beta_i = (-1)^{n-i} C_i^{n+1} \tau_c^{n+1-i}$ ,  $i \leq n$  le coefficient du monôme  $t^i$  dans le polynôme  $-(t - \tau_c)^{n+1}$ .

La logique de décision est similaire à celle de la sous-section précédente. L'estimation du vecteur  $\beta$  est obtenue à partir du calcul de  $\Lambda_\epsilon(A_0, \dots, A_{n+2})$ ,  $\epsilon > 0$  et le temps  $\tau_c$  (en présence de défaut capteur de type échelon) est estimé à partir des composantes de  $\beta$ , par exemple  $\tau_c = \frac{\beta_n}{n+1}$  (c'est la meilleure estimation de  $\tau_c$  car  $\beta_n$  est le seul coefficient linéaire par rapport à  $\tau_c$ ).

Egalement on calcule, comme pour  $l_a$ , l'amplitude  $l_c$  en posant  $\alpha_4 = t^{n+1}(t - \tau_c)^n$  et

$$l_c = (-1)^n \frac{H^{*m} * [\alpha_4(q_{n+2}y^{(n+1)} + \dots + q_2y^{(1)} + q_1u^{(1)})]}{n!H^{*m} * \delta_{\tau_c}}$$

$\forall t \geq \tau_c$  et  $m \geq n+1$

où  $q = (q_{n+2}, \dots, q_1)^T$  est le plus petit vecteur singulier de la matrice  $A_{n+1} - \beta_n A_n - \dots - \beta_0 A_0$ .

### 3.5 Système avec défaut actionneur et défaut capteur

Lorsque les deux défauts, actionneur et capteur, apparaissent simultanément, la seule application des démarches précédentes n'assure pas la détection et la localisation des défauts. En effet, le modèle correspondant étant

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = \phi_0 + bu \quad (25)$$

$$+ bl_a H(t - \tau_a) + l_c (a_n \delta_{\tau_c}^{(n-1)} + \dots + a_0 H(t - \tau_c))$$

la multiplication par  $\alpha_1(t) = t^{n+1}(t - \tau_a)$  ou  $\alpha_3(t) = t^{n+1}(t - \tau_c)^{n+1}$ , après la dérivation, ne nous permet pas d'obtenir la formulation spectrale du problème de diagnostic des défauts. Dans une telle situation, le système de diagnostic que nous proposons est composé de trois sous-systèmes. Le premier consiste à détecter le défaut actionneur, le second concerne la détection du défaut capteur et enfin le troisième qui s'obtient avec

$$\alpha_5(t) = t^{n+1}(t - \tau_a)(t - \tau_c)^{n+1}$$

permet la détection simultanée des deux défauts. Notons qu'avec seulement le dernier sous-système, on peut détecter les défauts, mais sa seule utilisation engendre une détection tardive du premier des défauts apparus. En effet, on montre que l'identification des temps d'apparition des défauts n'est possible qu'à partir de l'instant  $t \geq \max(\tau_a, \tau_c)$ .

En présence des deux types de défauts sur le système, celui qui est apparu en premier peut être détecté seulement à l'aide des estimations de  $l_a$  et  $l_c$  obtenues après les estimations de  $\tau_a$  et  $\tau_c$  respectivement. Pour détecter

le second défaut, l'utilisation des estimations (de  $\tau_a$ ,  $l_a$  et/ou  $\tau_c$ ,  $l_c$ ) obtenues à l'aide de l'algorithme de détection simultanée est nécessaire.

Lorsque le système est altéré à la fois par un défaut capteur et un défaut actionneur, si ce dernier est apparu avant le premier, alors l'estimations de  $\tau_c$  peut permettre la détection du défaut actionneur. En effet, en remplaçant la fonction  $\alpha_1$  considérée dans l'élaboration de l'algorithme d'estimation de  $\tau_a$  par la fonction  $\bar{\alpha}_3(t) = t^{n+1}(t - \tau_a)^{n+1}$ , on aboutira également à l'estimation de  $\tau_a$ , mais avec moins de précision que l'estimation obtenue avec  $\alpha_1$  (à cause de la multiplication supplémentaire par  $(t - \tau_a)^n$ ).

## 4. APPLICATION À UN SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

Considérons le système du premier ordre ( $n = 1$ ) représenté par le modèle entrée/sortie suivant

$$a_1 \dot{y} + a_0 y = bu$$

On simule ce système en boucle fermée avec un correcteur proportionnel-intégral (PI). Les défauts simulés sont des défauts actionneur et capteur de type échelon. Le défaut actionneur apparaît à l'instant  $t = \tau_a = 1$  avec une amplitude  $l_a = 0.8$  et le défaut capteur apparaît à l'instant  $t = \tau_c = 2$  avec une amplitude  $l_c = 0.3$ . Les signaux simulés  $u$  et  $y$  sont représentés sur la figure (2). Les résultats numériques liés à l'exécution des algorithmes développés dans la section précédente sont représentés graphiquement sur les figures (3) à (8). Sur la figure (3), on peut constater la stationnarité de la sortie de l'estimateur de  $\tau_a$  autour de la valeur 1 dans l'intervalle de temps [1; 2]. L'estimation de l'amplitude  $l_a$  est nulle dans la partie  $t < 1$  et prend des valeurs autour de 0.8 sur l'intervalle de temps [1; 2] (figure 6). Ces observations, permettent le diagnostic du défaut actionneur dans l'intervalle de temps [1; 2].

Le comportement stationnaire de  $\tau_c$  sur l'intervalle [1; 2] autour de la valeur 1 (figure 4) ne permet pas de conclure à l'apparition du défaut capteur à cause du comportement de  $l_c$  sur le même intervalle (figure 7). Ceci illustre la remarque faite dans la section 3.

Dès l'apparition du défaut capteur ( $t > 2$ ), les estimations de  $\tau_a$  et  $l_a$  deviennent incohérentes. De plus, l'estimation de  $\tau_c$  et  $l_c$  ne peut pas être réalisée à l'aide du système obtenu en 3.4 (voir figure 4 et 7) puisque deux défauts affectent le système. En revanche, la stationnarité à partir de l'instant  $t > 2$  de l'estimation de  $\beta_2 = \tau_a + 2\tau_c$  (coefficient de  $t^2$  dans  $-(t - \tau_a)(t - \tau_c)^2$ ) autour de la valeur 5 (figure 5) permet de conclure quant à l'apparition du défaut capteur à l'instant  $t = 2$ . En effet l'estimation de  $\beta_2$  prend en compte  $\tau_a$  et  $\tau_c$  (même si un des défauts n'apparaît pas). Sur la figure (8), on représente l'estimation de l'amplitude  $l_c$  obtenue avec l'algorithme d'estimation de  $\beta_2$  en prenant en compte les valeurs prises par  $\tau_a$ .

## 5. CONCLUSION

L'étude de l'influence des défauts sur la structure du système a permis d'aboutir à la définition d'indicateurs de présence des défauts. Le suivi des différents indicateurs doit être effectué avec une logique précise pour un diagnostic efficace. Le développement de cette démarche par la technique d'identification algèbro-différentielle est simple

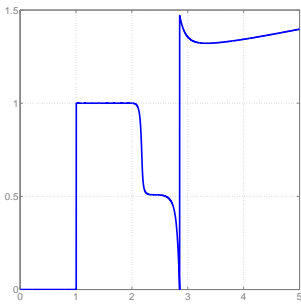


FIG. 3. Evolution temporelle de l'estimation de  $\tau_a$

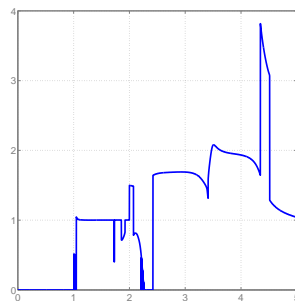


FIG. 4. Evolution temporelle de l'estimation de  $\tau_c$

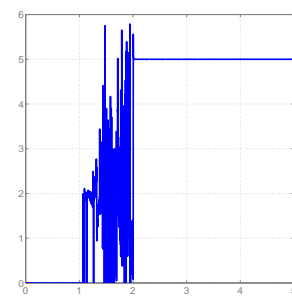


FIG. 5. Evolution temporelle de l'estimation de  $\beta_2$

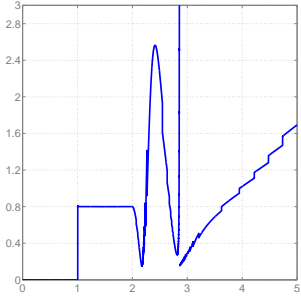


FIG. 6. Evolution temporelle de l'estimation de  $l_a$

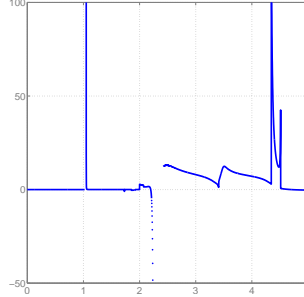


FIG. 7. Evolution temporelle de l'estimation de  $l_c$

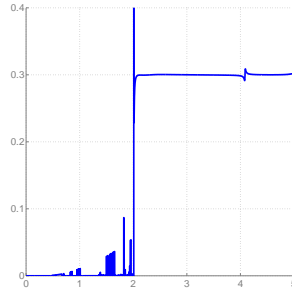


FIG. 8. Evolution temporelle de l'estimation de  $l_c$  (avec prise en compte de  $\tau_a$  et  $\beta_2$ )

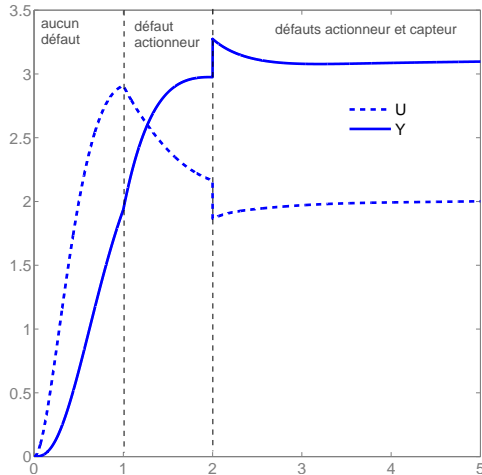


FIG. 2. Commande et sortie du système

puisque l'utilisation seule des mesures de la commande et de la sortie du système suffit à obtenir des résultats utiles au diagnostic. Lors de futur travaux, une étude approfondie des problèmes mentionnés à la section 2.2 sera proposée afin de traiter le cas des signaux bruités.

## RÉFÉRENCES

- L. Belkoura and J. P. Richard. A distribution framework for the fast identification of linear systems with delays. *6th IFAC Workshop on Time Delay System*, 2006.
- G. Boutry, M. Elad, G. Golub, and P. Milanfar. The generalized eigenvalue problem for non-square pencils using a minimal perturbation approach. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27 :582–601, 2005.

- M. Fliess and H. Sira-Ramirez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 9 :151–168, 2003.
- M. Fliess, C. Join, and H. Sira-Ramirez. Robust residual generation for linear fault diagnosis : an algebraic setting with examples. *International Journal of Control*, 77 : 1223–1242, 2004.
- R. Isermann. *Fault-Diagnosis System*. Springer, Berlin, 2006.
- R. Patton, R. Clark, and P. M. Frank. *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer-Verlag, London, 2000.
- L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 2nd edition, 1966.
- T. G. Wright and L. N. Trefethen. Pseudospectra of rectangular matrices. *IMA J. of Numer. Anal.*, 22 : 501–519, 2002.