

S-procédure, S-régularité et Analyse robuste des systèmes implicites

Bilal SARI, Olivier BACHELIER, Driss MEHDI

Laboratoire d'Automatique et d'Informatique Industrielle (LAI)

École Supérieure d'Ingénieurs de Poitiers (ESIP), Bâtiment de Mécanique, 40, Av. du Recteur Pineau,

86022 POITIERS CEDEX, France,

Bilal.Sari@etu.univ-poitiers.fr, Olivier.Bachelier@univ-poitiers.fr,
Driss.Mehdi@univ-poitiers.fr

Résumé— Cet article traite de la \mathcal{S} -régularité d'un faisceau matriciel linéaire $(A, E) = E\lambda - A$ et des applications possibles à l'analyse des modèles implicites incertains de la forme $E\dot{x} = Ax$ (pour le cas continu) ou $E x_{k+1} = Ax_k$ (pour le cas discret). Des conditions LMI de \mathcal{S} -régularité robuste vis-à-vis d'incertitudes LFT entachant A mais aussi E sont proposées. Ces conditions sont suffisantes, mais s'avèrent très peu conservatives. De plus, la pertinence de ces conditions pour l'analyse de la \mathcal{D} -admissibilité des modèles implicites (\mathcal{D} -stabilité, régularité, absence de modes impulsifs) est aussi discutée.

Mots-clés— \mathcal{S} -régularité, analyse robuste, systèmes singuliers, LMI.

I. INTRODUCTION

Il est aujourd'hui bien reconnu que les modèles de la forme $E\dot{x} = Ax$ (ou $E x_{k+1} = Ax_k$ pour le cas discret), qui sont appelés *systèmes singuliers* [6], « *descriptor systems*, *systèmes généralisés* [16], *systèmes implicites* [20] ou *systèmes algébro-différentiels*, etc., sont d'un grand intérêt pour modéliser de nombreux procédés pratiques.

À l'instar des modèles conventionnels pour lesquels $E = I$, la \mathcal{D} -stabilité, c.-à-d. le cloisonnement du spectre *fini* de $(A, E) = E\lambda - A$ dans une région \mathcal{D} du plan complexe, peut se révéler importante pour comprendre le comportement transitoire du système, en particulier pour attester de la stabilité asymptotique. Mais cela reste insuffisant dans le cas implicite. Deux autres propriétés doivent être vérifiées. La première est la *régularité* (c.-à-d. l'existence d'une solution unique à l'équation d'état généralisée) [18]. La seconde est la *l'absence d'impulsions* (c.-à-d. que les valeurs propres infinies du faisceau n'induisent pas de modes impulsifs dans la réponse du modèle implicite associé [6]). Quand ces deux propriétés s'ajoutent à la \mathcal{D} -stabilité, le modèle est dit *\mathcal{D} -admissible*.

Il importe de déterminer des outils simples qui permettent de tester si un modèle implicite précisément connu est \mathcal{D} -admissible. Pour établir ce genre de tests, de nombreux efforts ont porté sur les *équations de Lyapunov généralisées* [7]. Quoiqu'intéressantes à bien des égards (voir [19]), ces approches requièrent bien souvent des systèmes qu'ils soient transformés en des formes équivalentes telle la forme de Kronecker-Weierstrass [18], ce qui n'est pas souhaitable dans un contexte incertain. En présence d'incertitudes, de telles transformations ne conservent pas l'équivalence des modèles sur tout le domaine incertain. Pour cette raison, l'utilisation de LMI *strictes* est préférée à celle des équations de Lyapunov étendues. En ce sens,

un des premiers pas est celui de [5].

En réalité, de nombreuses contributions traitent de l'analyse et de la commande robuste des modèles implicites [21], particulièrement par une approche LMI (malheureusement, pas nécessairement strictes) : voir [17], [22], [23] et le travail très fourni de Masubuchi [25], [12], [13]. Mais très peu considèrent une incertitude sur E . Citons néanmoins [11] où A est cependant connue avec précision, ou encore [10] pour le cas des matrices intervalles. Les meilleurs pistes sont peut-être à trouver dans [9], [14].

Dans cet article, nous faisons une utilisation « intensive » de la \mathcal{S} -régularité (initialement plutôt désignée $\partial\mathcal{D}$ -régularité (voir [3], [27]) et de plusieurs versions de la \mathcal{S} -procédure [8], [15]. La \mathcal{S} -régularité et la \mathcal{S} -procédure peuvent permettre d'établir des conditions (suffisantes) en termes de LMI strictes pour qu'un modèle implicite soumis à deux incertitudes LFT bornées en norme (l'une sur la matrice A et l'autre sur la matrice E) soit \mathcal{D} -admissible. Notre but est de proposer un outil analytique aussi simple que possible qui puisse être une base pour d'autres investigations à venir.

L'article est ainsi organisé. La prochaine partie est consacrée aux définitions fondamentales, à la description du faisceau matriciel linéaire incertain ainsi que de ses incertitudes LFT. Elle inclut aussi la formulation des régions de cloisonnement considérées et la propriété à vérifier (la \mathcal{S} -régularité). La partie III présente la condition LMI suffisante qui est largement commentée. Dans la partie IV, l'on trouve une discussion sur les autres propriétés cruciales des modèles implicites (régularité, absence d'impulsions). Notre condition est confrontée à ces propriétés. Son utilité est alors mise en évidence. La technique est numériquement illustrée sur un exemple dans la partie V avant de conclure.

Notations spécifiques à cet article : \mathcal{H}_n est l'ensemble des matrices hermitiennes de dimension n et $\mathcal{H}_n^+ \subset \mathcal{H}_n$ le sous-ensemble des matrices définies positives. Le produit matriciel suivant est défini (une sorte de produit de Redheffer) :

$$\Delta \star \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \\ E & F \end{bmatrix} = D + C(E - \Delta A)^{-1}(\Delta B - F),$$

avec des dimensions compatibles de A, B, C, D, E et F . $(A)_\perp$ est le noyau à droite de A .

II. ÉTABLISSEMENT DU PROBLÈME MATHÉMATIQUE

A. Définitions préliminaires

Dans ce paragraphe, nous proposons plusieurs définitions et propriétés des faisceaux matriciels. Les raisonnements de cet article sont principalement tenus sur des faisceaux matriciels alors que les modèles implicites ne sont vraiment considérés que dans la partie IV.

Définition 1: Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$ un faisceau matriciel linéaire pour lequel $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$ et $\text{Rang}(E) = r \leq n$. Le spectre généralisé du faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$, désigné par $\lambda(A, E)$, est défini par

$$\lambda(A, E) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\mathbb{A}(\lambda)) = 0\}, \quad (1)$$

et les éléments de $\lambda(A, E)$ sont appelées valeurs propres généralisées de $\mathbb{A}(\lambda)$. De plus, r est appelé l'ordre généralisé de $\mathbb{A}(\lambda)$.

Il importe vraiment de comprendre que $\lambda(A, E)$ contient $p \leq r$ éléments finis et donc que les éléments restants sont infinis. Bien entendu, $n = r$ lorsque E est de rang plein.

Définition 2: Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$, où $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$, un faisceau matriciel linéaire et d'ordre généralisé r . L'on suppose que son spectre généralisé $\lambda(A, E)$ contient p valeurs propres finies λ_j de multiplicités géométriques respectives m_j , $j = 1, \dots, p$. Le degré géométrique de $\mathbb{A}(\lambda)$ est défini par

$$f = \deg(\det(\mathbb{A}(\lambda))) = \sum_{j=1}^p m_j \leq r. \quad (2)$$

Définition 3: (inspirée de la notion de $\partial\mathcal{D}$ -régularité d'une matrice introduite dans [27]) Soit $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$, un faisceau matriciel linéaire tel que $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$. Soit aussi \mathcal{S} un sous ensemble quelconque du plan complexe. Le faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ est dit

- \mathcal{S} -régulier si $\lambda(A, E) \cap \mathcal{S} = \emptyset$,
- \mathcal{S} -singulier sinon.

B. Formulation du faisceau incertain

Dans nos raisonnements, les matrices E et A impliquées dans l'expression du faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ sont considérées complexes et vérifient

$$\begin{cases} A = \Delta_A * \mathcal{A}, & \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_A & B_A \\ C_A & D_A \\ E_A & F_A \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(q_A+r_A+n) \times (q_A+n)}, \\ E = \Delta_E * \mathcal{E}, & \mathcal{E} = \begin{bmatrix} A_E & B_E \\ C_E & D_E \\ E_E & F_E \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(q_E+r_E+n) \times (q_E+n)} \end{cases} \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_A \in \mathbf{\Delta}_A = \left\{ \Delta_A \in \mathbb{C}^{q_A \times r_A} : \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix}' \Psi_A \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \\ \Delta_E \in \mathbf{\Delta}_E = \left\{ \Delta_E \in \mathbb{C}^{q_E \times r_E} : \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix}' \Psi_E \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix} \geq 0 \right\}, \end{cases} \quad (4)$$

où $\Psi_A \in \mathcal{H}_{q_A+r_A}$ et $\Psi_E \in \mathcal{H}_{q_E+r_E}$. La structure des matrices incertaines A et E peut être dénommée incertitude LFT généralisée basse (LFT pour *Linear Fractional Transform*). Il s'agit d'une légère extension de la représentation généralisée proposée dans [28] qui est assez similaire à la représentation proposée dans [14], cette dernière pouvant plutôt correspondre à la LFT généralisée haute. Toutefois, les incertitudes sur A et E sont ici complètement indépendantes l'une de l'autre.

Enfin, l'incertitude globale Δ sur le faisceau est définie par

$$\Delta = \{\Delta_A; \Delta_E\} \in (\mathbf{\Delta} = \mathbf{\Delta}_A \times \mathbf{\Delta}_E). \quad (5)$$

La LFT conventionnelle (c.-à-d. non généralisée) basse devient un cas particulier pour lequel

$$E_A = I; \quad F_A = 0; \quad E_E = I; \quad F_E = 0. \quad (6)$$

La formulation (3)-(4) est donc très générale. Néanmoins, nous réduisons cette généralité en introduisant une contrainte :

$$\exists \Delta^\bullet = \{\Delta_A^\bullet; \Delta_E^\bullet\} \in \mathbf{\Delta} | \mathbb{A}(\lambda, \Delta^\bullet) = E(\Delta_E^\bullet)\lambda - A(\Delta_A^\bullet) = D_E\lambda - D_A. \quad (7)$$

Ceci peut paraître une contrainte drastique sur l'ensemble des faisceaux incertains mais il est évident que la LFT basse classique induite par le choix (6) vérifie toujours cette condition puisque, dans ce cas, l'on a $\Delta_A^\bullet = 0$ et $\Delta_E^\bullet = 0$. Ainsi, même sous la contrainte (7), la structure considérée reste plus générale qu'une LFT classique. Le faisceau (D_A, D_E) peut être vu comme un faisceau nominal. Donc, la description LFT classique s'inscrit dans la structure plus générale donnée par (3)-(4) mais la seconde peut se révéler très utile pour réduire la taille de la LFT obtenue. À titre d'illustration, si l'on considère une expression aussi simple que

$$A(\delta) = 1 - \frac{3\delta - 2}{4\delta}, \quad (8)$$

où, bien sûr, $\delta \neq 0$. L'approche LFT classique conduit à, par exemple, la LFT suivante,

$$A(\theta) = \begin{bmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{bmatrix} * \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 & \frac{1}{4} \\ \hline 1 & -3 & \frac{3}{4} \end{array} \right], \quad (9)$$

avec $\delta = \theta + 1$, alors qu'une LFT généralisée basse est donnée par

$$A(\delta) = \delta * \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

qui est clairement de moindre dimension et évite d'introduire une structure pour l'incertitude proprement dite. Par ailleurs, elle s'exprime directement en fonction de δ .

Comme instance particulière très utile de (4), le cas où

$$\Psi_A = \begin{bmatrix} -\gamma_A I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \Psi_E = \begin{bmatrix} -\gamma_E I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$\gamma_A > 0$ et $\gamma_E > 0$ étant des scalaires, mérite d'être cité car il signifie que les matrices incertaines A et E sont toutes deux bornées en norme ($\|\Delta_A\|_2 \leq \sqrt{\gamma_A^{-1}}$ et $\|\Delta_E\|_2 \leq \sqrt{\gamma_E^{-1}}$).

Hypothèses 1: Le domaine d'incertitude $\mathbf{\Delta}$ est supposé implicitement bien posé :

- (i) $\det(I - \Delta_A A_A) \neq 0$ et $\det(I - \Delta_E A_E) \neq 0$ sur $\mathbf{\Delta}$;
- (ii) $\text{Rang}(E) = r \leq n \quad \forall \Delta_E \in \mathbf{\Delta}_E$.

L'hypothèse (i) correspond au classique *bien posé* des formes LFT et le vocable *implicite* correspond à l'hypothèse (ii) qui est le seul concept original introduit ici.

Remarque 1: L'on peut noter que $\mathbf{\Delta}_A$ et $\mathbf{\Delta}_E$ peuvent aussi se définir ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{\Delta}_A = \left\{ \Delta_A \in \mathbb{C}^{q_A \times r_A} : \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix}' \tau_A \Psi_A \begin{bmatrix} \Delta_A \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \forall \tau_A > 0 \right\}, \\ \mathbf{\Delta}_E = \left\{ \Delta_E \in \mathbb{C}^{q_E \times r_E} : \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix}' \tau_E \Psi_E \begin{bmatrix} \Delta_E \\ I \end{bmatrix} \geq 0, \forall \tau_E > 0 \right\}, \end{cases} \quad (12)$$

Cette définition est certes plus compliquée mais ce n'est pas arbitraire puisque les scalaires positifs τ_A et τ_E permettent de paramétrer l'ensemble des *multiplieurs* qui interviendront dans la partie suivante lors des applications de la S-procédure.

C. Formulation de \mathcal{S}

Dans cet article, l'ensemble \mathcal{S} est défini par

$$\mathcal{S} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}' R \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \ \& \right. \\ \left. \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix}' \Phi_h \begin{bmatrix} s \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \ \forall h \in \{1, \dots, \bar{h}\} \right\}, \quad (13)$$

où $R \in \mathcal{H}_2$ et $\Phi_h \in \mathcal{H}_2$, $h = 1, \dots, \bar{h}$. Ce type de description est emprunté à [3] reprenant quelques notions de [8]. En réalité, \mathcal{S} est l'intersection d'une région définie par l'égalité (une droite, un cercle ou même le plan complexe ($R = 0$)) avec \bar{h} demi-plans fermés, disques ou extérieurs de disques fermés. Des ensembles particuliers peuvent être mis en exergue :

- Axe imaginaire $\mathcal{I} : \bar{h} = 0; R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- Cercle unitaire $\mathcal{C} : \bar{h} = 0; R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
- Demi-plan droit fermé $\mathcal{C}^+ : \bar{h} = 1; R = 0; \Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- Extérieur du disque unitaire $\bar{\mathcal{D}}^+ : \bar{h} = 1; R = 0; \Phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;

Il est possible d'étendre la classe des ensembles \mathcal{S} en considérant des matrices R et Φ_h appartenant à $\mathbb{C}^{2d \times 2d}$ avec $d \geq 1$. Pour plus de concision et de clarté, d est pris égal 1. Néanmoins, nous rappelons qu'une telle formulation permet de décrire les frontières de régions EEMI (Extended Ellipsoidal Matrix inequality voir [29]), ou même certaines de ces régions (fermées) elles-mêmes, voire leurs régions complémentaires.

L'on note que la \mathcal{S} -régularité peut être exploitée pour tester la \mathcal{D} -stabilité (appartenance des pôles à la région \mathcal{D}) en définissant $\mathcal{S} = \mathcal{C}/\mathcal{D}$ ($s \in \mathcal{C}$ et $s \notin \mathcal{D}$). Par exemple, la stabilité au sens de Hurwitz, n'est autre que la \mathcal{C}^+ -régularité. De la même façon, la stabilité au sens de Schur, n'est autre que la $\bar{\mathcal{D}}^+$ -régularité.

Dans la suite de cet article, l'ensemble \mathcal{S} sera supposé *borné*.

D. Problème à résoudre

L'on considère le faisceau matriciel linéaire $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E)$ soumis à l'incertitude définie au paragraphe II-B et obéissant à l'hypothèse 1. Soit aussi l'ensemble \mathcal{S} décrit au paragraphe II-C que l'on suppose *borné*. Ce travail a pour objectif d'établir une condition LMI *stricte* garantissant que $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier de manière robuste vis-à-vis de Δ .

III. \mathcal{S} -RÉGULARITÉ ROBUSTE

Dans cette partie, un raisonnement mathématique est suivi. Il vise à proposer une solution au problème établi ci-avant. Ce raisonnement est ensuite résumé en un théorème qui est la contribution essentielle de cet article. Une discussion fait suite au théorème.

Selon la définition 3, le faisceau matriciel incertain $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier de manière robuste si et seulement si

$$\det(\mathbb{A}(\lambda)) \neq 0 \ \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow \det(E\lambda - A) \neq 0 \ \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow \det(G + \lambda C_E V_E) \neq 0 \ \forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta \quad (16)$$

avec

$$\begin{cases} G &= D_E \lambda - \Delta_A \star A, \\ V_E &= (E_E - \Delta_E A_E)^{-1} (\Delta_E B_E - F_E). \end{cases} \quad (17)$$

La différence (16) est vérifiée si et seulement si $\forall \{\lambda; \Delta\} \in \mathcal{S} \times \Delta$

$$\begin{bmatrix} V_E \\ I \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix}' (-I) \begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix}}_{\Theta_E} \underbrace{\begin{bmatrix} V_E \\ I \end{bmatrix}}_{N_E} < 0. \quad (18)$$

Si l'on définit les matrices suivantes,

$$\Gamma_E(\Delta_E) = \begin{bmatrix} I & -\Delta_E \end{bmatrix}, \quad X_E = \begin{bmatrix} E_E & F_E \\ A_E & B_E \end{bmatrix}, \quad (19)$$

l'on peut noter que

$$N_E = (\Gamma_E(\Delta_E) X_E)_{\perp} \ \forall \Delta_E \in \Delta_E. \quad (20)$$

Ainsi, en vertu de la S-procédure de bloc plein (par exemple telle que formulée dans [15, théorème 8]), l'inégalité (18) est vérifiée si (et seulement si quand Δ_E est compact) il existe un scalaire positif $\tau_E = \tau_E(\lambda, \Delta_A)$ tel que

$$\underbrace{\tau_E X_E' \Psi_E X_E}_{\Upsilon_E} + \Theta_E < 0 \ \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A. \quad (21)$$

(Il faut ici noter que τ_E est implicitement une fonction de Δ_A et λ ce qui signifie que l'équivalence avec τ_E constant ne tient a priori que pour un couple $\{\Delta_A; \lambda\}$).

En outre, l'on peut écrire la matrice $\begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix}$ comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \lambda C_E & G \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda C_E & \lambda D_E - \Delta_A \star A \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda C_E & \lambda D_E - D_A \end{bmatrix}}_{\hat{D}} + \begin{bmatrix} 0 & -C_A(E_A - \Delta_A A_A)^{-1}(\Delta_A B_A - F_A) \end{bmatrix} \\ &= \hat{D} + \underbrace{\begin{bmatrix} -C_A & E_A - \Delta_A A_A \end{bmatrix}^{-1} (\Delta_A \begin{bmatrix} 0 & B_A \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & F_A \end{bmatrix})}_{\hat{V}} \\ &= \hat{D} + \hat{C} \underbrace{(\hat{E} - \Delta_A \hat{A})^{-1} (\Delta_A \hat{B} - \hat{F})}_{\hat{V}} \\ &= \Delta_A \star \hat{A} \ \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A, \end{aligned} \quad (22)$$

où

$$\hat{A} = \hat{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \\ \hat{E} & \hat{F} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathcal{S}. \quad (23)$$

Ainsi, l'inégalité (21) peut être écrite

$$\Upsilon_E + (\Delta_A \star \hat{A})' (-I) (\Delta_A \star \hat{A}) < 0 \ \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \Upsilon_E + (\hat{D} + \hat{C} \hat{V})' (-I) (\hat{D} + \hat{C} \hat{V}) < 0 \ \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \hat{V} \\ I \end{bmatrix}' \hat{\Theta} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{V} \\ I \end{bmatrix}}_{\hat{N}} < 0 \ \forall \{\lambda; \Delta_A\} \in \mathcal{S} \times \Delta_A. \quad (26)$$

avec

$$\hat{\Theta} = \begin{bmatrix} \hat{C}' \\ \hat{D}' \end{bmatrix} (-I) \begin{bmatrix} \hat{C}' \\ \hat{D}' \end{bmatrix}' + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Upsilon_E \end{bmatrix}}_{\Omega_E}. \quad (27)$$

De nouveau, les matrices suivantes peuvent être définies :

$$\Gamma_A(\Delta_A) = \begin{bmatrix} I & -\Delta_A \end{bmatrix}; \quad \hat{X}_A = \begin{bmatrix} \hat{E} & \hat{F} \\ \hat{A} & \hat{B} \end{bmatrix}. \quad (28)$$

De ces définitions, il peut être facilement déduit que

$$\hat{N} = (\Gamma_A(\Delta_A) \hat{X}_A)_{\perp} \ \forall \Delta_A \in \Delta_A. \quad (29)$$

Ainsi, une autre application de la S-procédure de bloc plein permet de voir que (24) est vérifiée si (et seulement si quand Δ_A est compact) il existe un scalaire positif $\tau_A = \tau_A(\lambda, \tau_E(\lambda, \Delta_A))$ tel que

$$\hat{\Theta} + \tau_A \underbrace{\hat{X}_A' \Psi_A \hat{X}_A}_{\Omega_A} < 0 \ \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (30)$$

(Une fois encore, il faut noter que la nécessité éventuelle de (30) ne concerne que le passage ci-avant puisque τ_A dépend en réalité implicitement de λ et de τ_E).

De plus, la matrice $\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix}$ peut être écrite

$$\begin{bmatrix} \hat{C} & \hat{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_A & \lambda C_E & \lambda D_E - D_A \end{bmatrix}$$

$$= \left[\underbrace{- \begin{bmatrix} C_A & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} + \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & C_E \end{bmatrix}}_{\tilde{F}} \quad \underbrace{\lambda D_E - D_A}_{\tilde{E} \quad \tilde{A}} \right] \\ = [-\tilde{B} + \lambda \tilde{F} \quad \lambda \tilde{E} - \tilde{A}] \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (31)$$

Par conséquent, l'inégalité (30) peut se récrire, $\forall \lambda \in \mathcal{S}$:

$$\underbrace{\Omega_A + \Omega_E}_{\tilde{\Theta}} + [-\tilde{B} + \lambda \tilde{F} \quad \lambda \tilde{E} - \tilde{A}]' (-I) [-\tilde{B} + \lambda \tilde{F} \quad \lambda \tilde{E} - \tilde{A}] < 0. \quad (32)$$

En notant que le faisceau $(\tilde{A}, \tilde{E}) = (D_A, D_E)$ est \mathcal{S} -régulier par hypothèse puisque (7) est satisfaite, l'on peut déduire que $(\lambda \tilde{E} - \tilde{A})$ est inversible sur \mathcal{S} . Cette non-singularité assure de l'existence de

$$\tilde{N}_\lambda = \left[\begin{array}{c} I \\ (\lambda \tilde{E} - \tilde{A})^{-1} (\tilde{B} - \lambda \tilde{F}) \end{array} \right] \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (33)$$

Il est évident que

$$\tilde{N}_\lambda = [-\tilde{B} + \lambda \tilde{F} \quad \lambda \tilde{E} - \tilde{A}]_\perp \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (34)$$

\mathcal{S} étant borné, d'après le lemme de Finsler [30, théorème 2.3.10], l'inégalité (32) est vraie si et seulement si

$$\tilde{N}'_\lambda \tilde{\Theta} \tilde{N}_\lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (35)$$

Si l'on définit les matrices suivantes,

$$\Gamma_\lambda = [I \quad -\lambda I]; \quad \tilde{X}_\lambda = \left[\begin{array}{c} \tilde{B} \quad \tilde{A} \\ \tilde{F} \quad \tilde{E} \end{array} \right], \quad (36)$$

alors, une fois encore, il devient clair que

$$\tilde{N}_\lambda = (\Gamma_\lambda \tilde{X}_\lambda)_\perp \quad \forall \lambda \in \mathcal{S}. \quad (37)$$

Puisque \mathcal{S} est borné, le lemme de Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) généralisé dans sa version implicite avec des inégalités strictes [8, théorème 3] (avec une légère adaptation comme dans [3] pour $\bar{h} > 1$), qui est lui aussi un cas particulier de la S-procédure généralisée [8, théorème 1], peut-être appliqué. L'inégalité (35) est satisfaite si et seulement s'il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$ et des matrices $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, telles que

$$\tilde{\Theta} + \tilde{X}'_\lambda \underbrace{\left(R \otimes P + \sum_{h=1}^{\bar{h}} (\Phi_h \otimes Q_h) \right)}_{\Psi_\lambda} \tilde{X}_\lambda < 0. \quad (38)$$

(De nouveau, l'équivalence ne concerne que les deux dernières inégalités exploitées puisque P et Q_h dépendent implicitement de τ_E et τ_A).

Le raisonnement précédent est résumé par le théorème suivant.

Théorème 1: Soit un faisceau matriciel linéaire incertain $\mathbb{A}(\lambda) = (A, E) = E\lambda - A$ tel que $\{A; E\} \in \{\mathbb{C}^{n \times n}\}^2$ vérifie (3)-(4) et l'hypothèse 1.i). Soit aussi un ensemble borné $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}$ décrit par (13). L'on suppose que (D_A, D_E) est \mathcal{S} -régulier. Alors le faisceau $\mathbb{A}(\lambda)$ est \mathcal{S} -régulier vis-à-vis de Δ si (et seulement si lorsque Δ_A et Δ_E sont compacts) il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$, des matrices $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, ainsi que deux scalaires $\tau_A > 0$ et $\tau_E > 0$ tels que

$$\Omega_A + \Omega_E + \Omega_\lambda < 0 \quad (39)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_A = \tau_A \tilde{X}'_A \Psi_A \tilde{X}_A, \quad \tilde{X}_A = \begin{bmatrix} E_A & 0 & F_A \\ A_A & 0 & B_A \end{bmatrix}, \\ \Omega_E = \tau_E \tilde{X}'_E \Psi_E \tilde{X}_E, \quad \tilde{X}_E = \begin{bmatrix} 0 & E_E & F_E \\ 0 & A_E & B_E \end{bmatrix}, \\ \Omega_\lambda = \tilde{X}'_\lambda \left(R \otimes P + \sum_{h=1}^{\bar{h}} (\Phi_h \otimes Q_h) \right) \tilde{X}_\lambda, \quad \tilde{X}_\lambda = \begin{bmatrix} C_A & 0 & D_A \\ 0 & C_E & D_E \end{bmatrix}. \end{array} \right. \quad (40)$$

Un point mérite l'attention du lecteur. Lorsque \mathcal{S} n'est pas supposé borné, il faut s'assurer que l'équation (34) ou (37) reste vraie pour $\lambda = \infty$. C'est le cas quand E est de rang plein mais pas quand E est singulière. C'est pourquoi \mathcal{S} est supposé borné dans le théorème 1. Ce problème est exactement celui rencontré dans [8, paragraphe V.B], dans l'étude du lemme KYP généralisé dans sa version *implicite-inégalités strictes*. En pratique, c.-à-d. lorsque l'on travaille avec des systèmes implicites, un moyen de contourner le problème est de borner \mathcal{S} en considérant un choix de \mathcal{S} dans lequel

$$\Phi_h = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^2 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

pour une instance de $h \in \{1, \dots, \bar{h}\}$ et pour une valeur de $\bar{\omega}$ éventuellement très grande mais pas infinie. Par un tel choix, \mathcal{S} devient un sous-ensemble du disque $\mathbb{C}(\bar{\omega})$ centré sur l'origine de \mathbb{C} et de rayon $\bar{\omega}$. Par conséquent, il est de toute évidence borné. Ainsi, les valeurs propres généralisées finies sont localisées à l'intérieur de $\mathbb{C}(\bar{\omega})$ et les valeurs propres infinies à l'extérieur de $\mathbb{C}(\bar{\omega})$.

IV. ANALYSE ROBUSTE DES MODÈLES IMPLICITES

L'on s'intéresse ici à l'analyse robuste des modèles implicites de la forme

$$E\dot{x} = Ax \quad (42)$$

ou

$$Ex_{k+1} = Ax_k \quad (43)$$

pour le cas discret) où les matrices E et A vérifient (3), (4) et (7). Il est bien connu [6] que les pôles d'un tel modèle sont les valeurs propres généralisées du faisceau associé $\mathbb{A}(\lambda)$, incluant aussi bien les valeurs infinies que les valeurs finies. Comme pour les modèles conventionnels ($E = I$), la réponse de ce type de modèle contient un terme lié aux pôles finis (ce terme correspond aux dynamiques décrites par une équation différentielle ou récurrente) mais aussi un autre terme « inhabituel » lié aux pôles infinis (correspondant aux équations algébriques). Il est à noter que de tels modèles peuvent avoir des variations internes (structure interne variable) lorsque les matrices A et E sont rectangulaires [1]. Comme pour les modèles d'état classiques, le comportement transitoire du premier terme est fortement dépendant de la localisation des pôles finis dans le plan complexe. C'est pourquoi la \mathcal{D} -stabilité (cloisonnement des racines dans une région $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$) est intéressante. Mais contrairement aux systèmes usuels, deux autres aspects doivent être étudiés. Un modèle implicite doit être *régulier* [18] (une seule solution à l'équation d'état et il doit être *libre d'impulsions* [16], [6] (le « terme infini » de la réponse ne doit pas présenter d'impulsions). Une définition classique est maintenant rappelée.

Définition 4: Le modèle (42) ou (43) est dit stable par rapport à la région $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ ou \mathcal{D} -stable si les valeurs propres généralisées finies du faisceau associé (A, E) appartiennent toutes à \mathcal{D} . Clairement, (42) est asymptotiquement stable s'il est \mathcal{D} -stable pour $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$ (le demi-plan gauche ouvert) et (43) est asymptotiquement stable s'il est \mathcal{D} -stable pour $\mathcal{D} = \mathbb{D}^-$ (le disque unitaire ouvert).

L'on peut continuer avec quelques autres définitions.

Définition 5: Soit \mathcal{S} un sous-ensemble de \mathbb{C} . Le modèle implicite (42) ou (43) est dit \mathcal{S} -régulier si et seulement si le faisceau associé (A, E) est \mathcal{S} -régulier. Cela signifie que le modèle implicite est non seulement régulier mais, de plus, aucun de ses pôles n'appartient à \mathcal{S} .

Définition 6: Le modèle (42) ou (43) est dit \mathcal{D} -admissible s'il est \mathcal{D} -stable, régulier et libre d'impulsions.

À partir de ces propriétés, il est possible d'établir une condition de \mathcal{D} -admissibilité robuste du modèle implicite (42) ou (43) vis-à-vis de (3)-(4) et de l'hypothèse 1 dès lors que le modèle nominal associé au faisceau (D_A, D_E) est \mathcal{D} -admissible et que la région de cloisonnement \mathcal{D} est un sous-ensemble de $\mathbb{C}(\bar{\omega}) \subset \mathbb{C}$, le grand disque évoqué dans la partie précédente. Plus rigoureusement, le théorème suivant peut être établi.

Théorème 2: Soit le modèle implicite incertain (42) ou (43) avec (3), (4) et (7). L'hypothèse 1 est retenue. Soient aussi $\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ un disque fermé centré sur l'origine et de rayon $\bar{\omega}$, et $\partial\bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega})$ le cercle frontière. Enfin, soit \mathcal{D} un sous-ensemble ouvert de \mathbb{C} ayant pour frontière $\partial\mathcal{D}$ telle que l'ensemble $\mathcal{S} = (\partial\mathcal{D} \cap \bar{\mathbb{C}}(\bar{\omega}))$ vérifie (13). Le modèle implicite est \mathcal{S} -régulier et libre d'impulsions de manière robuste vis-à-vis de Δ si les conditions suivantes sont vérifiées :

- a.1)** le modèle associé à (D_A, D_E) , l'instance nominale du faisceau (A, E) , est \mathcal{S} -régulier et libre d'impulsions ;
- a.2)** il existe une matrice $P \in \mathcal{H}_n$, des matrices $Q_h \in \mathcal{H}_n^+$, $h = 1, \dots, \bar{h}$, ainsi que $\tau_A > 0$ et $\tau_E > 0$ tels que (39) est vérifiée pour (41) ;
- a.3)** il existe une matrice $Y \in \mathcal{H}_n$, $\mu_A > 0$, $\mu_E > 0$ et $\bar{\omega} < \infty$ aussi grand que possible tels que la LMI suivante

$$\check{\Omega}_A + \check{\Omega}_E + \check{\Omega}_\lambda(\bar{\omega}) < 0 \quad (44)$$

est vérifiée, avec

$$\begin{cases} \check{\Omega}_A = \mu_A \check{X}'_A \Psi_A \check{X}_A, & \check{X}_A = \begin{bmatrix} E_A & 0 & F_A \\ A_A & 0 & B_A \end{bmatrix}, \\ \check{\Omega}_E = \mu_E \check{X}'_E \Psi_E \check{X}_E, & \check{X}_E = \begin{bmatrix} 0 & E_E & F_E \\ 0 & A_E & B_E \end{bmatrix}, \\ \check{\Omega}_\lambda(\bar{\omega}) = \check{X}'_\lambda \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\bar{\omega}^2 \end{bmatrix} \otimes Y \right) \check{X}_\lambda, & \check{X}_\lambda = \begin{bmatrix} C_A & 0 & D_A \\ 0 & C_E & D_E \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (45)$$

De plus, il est \mathcal{D} -admissible de manière robuste vis-à-vis de Δ s'il existe $\bar{\omega} < \infty$, suffisamment grand, tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- b.1)** le modèle associé à (D_A, D_E) est \mathcal{D} -admissible ;
- b.2)** les conditions **a.2)** et **a.3)** sont vérifiées.

Démonstration : omise par souci de concision.

Notons toutefois que la non-impulsivité est assurée par le fait que, d'une part, (D_A, D_E) est non impulsif et, d'autre part, par le fait que le degré géométrique est préservé soit par (39) soit par (44).

V. ILLUSTRATION NUMÉRIQUE

Dans cette partie, l'approche présentée est illustrée par deux exemples numériques. Puisque la partie précédente était consacrée au potentiel d'application du théorème 1 à l'analyse robuste des systèmes implicites, les illustrations ne concernent que l'admissibilité c.-à-d. le théorème 2.

A. Premier exemple

Le modèle incertain est le suivant :

$$\left[\begin{array}{c|c} A_A & B_A \\ \hline C_A & D_A \\ \hline E_A & F_A \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0,2140 & 0,3200 & 0,7266 \\ 0,6435 & 0,9601 & 0,4120 \\ 0,2259 & 0,2091 & 0,5678 \\ 0,5798 & 0,3798 & 0,7942 \\ 0,7604 & 0,7833 & 0,0592 \\ 0,5298 & 0,6808 & 0,6029 \\ 0,6405 & 0,4611 & 0,0503 \\ \hline 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 0,4154 & 0,8744 & 0,7680 & 0,9901 & 0,4387 \\ 0,3050 & 0,0150 & 0,9708 & 0,7889 & 0,4983 \\ 5,8413 & 13,4301 & 30,1742 & 27,2534 & 17,8494 \\ 5,0562 & -0,2859 & 15,8285 & 12,2772 & 7,0206 \\ -6,5957 & -6,863 & -24,2345 & -15,9162 & -9,7204 \\ 10,3767 & 11,4091 & 30,2249 & 20,4394 & 15,8384 \\ -16,0828 & -18,9503 & -47,4443 & -40,9319 & -30,7603 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} A_E & B_E \\ \hline C_E & D_E \\ \hline E_E & F_E \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0,3295 & 0,6649 & 0,3830 & 0,6992 \\ 0,3090 & 0,6973 & 0,9834 & 0,3874 \\ 0,7329 & 0,5721 & 0,7906 & 0,0419 \\ 0,3944 & 0,5467 & 0,3867 & 0,2193 \\ 0,3878 & 0,4480 & 0,4513 & 0,2346 \\ 0,7009 & 0,4883 & 0,92354.7 & 0,2231 \\ 0,0214 & 0,1904 & 0,7002 & 0,5491 \\ 0,7556 & 0,0708 & 0,1335 & 0,9363 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 \end{bmatrix} \dots$$

$$\begin{bmatrix} 0,7847 & 0,1604 & 0,8695 & 0,3693 & 0 \\ 0,0862 & 0,7363 & 0,9474 & 0,5299 & 0 \\ 0,3433 & 0,0798 & 0,1366 & 0,2513 & 0 \\ 0,2559 & 0,4901 & 0,0385 & 0,2309 & 0 \\ \hline 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Ce modèle est tel que $n = 5$ et $r = 4$. L'on suppose que

l'incertitude satisfait la contrainte (11) avec $\sqrt{\gamma_E^{-1}} = 0,001$. Il s'agit d'une LFT bornée en norme classique. Le modèle nominal (D_A, D_E) est asymptotiquement stable, régulier et libre d'impulsions donc Hurwitz-admissible. En effet, ses pôles finis sont

$$\{-7,0657; -5,0683; -4,7079; -1,1385\} \quad (48)$$

et le dernier pôle nominal est à l'infini. Puisque le nombre de pôles finis est égal à r , cela signifie que le modèle nominal est libre d'impulsions. L'idée est d'appliquer le théorème 2 avec $\bar{\omega} = 10^5$ pour analyser la Hurwitz-admissibilité robuste vis-à-vis de Δ_A et Δ_E . Il faut noter que le rayon $\sqrt{\gamma_A^{-1}}$ n'a pas été spécifié. En effet, il est possible de résoudre la LMI (39) tout en minimisant γ_A (il est aussi possible de minimiser γ_E en fixant γ_A ou de minimiser un critère linéaire pondéré). L'on se place donc ici dans le cadre d'une analyse robuste. En réalisant cette minimisation, l'on obtient

$$\|\Delta_A\|_2 \leq \sqrt{\gamma_A^{-1}} = \rho_A = 0,3246. \quad (49)$$

La valeur obtenue peut être vue comme une borne de Hurwitz-admissibilité robuste. En traçant les spectres finis de nombreux modèles incertains aléatoires respectant les bornes ρ_A et ρ_E (voir figure 1), l'on peut apprécier le faible conservatisme du théorème 2.

B. Second exemple

Il s'agit en fait du même exemple que dans le paragraphe précédent mais D_A est remplacée par $D_A/8$ de sorte que le faisceau (D_A, D_E) devient stable au sens de Schur. L'incertitude reste la même. De nouveau, l'idée est de calculer le *rayon complexe de Schur-admissibilité par rapport à un domaine Δ_E donné* en utilisant le théorème 2. La valeur suivante est calculée par minimisation sous contrainte LMI, à l'instar de ce qui a été calculé dans l'exemple précédent :

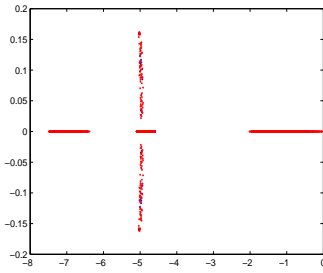


Fig. 1. Migration des pôles pour $\|\Delta_A\|_2 \leq 0.3246$ et $\|\Delta_E\|_2 \leq 0.001$

$$\|\Delta_A\|_2 \leq \sqrt{\gamma_A^{-1}} = \rho_A = 0.0116. \quad (50)$$

Grâce à cette valeur, il est possible d'obtenir la figure 2 où les spectres finis de nombreux modèles incertains sont tracés, respectant les bornes ρ_A et ρ_E . Cette figure permet d'apprécier le non-conservatisme de l'analyse effectuée.

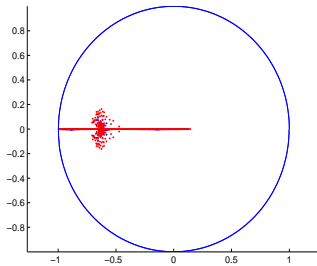


Fig. 2. Migration des pôles pour $\|\Delta_A\|_2 \leq 0.0116$ et $\|\Delta_E\|_2 \leq 0.001$

VI. CONCLUSION

Dans cet article, une condition LMI stricte simple de \mathcal{D} -régularité robuste d'un faisceau (A, E) où les matrices A et E sont soumises chacune à une incertitude LFT généralisée basse a été proposée. La classe des ensembles \mathcal{S} qu'il est possible de prendre en compte est très large. Il a été mis en évidence que la condition peut être utilisée pour étudier la \mathcal{D} -admissibilité robuste d'un modèle implicite continu ou discret. De plus, la condition obtenue est complètement cohérente avec de nombreux résultats de type « KYP » utilisés pour les modèles conventionnels. À titre de perspectives, les problèmes de commande sont bien sûr en point de mire. En effet, la condition analytique proposée n'est pas directement exploitable pour la synthèse. Une raison fondamentale d'une telle limite est que la \mathcal{D} -admissibilité est requise. Par conséquent, ce travail doit être analysé au regard de conditions LMI strictes de synthèse telles que, par exemple, celle proposée dans [5]. Nous aimerions enfin comparer nos résultats aux résultats connus concernant la régularité des systèmes implicites [2].

RÉFÉRENCES

[1] M. BONILLA and M. MALABRE. On the control of linear systems having internal variations. *Automatica*, 39 :1989–1996, 2003.

[2] J.J. LOISEAU, K. OZCALDIRAN, M. MALABRE and N. KARCANIAS. Feedback canonical forms of singular systems. *Kybernetika*, 27 :289–305, 1991.

[3] O. Bachelier and D. Mehdi. Robust Matrix Root-Clustering through Extended KYP Lemma. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 45(1) :368–381, 2006.

[4] J. Bosche, O. Bachelier, and D. Mehdi. An approach for robust matrix root-clustering analysis in a union of regions. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 22 :227–239, 2005.

[5] M. Chaabane, O. Bachelier, M. Souissi, and D. Mehdi. Stability and stabilization of continuous descriptor systems : an LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, 2006 :1–15, 2006.

[6] L. Dai. *Singular Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.

[7] J. Y. Ishihara and M. H. Terra. On the Lyapunov theorem for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(11) :1926–1930, 2002.

[8] T. Iwasaki and S. Hara. Generalized KYP lemma : unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(1) :41–59, January 2005.

[9] T. Iwasaki and G. Shibata. LPV system analysis via quadratic separator for uncertain implicit systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(8) :1195–1208, August 2001.

[10] C. Lin, J. Lam, J. L. Wang, and G.-H. Yang. Analysis on robust stability for interval descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 42 :267–278, 2001.

[11] C. Lin, J. L. Wang, G.-H. Yang, and J. Lam. Robust stabilization via state feedback for descriptor systems with uncertainties in the derivative matrix. *International Journal of Control*, 73(5) :407–415, 2000.

[12] I. Masubuchi. Dissipativity inequalities for continuous-time descriptor systems with applications to synthesis of control gains. *Systems & Control Letters*, 55 :158–164, 2005.

[13] I. Masubuchi. Output feedback controller synthesis for descriptor systems satisfying closed-loop dissipativity. *Automatica*, 43 :339–345, 2007.

[14] D. Peaucelle, D. Arzelier, D. Henrion, and F. Gouaisbault. Quadratic separation for feedback connection of an uncertain matrix and an implicit linear transformation. *Automatica*, 43 :796–804, 2007.

[15] C. W. Scherer. LPV control and full block multipliers. *Automatica*, 37 :361–375, 2001.

[16] G. C. Verghese, B. C. Lévy, and T. Kailath. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 26(4) :361–375, August 1981.

[17] S. Xu and J. Lam. Robust stability and stabilization of discrete singular systems : an equivalent characterization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(4) :568–574, 2004.

[18] H. H. Rosenbrock. Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 20(2) :191–202, 1974.

[19] A. Varga. On stabilization methods of descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 24(2) :133–138, 1995.

[20] I. Masubuchi. Stability and stabilization of implicit systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, volume 4, pages 3636–3641, Sydney, Australie, 2000.

[21] C. Lin, J. Wang, D. Wang, et C. B. Soh. Robustness of uncertain descriptor systems. *Systems & Control Letters*, 31 :129–138, 1997.

[22] C.-H. Kuo et C.-H. Fang. An LMI approach to admissibilization of uncertain descriptor systems via static output feedback. Dans *American Control Conference (ACC)*, volume 4, Denver, Colorado, USA, Juin 2003.

[23] J.-H. Chou et W.-H. Liao. Regional eigenvalue-clustering robustness analysis for singular systems with structured parameter perturbations. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part I : Journal of Systems and Control Engineering*, 212(6) :467–471, 1998.

[24] S. V. Gusev et A. L. Likhtarnikov. Kalman-Popov-Yakubovich lemma and the S-procedure : A historical essay. *Automation and Remote Control*, 67(11) :1768–1810, 2006.

[25] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, et N. Suda. H_∞ control for descriptor systems : A matrix inequalities approach. *Automatica*, 33(4) :669–673, 1997.

[26] V. A. Yakubovich. S-procedure in nonlinear control theory. *Vestnik Leningrad Univ.*, 1 :62–77, 1971.

[27] O. Bachelier et B. Pradin. $\partial\mathcal{D}$ -regularity for robust matrix root-clustering. Dans *IFAC Symposium on Robust Control Design (ROCOND)*, Milan, Italie, 2003.

[28] S. Heckler et A. Varga. Generalized LFT-based representation of parametric models. *European Journal of Control*, 10(4) :326–337, 2004.

[29] J. Bosche, O. Bachelier, et D. Mehdi. An approach for robust matrix root-clustering analysis in a union of regions. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 22 :227–239, 2005.

[30] R. E. Skelton, T. Iwasaki, et K. Grigoriadis. *A unified approach to linear control design*. Taylor and Francis series in Systems and Control, 1997.