

Estimation d'état pour des systèmes linéaires : approche algébrique

Yang TIAN

Équipe-Projet ALIEN, INRIA Lille - Nord Europe
& Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal, UMR CNRS 8146
Ecole Centrale de Lille, BP 48, 59651 Villeneuve d'Ascq Cedex, France

yang.tian@inria.fr

Résumé— Le développement d'une nouvelle méthode d'estimation d'état par une approche algébrique constitue la principale motivation de cet article. Cette approche est dédiée à une classe générale de systèmes linéaires stationnaires avec des perturbations. Nous donnons une expression formelle de l'état en fonction d'intégrales de la sortie et de l'entrée. Pour ce faire, on applique certains outils mathématiques tels que la transformation de Laplace et des outils issus du calcul opérationnel. Un exemple en dimension trois d'un moteur à courant continu et des simulations sont donnés afin d'illustrer les performances de cette approche.

Mots-clés— Systèmes linéaires, estimation d'état, perturbations, approche algébrique.

I. INTRODUCTION

Pour des raisons techniques ou économiques (de construction, de positionnement et de coût des capteurs, ...), il n'est pas possible en général d'accéder à la totalité des composantes du vecteur d'état par des dispositifs de mesure. Or, dans beaucoup de cas, la commande d'un système nécessite de s'assurer de la connaissance à chaque instant de ce vecteur d'état. Si le système est observable, une solution consiste alors en la synthèse d'un observateur (ou d'un reconstruteur), grâce auquel il est possible d'estimer tout ou partie de l'état par l'intermédiaire des grandeurs connues du système.

L'observateur est un système dynamique qui peut également servir à la surveillance des systèmes, en particulier la détection de panne, ou même à l'identification de paramètres, en considérant un système augmenté, avec ces paramètres comme nouvelles variables d'état. Le problème de la synthèse d'observateurs constitue donc un grand domaine d'intérêt et d'étude.

Un observateur peut être réalisé si le système est observable, c'est-à-dire qu'on peut reconstruire l'état initial $x(t_i)$ à partir de l'information sur ses entrées $u(t)$ et ses sorties $y(t)$ pendant un intervalle de temps fini $[t_i; t_f]$. Pour les systèmes linéaires stationnaires, un observateur a été introduit pour la première fois par Luenberger [1] conduisant à l'estimation asymptotique de l'état. Dans le cas de système linéaire avec bruit, où apparaissent des phénomènes stochastiques, un filtre de Kalman peut être conçu [2], [3].

Dans cet article, nous proposons de réaliser un reconstruteur rapide d'état pour des systèmes linéaires stationnaires, par une approche algébrique inspirée de récents travaux de Fliess et Sira-Ramirez [4], [5]. La reconstruction de l'état est donnée par une formulation explicite, plutôt que par un système dynamique auxiliaire comme dans le cas de l'utilisation d'un observateur. Dans l'approche proposée, les dérivées successives de

la sortie sont exprimées en fonction des intégrales des mesures (éventuellement bruitée) et des entrées. On peut alors reconstruire l'état du système en un temps fini (et non asymptotique).

Cette approche possède les propriétés suivantes :

- il n'y a pas de gains d'observation ou d'autres paramètres extérieurs à régler ;
- les calculs peuvent être implémentés formellement et effectués de manière très rapide ;
- l'estimation est robuste par rapport au bruit de mesure (qu'il soit blanc ou d'une autre nature) et par rapport à des perturbations extérieures structurées.

II. PROBLÉMATIQUE

Considérons un système linéaire stationnaire sujet à des perturbations extérieures :

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu + Dp \\ y &= Cx \end{cases} \quad (1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état, $u \in \mathbb{R}^\phi$ est l'entrée, $p \in \mathbb{R}^\rho$ est la perturbation et $y \in \mathbb{R}^d$ est la sortie. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times \phi}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times \rho}$ et $C \in \mathbb{R}^{d \times n}$ sont des matrices constantes.

Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour (1) est [2] :

$$\text{rang} \mathbf{O}_{(A,C)} = n.$$

où la matrice d'observabilité : $\mathbf{O}_{(A,C)} = [C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T$.

Dans [6] et [7], la notion d'observabilité est revisitée du point de vue de l'algèbre différentielle. Dans ce cas, l'observabilité est équivalente à la possibilité d'exprimer toute variable du système, et, en particulier, toute variable d'état comme combinaison linéaire de la commande, de la sortie et de leurs dérivées jusqu'à un ordre fini. Ce critère est valable aussi pour les systèmes non linéaires. Le travail présenté ici a pour but d'estimer l'état en adoptant cette approche algébrique.

Par la suite, on considérera des systèmes monovariables (c'est-à-dire $\phi = d = 1$) et $\rho = 1$. Nous formulerons également l'hypothèse suivante :

$$CD = CAD = \dots = CA^{(n-2)}D = 0. \quad (2)$$

III. APPROCHE ALGÈBRIQUE POUR L'ESTIMATION D'ÉTAT

Considérons le système (1). La relation entrée/sortie peut alors s'exprimer par :

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)}(t) + \pi(t) \quad (3)$$

avec $a_n = 1$, $m < n$ et $\pi(t)$ est le signal de perturbation. Une large classe de perturbations concerne des signaux de la forme :

$$\pi(t) = \sum_{i=0}^g c_i t^i + \sum_{i=1}^k (d_i \sin(w_i t) + f_i \cos(w_i t)).$$

Si le système est observable, alors la matrice d'observabilité est inversible. Quand l'hypothèse (2) est vérifiée, on peut exprimer les états $x(t)$ en fonction de $u(t)$, $y(t)$ et de leur dérivées de la façon suivante :

$$x(t) = \mathbf{O}_{(A,C)}^{-1} \left[\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ y^{(2)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} - \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \right] \quad (4)$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ CB & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{n-2}B & CA^{n-3}B & \dots & CB \end{pmatrix}$$

Ainsi, on peut estimer l'état si on connaît la sortie y , l'entrée u et leur dérivées jusqu'à un ordre fini. Par la suite, nous donnons l'expression formelle de ces variables en fonction d'intégrales portant sur la sortie et l'entrée.

Théorème 1: Pour les systèmes linéaires stationnaires données par la relation entrée/sortie (3), les estimations des dérivées successives par rapport au temps de la sortie mesurable y sont données par l'expression suivante :

$$\begin{pmatrix} y_e^{(1)}(t) \\ y_e^{(2)}(t) \\ y_e^{(3)}(t) \\ \vdots \\ y_e^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = -\frac{1}{(-t)^{n+\xi}} \tilde{\mathbf{R}}(t) \begin{pmatrix} y_e(t) \\ y_e^{(1)}(t) \\ y_e^{(2)}(t) \\ \vdots \\ y_e^{(n-2)}(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{(-t)^{n+\xi}} \left(\begin{pmatrix} M_1(u) \\ M_2(u) \\ M_3(u) \\ \vdots \\ M_{n-1}(u) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1(y) \\ F_2(y) \\ F_3(y) \\ \vdots \\ F_{n-1}(y) \end{pmatrix} \right) \quad (5)$$

avec

$$y_e(t) = \frac{M_0(u) - F_0(y)}{(-t)^{n+\xi}} \quad (6)$$

et

$$\tilde{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_{1,0} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{2,0} & \alpha_{2,1} & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_{3,0} & \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-1,0} & \alpha_{n-1,1} & \alpha_{n-1,2} & \dots & \alpha_{n-1,n-2} \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha_{\mu,h} = \tilde{d}_{\mu,h} + \sum_{j=1}^{\mu-h} c_j \sum_{q=h}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{h,q}, \quad c_j = \binom{n+\xi}{j}$$

$$\tilde{d}_{\mu,h} = \binom{\mu}{h} \frac{(-1)^{n+\xi} (n+\xi)!}{(n+\xi-\mu+h)!} t^{n+\xi-\mu+h}$$

$$\tilde{r}_{h,\mu} = \binom{q}{h} \frac{(-1)^{n+\xi-j} (n+\xi-j)!}{(n+\xi-j-q+h)!} t^{n+\xi-j-q+h}$$

$$F_\mu(y) = \sum_{j=1}^{\mu} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_1(s)] * (-t)^{n+\xi-j} y(t) \right) + \sum_{j=\mu+1}^{n+\xi} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_2(s)] * (-t)^{n+\xi-j} y(t) \right)$$

$$M_\mu(u) = \sum_{j=0}^{n+\xi} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_4(s)] * (-t)^{n+\xi-j} u(t) \right)$$

si $\mu < n - m$

$$M_\mu(u) = \sum_{j=0}^{m+\mu-n} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_3(s)] * (-t)^{n+\xi-j} u(t) \right) + \sum_{j=m+\mu-n+1}^{n+\xi} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_4(s)] * (-t)^{n+\xi-j} u(t) \right) + \sum_{h=0}^{m+\mu-n-1} \sum_{j=0}^{m+\mu-n-h} c_j \sum_{q=h}^{m+\mu-n-j} k'_q \tilde{r}'_{h,q} u^{(h)}$$

si $\mu \geq n - m$

$$D_1(s) = s^{g+1} \prod_{i=1}^k (s^2 + w_i^2) \sum_{i=0}^n a_i s^i$$

$$D_2(s) = s^{g+1} \prod_{i=1}^k (s^2 + w_i^2) \sum_{i=0}^m b_i s^i$$

$$\xi = g + 1 + 2k$$

$Q_1(s)$, $Q_2(s)$, $Q_3(s)$ et $Q_4(s)$ sont des fractions rationnelles.

Preuve

a) Application de la transformation de Laplace sur la relation entrée/sortie (3) :

$$\sum_{i=0}^n a_i \left(s^i y(s) - s^{i-1} y(0) - \dots - y^{(i-1)}(0) \right) = \sum_{i=0}^m b_i \left(s^i u(s) - s^{i-1} u(0) - \dots - u^{(i-1)}(0) \right) + \pi(s) \quad (7)$$

$$\text{avec } \pi(s) = \sum_{i=0}^g c_i \frac{i!}{s^{i+1}} + \sum_{i=1}^k \frac{d_i w_i + f_i s}{s^2 + w_i^2}.$$

$\pi(s) = \frac{N(s)}{P(s)}$ est une fraction rationnelle strictement propre, c'est-à-dire $\deg(N(s)) < \deg(P(s)) = \xi = g + 1 + 2k$.

b) Manipulation algébrique.

Multiplions les deux membres de l'expression (7) par $s^{g+1} \prod_{i=1}^k (s^2 + w_i^2) = P(s)$:

$$P(s) \sum_{i=0}^n a_i \left(s^i y(s) - s^{i-1} y(0) - \dots - y^{(i-1)}(0) \right) = P(s) \sum_{i=0}^m b_i \left(s^i u(s) - s^{i-1} u(0) - \dots - u^{(i-1)}(0) \right) + N(s) \quad (8)$$

Posons

$$D_1(s) = P(s) \sum_{i=0}^n a_i s^i : \text{polynôme de degré } n + \xi$$

$$\Gamma_1(s) = P(s) \sum_{i=0}^n a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j y_{(0)}^{(i-1-j)} : \text{polynôme de degré } n - 1 + \xi$$

$$D_2(s) = P(s) \sum_{i=0}^m b_i s^i : \text{polynôme de degré } m + \xi$$

$$\Gamma_2(s) = P(s) \sum_{i=0}^m b_i \sum_{j=0}^{i-1} s^j u_{(0)}^{(i-1-j)} : \text{polynôme de degré } m - 1 + \xi$$

Réécrivons (8) sous la forme suivante :

$$D_1(s)y(s) - \Gamma_1(s) = D_2(s)u(s) - \Gamma_2(s) + N(s)$$

Pour éliminer les conditions initiales $\Gamma_1(s)$ et $\Gamma_2(s)$ et les perturbations $N(s)$, on dérive l'expression précédente $n + \xi$ fois par rapport à s en utilisant la formule de Leibniz :

$$\frac{d^h(X(s)y(s))}{ds^h} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{d^{h-j}(X(s))}{ds^{h-j}} \frac{d^j(y(s))}{ds^j},$$

et on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n+\xi} c_j \frac{d^j D_1(s)}{ds^j} \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \\ = \sum_{j=0}^{n+\xi} c_j \frac{d^j D_2(s)}{ds^j} \frac{d^{n+\xi-j}(u(s))}{ds^{n+\xi-j}} \end{aligned} \quad (9)$$

avec $c_j = \binom{n+\xi}{j}$. Afin d'estimer $y^{(\mu)}(t)$ ($0 \leq \mu < n$), multiplions les deux membres de (9) par $\frac{s^\mu}{D_1(s)}$:

$$\begin{aligned} s^\mu \frac{d^{n+\xi}(y(s))}{ds^{n+\xi}} + \sum_{j=1}^{n+\xi} c_j \frac{s^\mu}{D_1(s)} \frac{d^j D_1(s)}{ds^j} \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \\ = \sum_{j=0}^{n+\xi} c_j \frac{s^\mu}{D_1(s)} \frac{d^j D_2(s)}{ds^j} \frac{d^{n+\xi-j}(u(s))}{ds^{n+\xi-j}} \end{aligned} \quad (10)$$

On a la transformée de Laplace inverse suivante pour le premier terme de l'équation (10) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(s^\mu \frac{d^{n+\xi}(y(s))}{ds^{n+\xi}} \right) &= \frac{d^\mu \left((-t)^{n+\xi} y(t) \right)}{dt^\mu} \\ &= \sum_{h=0}^{\mu} \binom{\mu}{h} \frac{d^{\mu-h} \left((-t)^{n+\xi} \right)}{dt^{\mu-h}} y^{(h)}(t) \end{aligned}$$

et en appliquant la relation :

$$\frac{d^k(s^l)}{ds^k} = \begin{cases} \frac{l!}{(l-k)!} s^{l-k}, & \text{si } 0 < k \leq l \\ 0, & \text{si } 0 < l < k \\ \frac{(-1)^k (k-l-1)!}{(l-1)!} s^{l-k}, & \text{si } l < 0 < k \end{cases}$$

on voit apparaître le terme $y^{(\mu)}(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(s^\mu \frac{d^{n+\xi}(y(s))}{ds^{n+\xi}} \right) = (-t)^{n+\xi} y^{(\mu)}(t) + \sum_{h=0}^{\mu-1} \tilde{d}_{\mu,h} y^{(h)}(t). \quad (11)$$

avec

$$\tilde{d}_{\mu,h} = \binom{\mu}{h} \frac{(-1)^{n+\xi} (n+\xi)!}{(n+\xi-\mu+h)!} t^{n+\xi-\mu+h}$$

Intéressons-nous au deuxième terme de l'équation (10) et posons $\frac{\tilde{D}_{\mu,j}(s)}{D_1(s)} = \frac{s^\mu}{D_1(s)} \frac{d^j D_1(s)}{ds^j}$ qui est une fraction rationnelle avec $\deg(\tilde{D}_{\mu,j}(s)) = n + \xi - j + \mu$ et $\deg(D_1(s)) = n + \xi$. Deux cas se présentent : quand $1 \leq j \leq \mu$, on a $\deg(\tilde{D}_{\mu,j}(s)) \geq \deg(D_1(s))$ et $\frac{\tilde{D}_{\mu,j}(s)}{D_1(s)}$ est la somme d'un polynôme et d'une fraction rationnelle strictement propre ; quand $\mu < j \leq n + \xi$, on a $\deg(\tilde{D}_{\mu,j}(s)) < \deg(D_1(s))$ et $\frac{\tilde{D}_{\mu,j}(s)}{D_1(s)}$ est alors une fraction rationnelle strictement propre. On peut donc écrire :

$$\frac{\tilde{D}_{\mu,j}(s)}{D_1(s)} = \begin{cases} \sum_{q=0}^{\mu-j} k_q s^q + Q_1(s), & \text{si } 1 \leq j \leq \mu \\ Q_2(s), & \text{si } \mu + 1 \leq j \leq n + \xi \end{cases} \quad (12)$$

Calculons la transformée de Laplace inverse de

$$\sum_{j=1}^{n+\xi} c_j \frac{\tilde{D}_{\mu,j}(s)}{D_1(s)} \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}}.$$

Quand $1 \leq j \leq \mu$, on a (en procédant comme pour (11)) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{q=0}^{\mu-j} k_q s^q \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \right) \\ = \sum_{q=0}^{\mu-j} k_q \sum_{h=0}^q \binom{q}{h} \frac{(-1)^{n+\xi-j} (n+\xi-j)!}{(n+\xi-j-q+h)!} t^{n+\xi-j-q+h} y^{(h)}(t) \end{aligned}$$

En posant

$$\tilde{r}_{h,\mu} = \binom{q}{h} \frac{(-1)^{n+\xi-j} (n+\xi-j)!}{(n+\xi-j-q+h)!} t^{n+\xi-j-q+h}$$

il peut être démontré que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\mu} c_j \sum_{q=0}^{\mu-j} k_q s^q \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \right) \\ = c_1 k_0 \tilde{r}_{0,0} y + c_1 k_1 (\tilde{r}_{0,1} y + \tilde{r}_{1,1} y^{(1)}) + \dots + c_1 k_{\mu-1} (\tilde{r}_{0,\mu-1} y + \dots + \tilde{r}_{\mu-1,\mu-1} y^{(\mu-1)}) \\ + c_2 k_0 \tilde{r}_{0,0} y + c_2 k_1 (\tilde{r}_{0,1} y + \tilde{r}_{1,1} y^{(1)}) + \dots + c_2 k_{\mu-2} (\tilde{r}_{0,\mu-2} y + \dots + \tilde{r}_{\mu-2,\mu-2} y^{(\mu-2)}) \\ + \dots + c_{\mu-1} k_0 \tilde{r}_{0,0} y + c_{\mu-1} k_1 (\tilde{r}_{0,1} y + \tilde{r}_{1,1} y^{(1)}) + c_{\mu} k_0 \tilde{r}_{0,0} y \\ = \sum_{j=1}^{\mu} c_j \sum_{q=0}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{0,q} y + \sum_{j=1}^{\mu-1} c_j \sum_{q=1}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{1,q} y^{(1)} + \dots + \sum_{j=1}^{\mu-1} c_j \sum_{q=\mu-1}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{\mu-1,q} y^{(\mu-1)} \\ = \sum_{h=0}^{\mu-1} \sum_{j=1}^{\mu-1} c_j \sum_{q=h}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{h,q} y^{(h)} \end{aligned} \quad (13)$$

Sans perte de généralité, on peut réécrire la fraction rationnelle $Q_1(s)$ de (12) de la façon suivante

$$Q_1(s) = \sum_{q=0}^{n+\xi-1} \frac{h_q}{s + \lambda_q}.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\mu} c_j Q_1(s) \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \right) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{\mu} c_j \sum_{q=0}^{n+\xi-j} \frac{h_q}{s + \lambda_q} \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{\mu} c_j \sum_{q=0}^{n+\xi-j} \int_0^t h_q e^{-\lambda_q(t-\tau)} (-\tau)^{n+\xi-j} y(\tau) d\tau \quad (14) \end{aligned}$$

Cette partie ne fait donc intervenir que des intégrales de la sortie et agit comme un filtre. Quand $\mu < j \leq n + \xi$ dans la relation (12), il en est de même pour le terme $Q_2(s)$.

On regroupe les parties qui agissent comme des filtres et on note :

$$\begin{aligned} F_{\mu}(y) &= \sum_{j=1}^{\mu} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_1(s)] * (-t)^{n+\xi-j} y(t) \right) \\ &+ \sum_{j=\mu+1}^{n+\xi} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_2(s)] * (-t)^{n+\xi-j} y(t) \right) \quad (15) \end{aligned}$$

En utilisant (11), (13) et (15), on obtient pour la transformée inverse du terme de gauche de l'équation (10) :

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^{-1} \left(s^{\mu} \frac{d^{n+\xi}(y(s))}{ds^{n+\xi}} + \sum_{j=1}^{n+\xi} c_j \frac{\tilde{D}_{\mu,j}(s)}{D_1(s)} \frac{d^{n+\xi-j}(y(s))}{ds^{n+\xi-j}} \right) \\ &= (-t)^{n+\xi} y^{(\mu)} + \sum_{h=0}^{\mu-1} \left(\tilde{d}_{\mu,h} + \sum_{j=1}^{\mu-h} c_j \sum_{q=h}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{h,q} \right) y^{(h)} + F_{\mu}(y) \quad (16) \end{aligned}$$

Pour simplifier l'expression, nous posons :

$$\alpha_{\mu,h} = \tilde{d}_{\mu,h} + \sum_{j=1}^{\mu-h} c_j \sum_{q=h}^{\mu-j} k_q \tilde{r}_{h,q}.$$

On procède de la même manière pour le terme de droite de l'équation (10) impliquant l'entrée u . Posons $\frac{E_{\mu,j}(s)}{D_1(s)} = \frac{s^{\mu}}{D_1(s)} \frac{d^j D_2(s)}{ds^j}$ qui est une fraction rationnelle avec $\deg(E_{\mu,j}(s)) = m + \xi - j + \mu$ et $\deg(D_1(s)) = n + \xi$.

Quand $0 \leq j \leq m + \mu - n$, $\deg(E_{\mu,j}(s)) \geq \deg(D_1(s))$, $\frac{E_{\mu,j}(s)}{D_1(s)}$ est la somme d'un polynôme et d'une fonction rationnelle strictement propre ; quand $m + \mu - n < j \leq n + \xi$, on a toujours $\deg(E_{\mu,j}(s)) < \deg(D_1(s))$ et $\frac{E_{\mu,j}(s)}{D_1(s)}$ est une fonction rationnelle strictement propre. En bref, on a :

$$\frac{E_{\mu,j}(s)}{D_1(s)} = \begin{cases} \sum_{q=0}^{m+\mu-j-n} k'_q s^q + Q_3(s), & \text{si } j \leq m + \mu - n \\ Q_4(s), & \text{si } m + \mu - n < j \leq n + \xi \end{cases}$$

Donc, quand $\mu < n - m$

$$M_{\mu}(u) = \sum_{j=0}^{n+\xi} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_4(s)] * (-t)^{n+\xi-j} u(t) \right) \quad (17)$$

et quand $\mu \geq n - m$

$$\begin{aligned} M_{\mu}(u) &= \sum_{j=0}^{m+\mu-n} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_3(s)] * (-t)^{n+\xi-j} u(t) \right) \\ &+ \sum_{j=m+\mu-n+1}^{n+\xi} c_j \left(\mathcal{L}^{-1} [Q_4(s)] * (-t)^{n+\xi-j} u(t) \right) \\ &+ \sum_{h=0}^{m+\mu-n-1} \sum_{j=0}^{m+\mu-n-h} c_j \sum_{q=h}^{m+\mu-n-j} k'_q \tilde{r}'_{h,q} u^{(h)} \quad (18) \end{aligned}$$

Ici, on suppose que l'entrée u est suffisamment dérivable et que ses dérivées sont connues. Toutefois, en procédant comme dans [8], on pourrait obtenir une expression qui ne fait plus intervenir les dérivées de l'entrée.

En utilisant (10), (16), (17) et (18), on obtient :

$$y_e^{(\mu)}(t) = \frac{1}{(-t)^{n+\xi}} \left(- \sum_{h=0}^{\mu-1} \alpha_{\mu,h} y_e^{(h)}(t) - F_{\mu}(y) + M_{\mu}(u) \right) \quad (19)$$

L'expression y_e de l'estimation de y est donc, en particulier, donnée par (6) qui ne comporte que des intégrales de la sortie. On considère cette estimation y_e pour la raison suivante : elle donne une estimation débruitée du signal de sortie et peut être aussi utilisée dans l'estimation des dérivées successives de la sortie y afin d'atténuer l'influence du bruit de mesure.

Enfin, en utilisant l'expression (19) pour μ variant de 0 à $n - 1$, on obtient (5) comme l'expression des dérivées successives de la sortie y . Grâce à la structure triangulaire de la matrice \tilde{R} , on obtient l'estimation de la μ^{ieme} dérivée de la sortie y uniquement en fonction d'intégrales portant sur la sortie et l'entrée.

c) L'estimation de l'état est simplement obtenue en utilisant la relation (4) :

$$x_e(t) = \mathbf{O}_{(A,C)}^{-1} \left[\begin{pmatrix} y_e \\ y_e^{(1)} \\ y_e^{(2)} \\ \vdots \\ y_e^{(n-1)} \end{pmatrix} - \mathbf{M} \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ u^{(2)} \\ \vdots \\ u^{(n-2)} \end{pmatrix} \right]$$

IV. EXEMPLE

Un système de moteur à courant continu avec des perturbations extérieures est décrit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ J\dot{x}_2 &= K_1 x_3 \\ L\dot{x}_3 &= -R x_3 - K_2 x_2 + u + \frac{L}{K_1} (q_1 + q_2 \cos \omega t) \end{cases}$$

où $y = x_1$ est la sortie mesurable ; x_1 est la position angulaire du rotor, x_2 est la vitesse angulaire du rotor, x_3 est le courant du rotor et u est la tension d'entrée. K_1, K_2, J, L et R sont des paramètres constants et strictement positifs. $q_1 + q_2 \cos \omega t$ est la perturbation.

On exprime l'état en fonction de y et de u :

$$\begin{cases} x_1 &= y(t) \\ x_2 &= \dot{y}(t) \\ x_3 &= \frac{1}{K_1} y^{(2)}(t) \end{cases} \quad (20)$$

A. Approche algébrique

Partons de la relation entrée/sortie :

$$y^{(3)}(t) + \frac{R}{L}y^{(2)}(t) + \frac{K_1K_2}{LJ}\dot{y}(t) = \frac{K_1}{LJ}u(t) + q_1 + q_2 \cos wt \quad (21)$$

a) Transformée de Laplace de la relation (21) :

$$\begin{aligned} & (s^3y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y^{(2)}(0)) + \frac{R}{L}(s^2y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)) \\ & + \frac{K_1K_2}{LJ}(sy(s) - y(0)) = \frac{K_1}{LJ}u(s) + \frac{q_1}{s} + \frac{q_2s}{s^2+w^2} \quad (22) \end{aligned}$$

b) Manipulation algébrique.

On multiplie les deux membres de l'expression précédente par $s(s^2 + w^2)$ et on obtient :

$$\begin{aligned} & (s^4y(s) - s^3y(0) - s^2\dot{y}(0) - sy^{(2)}(0))(s^2 + w^2) \\ & + \frac{R}{L}(s^3y(s) - s^2y(0) - sy'(0))(s^2 + w^2) \\ & + \frac{K_1K_2}{LJ}(s^2y(s) - sy(0))(s^2 + w^2) \\ & = \frac{K_1}{LJ}s(s^2 + w^2)u(s) + q_1(s^2 + w^2) + q_2s^2 \quad (23) \end{aligned}$$

On dérive six fois (23) par rapport à s pour éliminer les conditions initiales :

$$\begin{aligned} & [720y + 4320s \frac{dy}{ds} + 5400s^2 \frac{d^2y}{ds^2} + 2400s^3 \frac{d^3y}{ds^3} + 450s^4 \frac{d^4y}{ds^4} + 36s^5 \frac{d^5y}{ds^5} \\ & + s^6 \frac{d^6y}{ds^6} + w^2(360 \frac{d^2y}{ds^2} + 480s \frac{d^3y}{ds^3} + 180s^2 \frac{d^4y}{ds^4} + 24s^3 \frac{d^5y}{ds^5} + s^4 \frac{d^6y}{ds^6})] \\ & + \frac{R}{L}[720 \frac{dy}{ds} + 1800s \frac{d^2y}{ds^2} + 1200s^2 \frac{d^3y}{ds^3} + 300s^3 \frac{d^4y}{ds^4} + 30s^4 \frac{d^5y}{ds^5} \\ & + s^5 \frac{d^6y}{ds^6} + w^2(120 \frac{d^3y}{ds^3} + 90s \frac{d^4y}{ds^4} + 18s^2 \frac{d^5y}{ds^5} + s^3 \frac{d^6y}{ds^6})] \\ & + \frac{K_1K_2}{LJ}[360 \frac{d^2y}{ds^2} + 480s \frac{d^3y}{ds^3} + 180s^2 \frac{d^4y}{ds^4} + 24s^3 \frac{d^5y}{ds^5} + s^4 \frac{d^6y}{ds^6} \\ & + w^2(30 \frac{d^4y}{ds^4} + 12s \frac{d^5y}{ds^5} + s^2 \frac{d^6y}{ds^6})] \\ & = \frac{K_1}{LJ}[120 \frac{d^3u}{ds^3} + 90s \frac{d^4u}{ds^4} + 18s^2 \frac{d^5u}{ds^5} + s^3 \frac{d^6u}{ds^6} + w^2(6 \frac{d^5u}{ds^5} + s \frac{d^6u}{ds^6})] \quad (24) \end{aligned}$$

On multiplie les deux membres de (24) par $\{s^2(s^2 + w^2)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K_1K_2}{LJ})\}^{-1} = \frac{1}{D(s)}$ pour reconstruire y_e . Ici, on entre dans le détail de l'implantation pour la simulation :

$$\begin{aligned} y_e &= \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{120}{D(s)} \right] * (-t^3u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{90s}{D(s)} \right] * (t^4u) \right) \\ &+ \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{18s^2 + 6w^2}{D(s)} \right] * (-t^5u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^3 + w^2s}{D(s)} \right] * (t^6u) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_1(s)}{D(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_2(s)}{D(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_3(s)}{D(s)} \right] * (t^2y) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_4(s)}{D(s)} \right] * (-t^3y) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_5(s)}{D(s)} \right] * (t^4y) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_6(s)}{D(s)} \right] * (-t^5y) \right) \quad (25) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} N_1(s) &= 720 \\ N_2(s) &= 4320s + \frac{R}{L}720 \\ N_3(s) &= 5400s^2 + \frac{R}{L}1800s + (w^2 + \frac{K_1K_2}{LJ})360 \\ N_4(s) &= 2400s^3 + \frac{R}{L}1200s^2 + (w^2 + \frac{K_1K_2}{LJ})480s + \frac{R}{L}w^2120 \\ N_5(s) &= 450s^4 + \frac{R}{L}300s^3 + (\frac{K_1K_2}{LJ} + w^2)180s^2 + \frac{R}{L}w^290s + \frac{K_1K_2}{LJ}w^230 \\ N_6(s) &= 36s^5 + \frac{R}{L}30s^4 + (\frac{K_1K_2}{LJ} + w^2)24s^3 + \frac{R}{L}w^218s^2 + \frac{K_1K_2}{LJ}w^212s \end{aligned}$$

Afin d'estimer $y_e^{(1)}$, on multiplie les deux membres de (24) par $\frac{1}{s(s^2 + w^2)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K_1K_2}{LJ})} = \frac{1}{D_1(s)}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} y_e &= \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{120}{D_1(s)} \right] * (-t^3u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{90s}{D_1(s)} \right] * (t^4u) \right) \\ &+ \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{18s^2 + 6w^2}{D_1(s)} \right] * (-t^5u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^3 + w^2s}{D_1(s)} \right] * (t^6u) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_1(s)}{D_1(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_2(s)}{D_1(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_3(s)}{D_1(s)} \right] * (t^2y) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_4(s)}{D_1(s)} \right] * (-t^3y) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_5(s)}{D_1(s)} \right] * (t^4y) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-36(D_1(s) - s^5) + (N_6(s) - 36s^5)}{D_1(s)} \right] * (-t^5y) + \frac{30y_e}{t} \quad (26) \end{aligned}$$

Afin d'estimer $y_e^{(2)}$, on multiplie les deux membres de (24) par $\frac{1}{(s^2 + w^2)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K_1K_2}{LJ})} = \frac{1}{D_2(s)}$. On a :

$$\begin{aligned} y_e^{(2)} &= \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{120}{D_2(s)} \right] * (-t^3u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{90s}{D_2(s)} \right] * (t^4u) \right) \\ &+ \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{18s^2 + 6w^2}{D_2(s)} \right] * (-t^5u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^3 + w^2s}{D_2(s)} \right] * (t^6u) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_1(s)}{D_2(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_2(s)}{D_2(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_3(s)}{D_2(s)} \right] * (t^2y) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_4(s)}{D_2(s)} \right] * (-t^3y) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-450(D_2(s) - s^4) + (N_5(s) - 450s^4)}{D_2(s)} \right] * (t^4y) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6\frac{R}{L}(D_2(s) - s^4) - 36s(D_2(s) - s^4 - \frac{R}{L}s^3)}{D_2(s)} \right] * (-t^5y) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_6(s) - 36s^5 - 30\frac{R}{L}s^4}{D_2(s)} \right] * (-t^5y) \\ &+ \frac{24\dot{y}_e}{t} - 6\frac{R}{L}\frac{y_e}{t} - \frac{300y_e}{t^2} \quad (27) \end{aligned}$$

Afin d'estimer $y_e^{(3)}$, on multiplie les deux membres de (24) par $\frac{s}{(s^2 + w^2)(s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{K_1K_2}{LJ})} = \frac{s}{D_2(s)} = \frac{1}{D_3(s)}$. On obtient :

$$\begin{aligned} y_e^{(3)} &= \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{120}{D_3(s)} \right] * (-t^3u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{90s}{D_3(s)} \right] * (t^4u) \right) \\ &+ \frac{1}{t^6} \frac{K_1}{LJ} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{18s^2 + 6w^2}{D_3(s)} \right] * (-t^5u) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s^3 + w^2s}{D_3(s)} \right] * (t^6u) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_1(s)}{D_3(s)} \right] * y + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_2(s)}{D_3(s)} \right] * (-ty) + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{N_3(s)}{D_3(s)} \right] * (t^2y) \right) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-2400(D_2(s) - s^4) + (sN_4(s) - 2400s^4)}{D_2(s)} \right] * (-t^3y) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{150\frac{R}{L}(D_2(s) - s^4) - 450s(D_2(s) - s^4 - \frac{R}{L}s^3) + s(N_5(s) - 450s^4 - \frac{R}{L}300s^3)}{D_2(s)} \right] * \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{-36s^2(D_2(s) - s^4 - \frac{R}{L}s^3 - (\frac{K_1K_2}{LJ} + w^2)s^2)}{D_2(s)} \right] * (-t^5y) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{6\frac{R}{L}s(D_2(s) - s^4 - \frac{R}{L}s^3) + (12(\frac{K_1K_2}{LJ} + w^2) + 6\frac{R^2}{L^2})(D_2(s) - s^4)}{D_2(s)} \right] * (-t^5y) \\ &- \frac{1}{t^6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s(N_6(s) - 36s^5 - 30\frac{R}{L}s^4 - (\frac{K_1K_2}{LJ} + w^2)24s^3)}{D_2(s)} \right] * (-t^5y) \\ &+ \frac{24y_e^{(2)}}{t} - \frac{180}{t^2}\dot{y}_e - \frac{6\frac{R}{L}\dot{y}_e}{t} + \frac{120\frac{R}{L}\dot{y}_e}{t^2} + \frac{1200y_e}{t^3} - \frac{12(\frac{K_1K_2}{LJ} + w^2)y_e}{t} + \frac{6\frac{R^2}{L^2}\dot{y}_e}{t} \quad (28) \end{aligned}$$

c) Reconstruction d'état.

En utilisant les estimées obtenues dans (25), (26) et (27), on réussit à exprimer les états en fonction de l'intégrale de $y(t)$ et de $u(t)$:

$$\begin{cases} x_1 &= y_e(t) \\ x_2 &= \dot{y}_e(t) \\ x_3 &= \frac{J}{K_1} y_e^{(2)}(t) \end{cases}$$

B. Simulation

L'estimation d'état et la robustesse par rapport au bruit de mesure sont illustrées en simulation. Les conditions initiales sont : $x_3(0) = 3(A)$, $x_2(0) = 0(rad/s)$ et $x_1(0) = 1(rad)$ avec la tension d'entrée $u(t) = 24 \sin(t)$. Les paramètres suivants sont utilisés pour la simulation : $K_1 = 1(N/(m \cdot A))$, $K_2 = 1(N/(m \cdot A))$, $L = 0.1(H)$, $R = 1(\Omega)$ et $J = 5(N \cdot s^2/m \cdot rad)$. Pour les perturbations, $q_1 + q_2 \cos wt$ où $q_1 = 1$, $q_2 = 1$. Ces amplitudes n'ont pas besoins d'être connues mais la valeur de fréquence $w = 50$ doit être connue.

Il faut noter qu'au temps $t = 0$, l'état est indéterminé. Nous devons donc commencer à évaluer les formules non pas au temps $t = 0$ mais après un court instant ε (quand $t \in [0, \varepsilon]$, on fige l'état à 0).

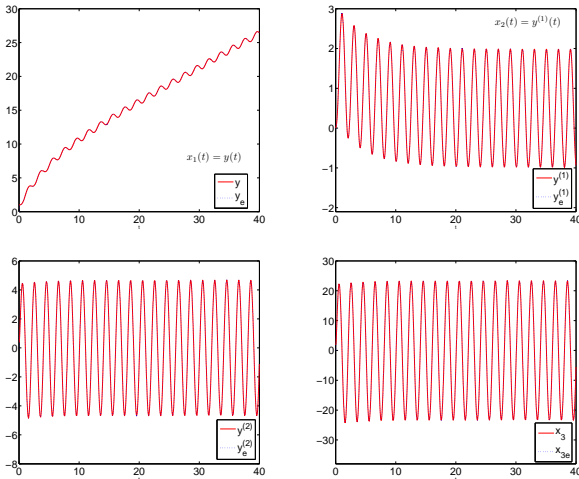


Fig. 1. Valeurs réelles et estimées (sans bruit).

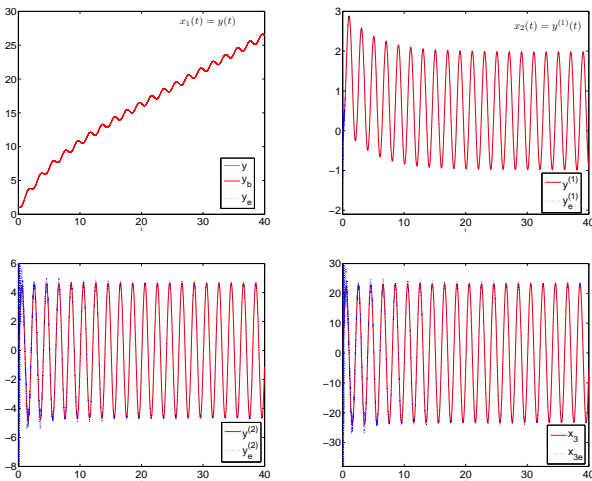


Fig. 2. Valeurs réelles et estimées (avec le bruit blanc).

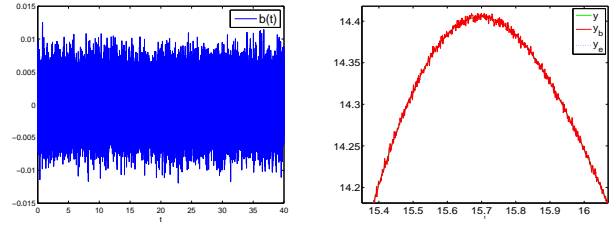


Fig. 3. Bruit blanc.

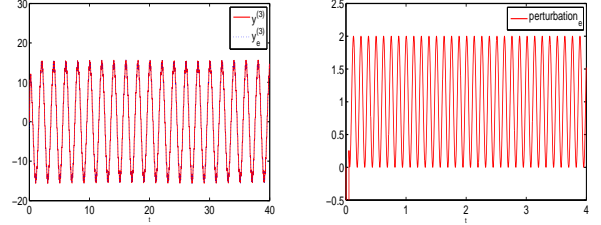


Fig. 4. Perturbation.

La figure 1 montre que l'estimateur donne de bons résultats puisque l'état estimé atteint exactement la valeur réelle après un temps petit ε (ici on a choisi $\varepsilon = 0.15s$).

Dans la figure 2, le signal mesuré $y(t)$ est perturbé par un bruit blanc (Fig. 3 où la figure de droite est un zoom de la sortie bruitée et de la valeur estimée), répartie uniformément dans l'intervalle $[-0.015, 0.015]$, avec une fréquence d'échantillonnage de 1000 Hz. On peut voir que l'estimateur est peu sensible par rapport au bruit blanc.

La droite de la figure 4 est valeurs réelles et estimées de $y^{(3)}$ (sans bruit) et la figure de gauche est l'estimée de la perturbation inconnue $q_1 + q_2 \cos wt$ qui peut être obtenu par la relation entrée/sortie (21).

V. CONCLUSION

Dans cet article, une approche algébrique pour l'estimation d'état en temps fini des systèmes linéaires stationnaires avec des perturbations extérieures structurées a été introduite. Une expression formelle pour cette estimation a été développée. Remarquons que cette approche montre de bonnes propriétés de robustesse par rapport au bruit blanc.

RÉFÉRENCES

- [1] D.G. LUENBERGER : Observers for multivariable systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 11(2):190–197, 1966.
- [2] R. E. KALMAN : A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 82-D:35–45, 1960.
- [3] R. E. KALMAN et R. S. BUCY : New results in linear filtering and prediction theory. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, 83:95–107, 1961.
- [4] M. FLIESS et H. SIRA-RAMIREZ : An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim.*, 9:151–168, 2003.
- [5] M. FLIESS et H. SIRA-RAMIREZ : Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques. *In Continuous-Time Model Identification from Sampled Data*. Springer, 2008.
- [6] M. FLIESS et S. DIOP : Nonlinear observability, identifiability and persistent trajectories. *Proc. 36th IEEE Conference on Decision Control*, 1991.
- [7] J. P. BARBOT, M. FLIESS et T. FLOQUET : An algebraic framework for the design of nonlinear observers with unknown inputs. *46th IEEE Conference on Decision and Control*, 2007.
- [8] Y. TIAN, T. FLOQUET et W. PERRUQUETTI : Fast state estimation in linear time-invariant systems : an algebraic approach. *In 16th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Ajaccio, France, 2008.