

# Commande CRONE pour la régulation d'une autoroute : sortie d'un péage routier

Milka UZUNOVA<sup>1</sup>, Daniel JOLLY<sup>1</sup>, Emil NIKOLOV<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Lille Nord de France,  
LGI2A, FSA de Béthune  
Rue de l'Université. 62400 Béthune, France.  
*muzunova@tu-sofia.bg, daniel.jolly@fsa.univ-artois.fr*

<sup>2</sup> Université Technique de Sofia, ANP, Faculté d'Automatique, bvd. Kliment Ohridsky. 1000 Sofia, Bulgarie.  
*nikoloff@tu-sofia.bg*

*Résumé*— **Abstract** : Les systèmes de flux de trafic sont des systèmes complexes. Ils appartiennent à la classe des systèmes à paramètres distribués lorsqu'on observe la répartition des véhicules sur le réseau routier. Ils appartiennent également à la classe des systèmes incertains, car nous avons une variation non-interrompue dans le temps et dans l'espace des paramètres. Généralement, ces variations sont conditionnées par des événements ou des situations perturbées. Nous pouvons donc associer ces systèmes de flux de trafic aux processus perturbés. Les perturbations peuvent provoquer différents problèmes qualitatifs ou quantitatifs dans le fonctionnement d'un processus. Dans le domaine des flux de trafic, les perturbations entraînent le plus souvent des congestions. Comment les diminuer ou éviter reste toujours une question à résoudre. Dans le présent article, nous développons une démarche pour la commande robuste du modèle LWR. Nous avons déjà trouvé une solution au cas stationnaire qui est assimilable à un retard dépendant de la densité, de la vitesse et des paramètres du modèle LWR. L'intérêt de l'étude réside dans l'application d'une commande contenant une boucle interne de prédiction de ce retard. Afin de prendre en compte la variation des paramètres, la démarche est enrichie à l'aide d'une structure améliorée par la mise en uvre d'algorithmes non-entiers (CRONE). Celui-ci permet d'assurer l'invariance et la robustesse de la commande. Les résultats des simulations montrent la pertinence de l'approche robuste proposée et de la structure du système de commande utilisée pour le modèle LWR et laissent entrevoir des perspectives intéressantes dans le domaine de commande du trafic.

*Mots-clés*— trafic routier, modèle macroscopique LWR, commande robuste d'ordre non-entière, Smith prédiction, filtre de compensation DTC.

## I. INTRODUCTION

Les systèmes de transport ont toujours joué un rôle très important dans le développement économique mondial. Du fait de l'augmentation croissante des déplacements des biens et des personnes au cours des dernières décennies, de nombreux problèmes sont apparus dans ce domaine. Le plus souvent ces problèmes sont liés aux congestions, qui engendrent une augmentation des coûts et des temps de transport etc. Une solution économiquement viable de ce problème consiste à mettre en place des techniques de régulation des flux sur les infrastructures existantes. De nombreuses recherches ont été développées dans ce domaine proposant diverses méthodes de commande afin de maintenir le flux de trafic dans un état fluide. Néanmoins, la conception et la mise en place des commandes, imposent de disposer de modèles. Ceux-ci permettent de comprendre les phénomènes décrits, notamment l'influence des pertur-

bations sur le comportement des véhicules et donc sur les paramètres du modèle. La conséquence se mesure en termes de différence de densité ou de vitesse sur un segment routier. Après avoir pris un modèle de référence et défini les ensembles de variation des paramètres de ce modèle relativement aux perturbations admissibles, nous pourrions mettre en place les lois de commande appropriées.

Nos travaux montrent l'apport de la commande dans le domaine des systèmes de flux de trafic. Il s'agit en effet, d'étudier le trafic du point de vue de son caractère distribué et incertain afin d'aboutir à une proposition de synthèse de lois de commande. L'algorithme proposé devra assurer une certaine robustesse du système. Dans le présent article nous proposons une approche de synthèse d'une commande robuste d'ordre non-entier. Après une présentation du modèle du flux de trafic relatif à un segment autoroutier décrit dans la première partie, la seconde partie de cet article présente la conception de la commande CRONE précisant le schéma structurel utilisé dans la troisième partie. La pertinence de l'approche utilisée est graphiquement illustrée par un ensemble de simulations présentées dans la section quatre. En conclusion nous mettons l'accent sur les perspectives de nos travaux.

## II. MODÉLISATION DU FLUX DE TRAFIC PAR LE FORMALISME DE LA FONCTION DE TRANSFERT

Dans le domaine de l'automatique chaque processus industriel est décrit par un modèle analytique que l'on cherche à résoudre. Pour le modèle de LWR on a une équation aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire (1). La recherche d'une solution, par le formalisme de la fonction de transfert, est très utilisée lorsqu'on cherche à étudier la stabilité et les performances d'un processus automatique. Dans un premier temps nous allons présenter comment nous avons obtenu la fonction de transfert du modèle LWR du flux de trafic [2] et [7], pour un segment routier qui est situé à la sortie d'un péage routier. Lorsqu'on observe le phénomène de redémarrage, les modèles du deuxième ordre et du premier ordre se comportent d'une manière identique, le choix du modèle de représentation du système de flux de trafic étudié s'est naturellement reporté sur le modèle LWR. Le trafic routier est considéré en équilibre : en amont des barrières nous avons une vitesse nulle et une densité maximale alors qu'en aval nous avons une densité

nulle et une vitesse libre maximale [1] et [3]. Nous allons décrire ci-dessous la méthode de résolution de l'équation du modèle LWR (1) afin d'obtenir la fonction de transfert équivalente du système étudié. Nous avons utilisé une approche de résolution basée sur la fonction de Green (2) afin d'obtenir une solution de l'équation de LWR (1). L'idée principale sur laquelle repose cette méthode de résolution est de présenter l'EDP comme un produit de convolution d'un opérateur différentiel et d'une fonction source. Cette dernière, dans le cas présent, est une fonction de Dirac dans le temps et dans l'espace. La fonction recherchée, nommée *fonction de Green* est obtenue, en déterminant l'inverse de convolution de cet opérateur. Dans le cas stationnaire, nous obtenons comme résultat un retard pur (3) [8], qui dépend de la densité, de la vitesse du trafic et de la position dans l'espace. La solution de cette équation représente alors, la réponse du modèle en un point  $x$  à partir d'une source impulsionnelle qui est produite dans un autre point  $x_0$ . Dans la suite il est nécessaire de convertir la fonction de transfert irrationnelle (3) en une forme rationnelle (4). Pour cela il faut passer d'une représentation avec des paramètres du modèle de LWR ( $V_f$ ,  $L$ ,  $x$ ,  $x_0$  et  $\tau$ ) à une présentation avec des paramètres qui décrivent un procédé ( $k$ ,  $T$ ,  $\tau$ ).

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho(x,t)V(x,t))}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} + V(x,t) \frac{\partial(\rho(x,t))}{\partial x} + \rho(x,t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} = 0 \\ V(x,t) = V_f \left( 1 - \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}} \right) \end{array} \right] \quad (1)$$

$$\left[ \begin{array}{l} \left( \frac{\partial}{\partial t} + V(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho(x,t) = 0 \\ \frac{D}{DG(x, x_0, t, \tau)} = \delta(x - x_0) \delta(t - \tau) \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + V(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x, x_0, t, \tau) = \delta(x - x_0) \delta(t - \tau) \end{array} \right] \quad (2)$$

$$\left[ \begin{array}{l} G(x, x_0, t, \tau) = \\ = \frac{1}{V(x,t)} u(x - x_0) \delta \left( t - \frac{(x-x_0) - V(x,t)\tau}{V(x,t)} \right) \\ G(x, x_0, p) = \frac{1}{V(x,p)} u(x - x_0) e^{-p \left( \frac{(x-x_0) - V(x,t)\tau}{V(x,t)} \right)} \\ G(x, x_0, p) = \frac{1}{V(x,p)} u(x - x_0) e^{-p \left( \frac{(x-x_0)}{V(x,t)} \right)} e^{-p\tau} \end{array} \right] \quad (3)$$

$$\left[ \begin{array}{l} G(x, x_0, p) = W(x, x_0, p) = e^{-p \left( \frac{(x-x_0)}{V(x,t)} \right)} e^{-p\tau} = \\ = \left( \frac{k_{LWR}}{T_{LWR} p + 1} \right) \left( \frac{1}{\tau^2_{LWR} p^2 + \tau_{LWR} p + 1} \right) \end{array} \right] \quad (4)$$

Nous pouvons valider les résultats obtenus à l'aide de notre approche en les comparant avec ceux déjà publiés dans le domaine de la modélisation des flux de trafic routier. Les démarches utilisées ici, aboutissent à des résultats différents de ceux obtenus par les méthodes numériques, ils peuvent donc difficilement être comparés. Pour ce qui concerne le problème de redémarrage, le seul véritable moyen de vérifier la pertinence de la démarche proposée est de reconstruire le diagramme fondamental du modèle. Nous pourrions alors comparer et valider les résultats analytiques obtenus avec ceux issus des méthodes numériques [6]. Dans les travaux que nous présentons nous nous sommes

limités à la modélisation d'un système de flux de trafic dont l'état est situé dans la zone fluide. Il s'agit alors de vérifier que le modèle obtenu reproduira la partie gauche du diagramme fondamental (D.F.). Les résultats sont présentés sur la fig.1. A partir des résultats graphiques obtenus nous pouvons conclure que les démarches de calcul analytique sont conformes aux résultats obtenus par les méthodes numériques utilisées pour la résolution des problèmes de modélisation des systèmes de flux de trafic routier. Cependant, lorsqu'on simule le modèle en ajoutant une forte densité en amont il se produit une saturation en aval (fig.1). C'est la raison pour laquelle il apparaît nécessaire de concevoir une commande afin de maintenir le système de flux de trafic dans un état au-dessous d'une densité de contrainte, c'est l'objectif poursuivi dans la section suivante.

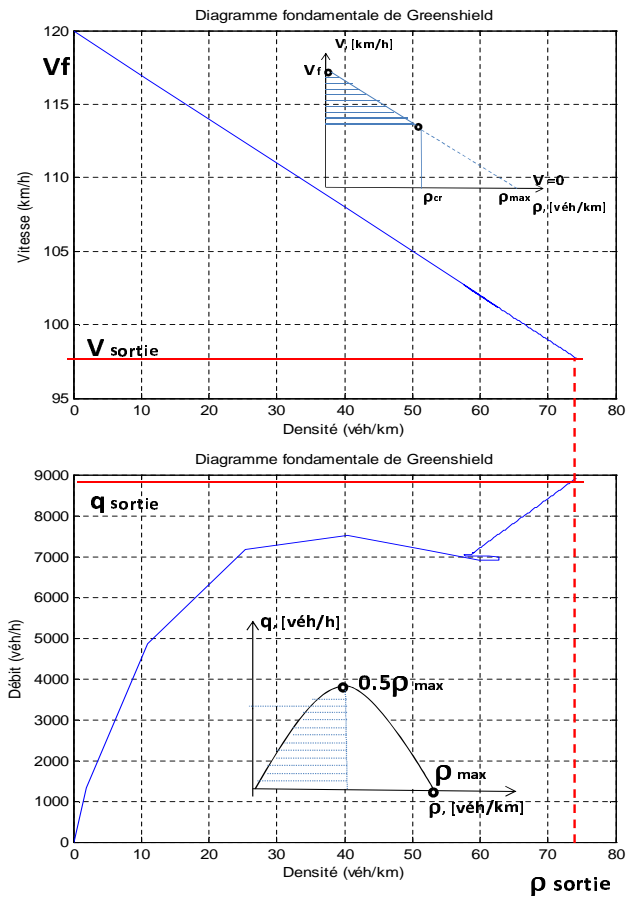


Fig. 1. Réconstitution de la partie fluide du diagramme fondamentale du modèle LWR

### III. CONCEPTION DE LA COMMANDE CRONE. SCHEMA STRUCTUREL DU SYSTEME DE COMMANDE

#### A. Conception de la commande CRONE

C'est une méthode fréquentielle d'approximation des algorithmes non-entier, utilisant des séries polynomiales. On remplace l'algorithme non-entier par une distribution récursive des zéro et des pôles. La méthode d'obtention des algorithmes rationnels des régulateurs non-entiers est basée sur le critère d'invariance des marges de stabilité (les marges de gain et de phase qui sont observées dans les

plans de Nyquist, de Bode et de Black-Nichols), les conditions de performance et de stabilité robustes du système [4], [5]. On utilise un modèle polynomial de type cellulaire, en utilisant n-nombre de cellules de type ID, dont le rôle est d'obtenir une enveloppe fréquentielle pour laquelle les marges de stabilités sont invariantes. Cette enveloppe est connue le plus souvent comme un gabarit vertical (dans le plan de Black-Nichols) et un gabarit horizontal (sur le diagramme de Bode). Il se représente comme une droite (entre les deux limites fréquentielle) sur le lieu de Nyquist. Ce gabarit généralisé est caractérisé par une valeur prédéfinie de la phase du régulateur qui dépend du rapport fréquentiel de chaque cellule, de l'ordre non entier de synthèse du régulateur et par sa largeur qui dépend proportionnellement du nombre de cellules utilisées.

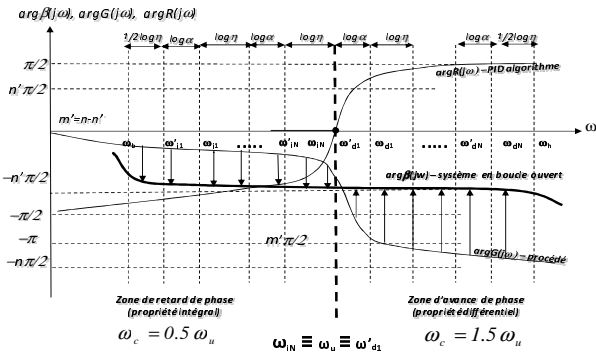


Fig. 2. Conception de la commande CRONE

$$\left[ \begin{aligned} R(p) &= I_{app}^\alpha D_{app}^\beta(p) = \\ &= k_I \left( \frac{1+T_{bIP}}{1+T_{hIP}} \right)^\alpha \prod_{i=1}^M \left( \frac{1+T'_i p}{1+T_i p} \right) + \\ &+ k_D \left( \frac{1+T_{bDP}}{1+T_{hDP}} \right)^\beta \prod_{j=1}^N \left( \frac{1+T_j p}{1+T'_j p} \right) \end{aligned} \right] \quad (5)$$

La propriété principale des algorithmes non-entiers consiste dans leur invariance d'où la robustesse du système de commande. Pour notre cas d'étude on utilise une approximation d'un algorithme PID non-entier en utilisant l'expression (5). Pour cet algorithme le gain statique du régulateur dépend de la contrainte dans le système de commande et le rapport polynomial dépend des marges de phase et de gain qu'on veut tenir invariants, en utilisant la conception d'approximation polynomiale récursive. Le but est de définir la valeur de la densité de contrainte et le gabarit fréquentiel (fig.2) autour duquel le système va garder son invariance. Ce dernier point est très important dans le cas de notre étude car le système de flux de trafic est soumis à plusieurs types de perturbations. Les paramètres présentés sur la fig.2, sont des paramètres de l'approximation récursive [5].

### B. Schéma structurel du système de commande

Le processus de flux de trafic a deux caractéristiques principales. En premier lieu, nous sommes arrivés à la conclusion que le modèle du processus peut être assimilé à un retard pur. Cela impose de proposer une structure de commande susceptible de compenser au mieux ce retard. Il s'agit aussi d'un processus distribué, soumis à de

nombreuses perturbations ce qui a tendance à imposer la mise en place d'une commande de la classe des systèmes robustes. Ces deux caractéristiques ont orienté cette étude vers la mise en œuvre d'un système de commande CRONE avec prédicteur de Smith.

TABLE I

SCHÉMAS STRUCTURELS DU SYSTÈME DE COMMANDE DU MODÈLE

<p><b>SYSTÈME DE COMMANDE CLASSIQUE</b></p>
<p><b>ALGORITHME DU REGULATEUR ET FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTÈME EN BOUCLE FERME</b></p> $R(p) \quad \Phi(p) = \frac{R\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*}}{(1+R\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*})}$
<p><b>SYSTÈME DE COMMANDE AVEC SMITH PREDICTION CLASSIQUE</b></p>
<p><b>ALGORITHME DU REGULATEUR ET FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTÈME EN BOUCLE FERME</b></p> $R_c(p) = \frac{R(p)}{1+R(p)\hat{G}_{rat}(p)(1-e^{-p\tau^*})} \quad \Phi_c(p) = \frac{R_c\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*}}{(1+R_c\hat{G}_{rat})}$
<p><b>SYSTÈME DE COMMANDE AVEC SMITH PREDICTION NON-ENTIER</b></p>
<p><b>ALGORITHME DU REGULATEUR ET FONCTION DE TRANSFERT DU SYSTÈME EN BOUCLE FERME</b></p> $R_c(p) = \frac{R_{NE}(p)}{1+R_{NE}(p)\hat{G}_{rat}(p)(1-e^{-p\tau^*})} \quad \Phi_c(p) = \frac{R_c\hat{G}_{rat}e^{-p\tau^*}}{(1+R_c\hat{G}_{rat})}$

Tableau.1 propose trois différents schémas de systèmes de commande. L'analyse des trois systèmes fait apparaître que la partie irrationnelle du retard existe dans les deux expressions pour le système de commande classique. Le même retard, va disparaître du polynôme caractéristique dans le cas d'un système avec un prédicteur de Smith. Cela amène le système dans la classe des systèmes robustes d'ordre non entier et l'éloigne des schémas classiques.

#### IV. SIMULATION NUMÉRIQUE

On considère pour les simulations numériques un tronçon routier comme présenté sur la fig.3. On effectue une mesure en 6 point de la route, à chaque kilomètre après les barrières de péage. Lorsque qu'on a une forte densité en amont des barrières nous pouvons avoir comme conséquence une saturation en aval. Pour cela il est nécessaire d'appliquer une commande qui va maintenir la densité sur les segments en aval au-dessous d'un seuil de façon à imposer au système de rester dans les limites de la zone fluide. Pour réaliser cela il est possible d'agir sur le nombre de barrières de péage que l'on garde ouvertes.

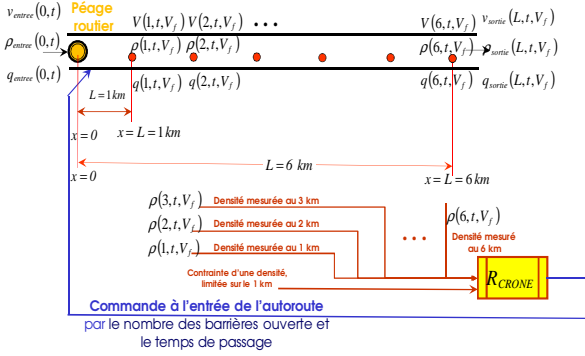


Fig. 3. Schéma technologique d'un système de commande CRONE pour un segment simple

Pour l'exemple de calcul nous avons pris les énoncés (6) pour obtenir la variation de la densité sur le segment en aval. On choisit le diagramme fondamental de Greenshield et on fixe la vitesse de référence à \$0.5V\_f\$. Les domaines de variation des paramètres du modèle sont présentés dans le Tableau.2. Ceux-ci représentent l'influence des perturbations sur le modèle LWR.

$$\left[ \begin{array}{l} \rho_{max} = 120[veh/km], V_f = 120km/h \\ \frac{\rho(x,t)}{\rho_{max}} = 0.35[-] \\ \rho_{consigne} = 0.35\rho_{max} = 42[veh/km] \\ q_{consigne} = 5040[veh/h], L = 1[km] \end{array} \right] \quad (6)$$

Pour l'ensemble des modèle LWR obtenus après les calculs, nous effectuons une étude temporelle (fig.4) et une reconstitution du D.F. du système de commande (fig.5) pour pouvoir valider les résultats et pour pouvoir prouver la pertinence de la méthode de commande. Une étude harmonique, une analyse de Nyquist et une analyse robuste sont présentées (fig.6)-(fig.10). Pour tous les modèles on ajoute une contrainte de densité limite à 35% de la valeur maximale de la densité par kilomètre et pour toute perturbation. Lorsque cette valeur est dépassée, la commande est activée jusqu'à ce que le système revienne dans son état stable au-dessous de la valeur de la contrainte. Afin de montrer l'efficacité de la commande dans le cadre de la simulation qui a été réalisée, on ajoute une excitation à l'entrée du système qui représente un flux réel qui peut apparaître en amont du péage au dessus de la valeur de la contrainte. Les résultats obtenus montrent, que pour tous les modèles appartenant aux ensembles de variations

des paramètres, on satisfait les conditions d'obtention d'un système robuste et une invariance des marges de stabilité.

TABLE II

LES MARGES DE VARIATION DES PARAMÈTRES DU MODÈLE

Densité $\rho/\rho_{max} = \rho_0[-]$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
Vitesse libre $V_f[km/h]$	80	100	120	140	150

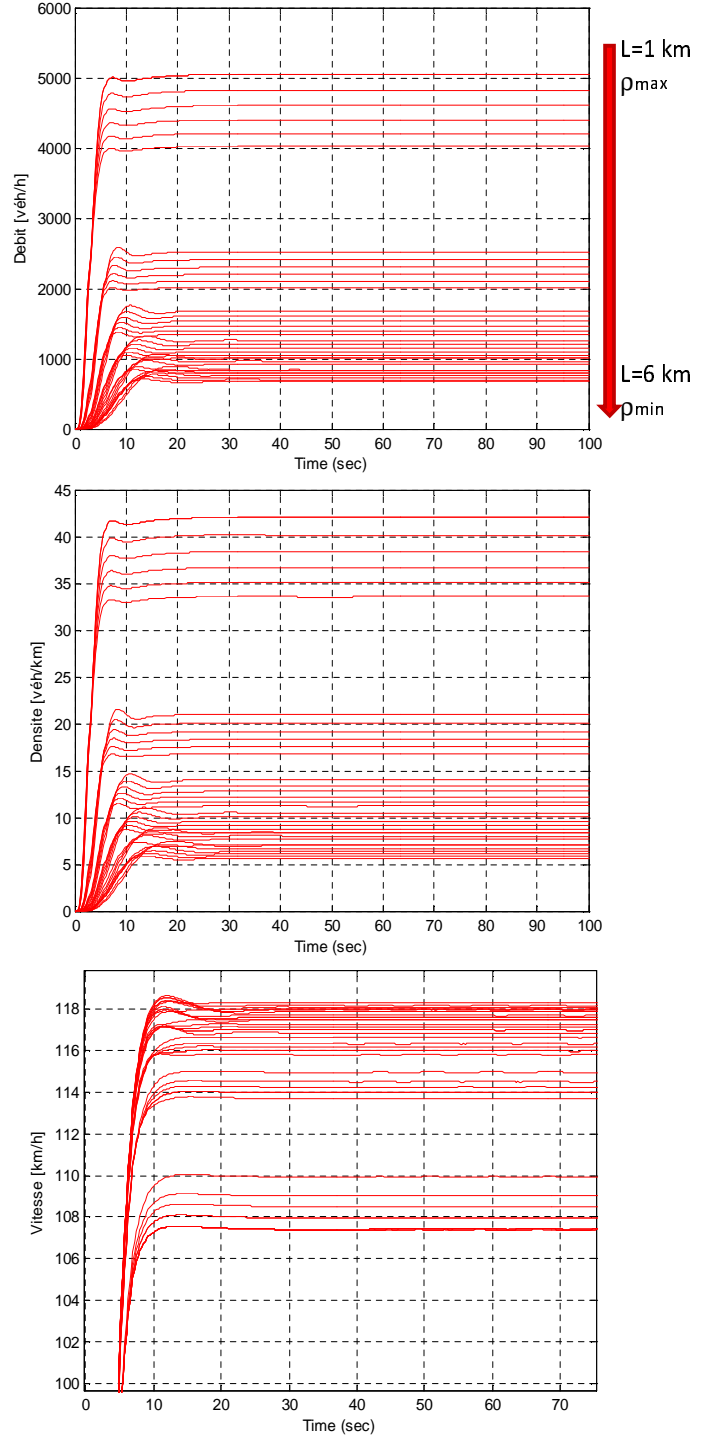


Fig. 4. Etude temporelle du système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

A partir des résultats de la fig.4 et de la fig.5 il apparait que pour toute variation des paramètres du modèle LWR,

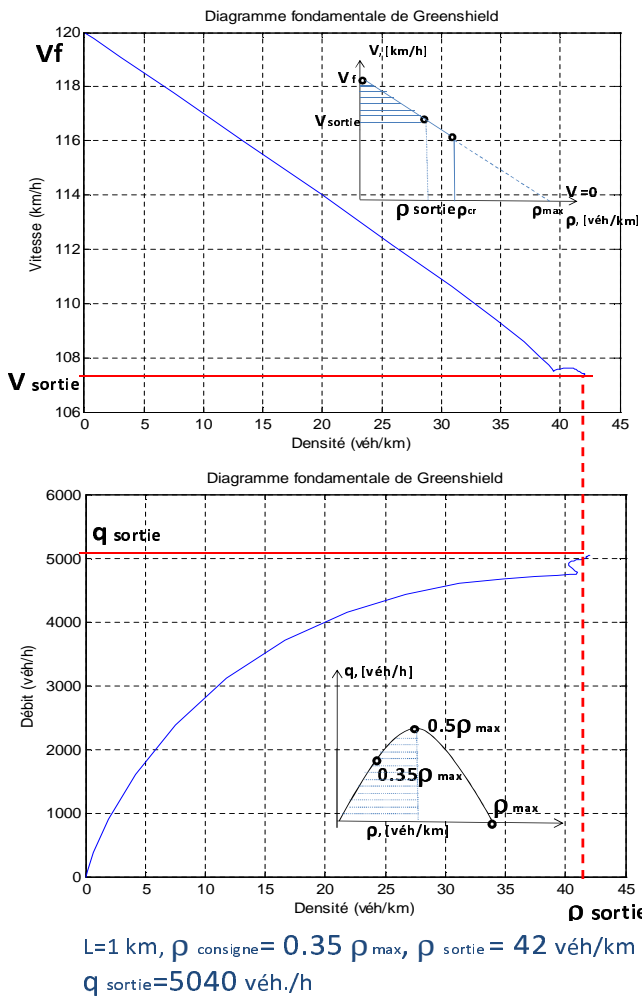


Fig. 5. Réconstitution de la partie fluide du diagramme fondamentale du système de commande

le système suit la contrainte, ce qui montre l'efficacité de l'algorithme de commande choisi. Lorsque la densité atteint la valeur de la contrainte imposée, le régulateur réagit en limitant le flux venant du péage de façon à ce que la densité ne dépasse pas cette contrainte. Selon les contraintes de densité de consigne, la densité en aval ne doit pas dépasser 0.35% de la valeur de la densité maximale (fig.4). Le D.F. obtenu (fig.5) montre que la densité augmente jusqu'à la valeur de la consigne. Ici la consigne de densité a été fixée à 42 véhicules/km, la (fig. 4) montre qu'à partir de cette limite, la commande agit de façon à rester en

L'étude harmonique qui a été effectuée donne une information sur la stabilité du système (fig.6), (fig.7) et (fig.8). A partir de cette analyse on peut conclure que pour tous types de perturbations le système de trafic routier gardera sa stabilité et ses performances. La synthèse d'un algorithme de commande d'ordre non-entier assure une invariance des marges de stabilité de gain et de phase du système. Les études présentées dans cet article sont complétées d'une analyse robuste. On observe que les systèmes simulés satisfont les conditions de stabilité et de performances robustes dans le système (fig.9) et (fig.10), car pour tout ensemble de perturbations le module de l'ensemble des systèmes reste au-dessus du module de la perturbation.

## V. CONCLUSION

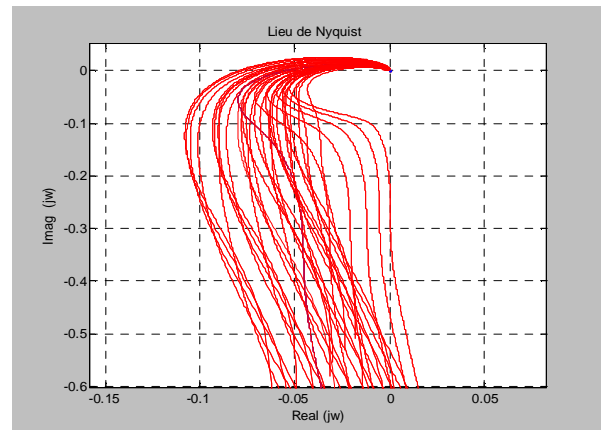


Fig. 6. Etude harmonique - lieu de Nyquist du système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

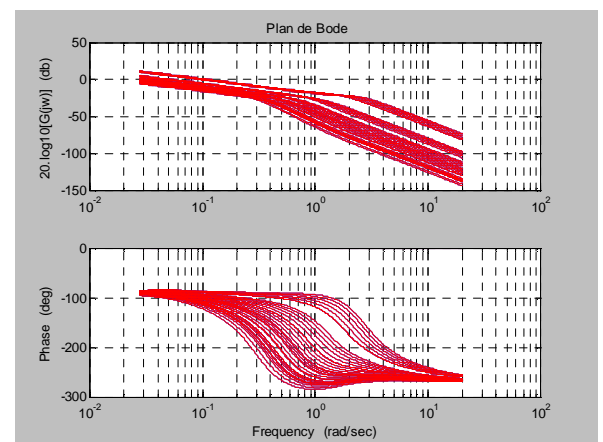


Fig. 7. Etude harmonique - plan de Bode du système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

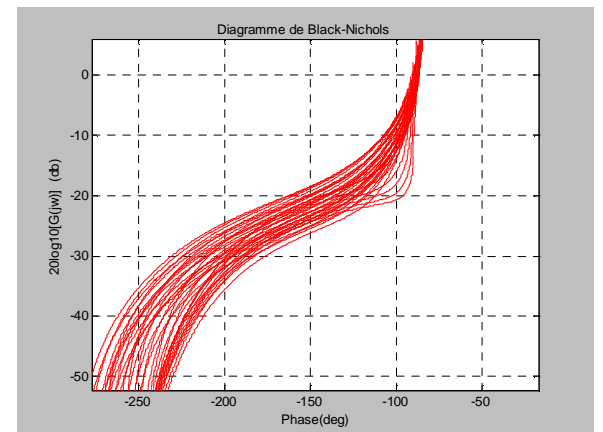


Fig. 8. Etude harmonique - diagramme de Black-Nichols du système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

L'étude développée dans le présent article donne un nouveau regard vis-à-vis des systèmes de flux de trafic routier : en utilisant le formalisme de la fonction de transfert pour résoudre l'équation du modèle LWR et en appliquant une commande d'ordre non-entier à ce type de processus. L'approche développée permet d'élargir la perception que l'on peut avoir d'un tel système, au-delà de la variation dans le temps des paramètres du trafic, par l'étude harmo-

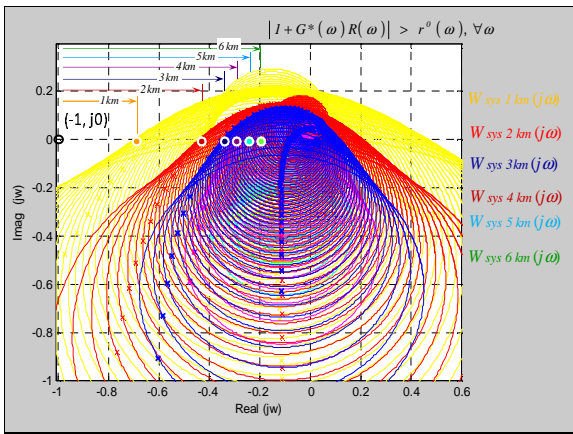


Fig. 9. Etude harmonique - analyse Nyquist du système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

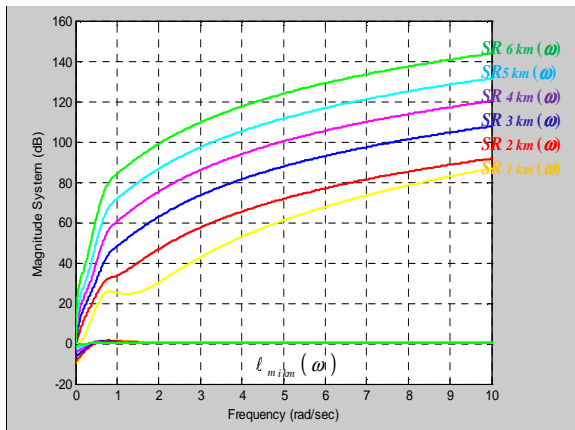


Fig. 10. Etude harmonique - analyse robuste du système de commande CRONE avec Smith prédiction pour un segment simple

nique et surtout par l'étude robuste qui a été présentée. Le système étudié fait partie des systèmes que l'on peut qualifier d'incertain car les variations paramétriques dues aux modifications des caractéristiques du trafic restent très difficilement modélisables et ont un impact très significatif sur ses performances. La commande CRONE apporte, par rapport au schéma structurel classique, des performances robustes. Cela a comme conséquence que le système régulé reste invariant par rapport aux perturbations, alors que sans la mise en œuvre d'une telle commande ce système serait conduit dans un état critique ou saturé comme c'est le cas d'un système classique. L'étude réalisée dans le domaine temporel et fréquentiel montre des résultats performants faciles à analyser et à exploiter. Ce type d'approche sera dans le cadre de nos prochains travaux appliqué à des configurations de systèmes de flux de trafic routier présentant d'autres types de perturbations comme par exemple des rampes d'entrée et de sortie.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Del Castillo, Benitez F. On the functional form of the speed-density relationship. I : General theory, Transportation research part B vol.29B, No. 5, pp. 373-389, 1995, 0191-2615(95)00008-9, 1995 décembre 2001.
- [2] Lighthill M., Whitham G. On kinematic waves I. Flood movement in long rivers. In Proceedings of the Royal Society, volume 229A, pages 281-316, London, May 1955
- [3] Leclercq L. Modélisation dynamique du trafic et application à

l'estimation du bruit routier, Thèse de doctorat INSA de Lyon, ENTPE/INRETS, 2002

- [4] Nikolov E. Fractional Order Control Algorithms and Controllers, Sofia 2004, Ó 2004 ed. of Technical University Sofia, Sofia, ISBN 954-438-395-6, 2004
- [5] Oustaloup A. La commande CRONE, Commande robuste d'ordre non entier, Hermès (Traité des Nouvelles Technologies-Série Automatique), Paris, ISBN 2-86601-289-5, 1991
- [6] Papageorgiou M., Papamichail I., Spiliopoulou A. D., Lentzakis A. F. Real-time merging traffic control with applications to toll plaza and work zone management, vol. 16, no5, pp. 535-553 [19 page(s) (article)] (3/4 p.),2008
- [7] Richards P.I. Shock waves on the highways, Operation Research, 4, 42-51, 1956
- [8] Uzunova M., Jolly D., Nikolov E., Analytical method of resolution and simulation of the transport equation viewed as a distributed parameter system, The 2nd "META'08" International Conference on Metaheuristics and Nature Inspired Computing, 29-31 October, Hammamet, Tunisia