

Tests de cohérence pour des systèmes non linéaires à temps continu par observateurs intervalles

Gaétan VIDEAU, Tarek RAÏSSI, Ali ZOLGHADRI

Université de Bordeaux, Laboratoire IMS, UMR 5218 CNRS,
351 cours de la libération, 33405 Talence cedex, FRANCE.

gaetan.videau@ims-bordeaux.fr, tarek.raïssi@ims-bordeaux.fr, ali.zolghadri@ims-bordeaux.fr
<http://www.ims-bordeaux.fr/>

Résumé— Ce papier présente une démarche méthodologique pour la surveillance et la détection d'anomalies, au sein de systèmes non linéaires à temps continu, dans un contexte ensembliste. L'approche présentée est basée sur l'élaboration de tests de cohérence utilisant des observateurs intervalles. Ces observateurs, basés sur une structure de Luenberger, sont construits en effectuant une approximation qLPV du système non linéaire, ainsi qu'en s'appuyant sur des propriétés de coopérativité. L'expression de la taille du plus petit défaut détectable, par un test de cohérence sur la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de mesure, est ensuite déterminée en fonction de la valeur du gain de l'observateur. La procédure proposée est appliquée à un procédé hydraulique de laboratoire.

Mots-clés— Résidu intervalle; tests de cohérence; systèmes non linéaires à temps continu; approximation qLPV garantie; estimation ensembliste; coopérativité.

I. INTRODUCTION

Les méthodes et techniques de détection et localisation de défauts fondées sur l'étude de modèles dynamiques ont fait l'objet de nombreux travaux de la part de la communauté scientifique depuis quelques années (voir par exemple [1]). Une étape essentielle de la garantie d'un fonctionnement sûr des systèmes est la mise en œuvre des fonctions de surveillance et de diagnostic fiables. Le résultat de ces tâches doit être en quelque sorte "garanti", ce qui tranche parfois avec la notion classique de risque, défini habituellement en termes de probabilité d'occurrence et de fausse détection. Les méthodes auxquelles nous nous intéressons sont celles à base de modèles. En effet, de nombreux systèmes physiques sont caractérisables par un ensemble d'équations différentielles non linéaires. L'avantage principal de ces modèles est que leurs états/paramètres ont généralement une interprétation physique claire. Nous chercherons également à assurer un haut niveau de robustesse vis-à-vis des imprécisions de connaissance. L'idée est donc de poser des tests de cohérences basés sur l'estimation intervalle de l'état de systèmes non linéaires, afin de construire une procédure garantie de détection de défauts. Pour cela nous considérons un système à surveiller représenté par le modèle d'état non linéaire à temps continu, décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t_k) &= \mathbf{y}_k^m + \boldsymbol{\varepsilon}_k \\ \mathbf{x}(t_0) &\in \mathbb{X}_0 \end{cases} \quad (1)$$

où les fonctions $\mathbf{f} : \mathbb{D} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ et $\mathbf{g} : \mathbb{D} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$ peuvent être non linéaires, $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^{n_u}$, \mathbb{X}_0 est

le domaine initial du vecteur d'état et \mathbf{y} , \mathbf{y}_y^m et $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ sont respectivement les vecteurs de sortie, de mesure à l'instant t_k et de bruit de mesure au même instant.

La contribution de ce papier repose sur la caractérisation analytique de l'amplitude du plus petit défaut détectable, par des tests de cohérence basés sur l'utilisation d'observateurs intervalles. Pour cela, nous nous appuyons sur une de nos contributions [2] qui permet de construire des observateurs intervalles pour des systèmes non linéaires à temps continu. Ces derniers sont basés sur une approximation qLPV garantie du modèle original et sur les principes de coopérativité, et permettent d'estimer un encadrement garanti ($\underline{\mathbf{x}}(t)$, $\overline{\mathbf{x}}(t)$) du vecteur d'état $\mathbf{x}(t)$. L'observateur intervalle est donc composé de deux observateurs inférieur et supérieur, ayant une structure de Luenberger et satisfaisant des conditions de convergence (*i.e.* $\overline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t) \rightarrow cte$) et de garantie (*i.e.* $\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t)$, $\forall t \geq 0$).

Le papier est organisé de la façon suivante : dans la section II, les outils de l'analyse par intervalles utilisés sont présentés. Nous présentons ensuite, dans la partie III, une méthode d'approximation qLPV garantie de systèmes non linéaires. Celle-ci est exploitée dans la partie IV pour construire des observateurs intervalles basés sur la théorie des systèmes coopératifs. Dans la partie V, des tests de cohérence basés sur l'estimation intervalle sont proposés. Enfin, l'étude de l'influence d'un gain agissant sur le retour de sortie de l'observateur, permet de donner une expression analytique de l'amplitude du plus petit défaut détectable de façon garantie. Pour conclure, la méthode proposée est illustrée sur un système de laboratoire dans la section VI.

II. ANALYSE PAR INTERVALLES

Initialement développée pour quantifier les erreurs numériques dues à la représentation finie des nombres réels sur un calculateur [3], [4], l'analyse par intervalles est devenue un outil de résolution numérique, globale et garantie de problèmes d'estimation.

On appelle un intervalle, noté $[a]$, un ensemble connexe, borné, de bornes \underline{a} et \overline{a} , et fermé, de nombres réels $[a] = [\underline{a}, \overline{a}] = \{a \in \mathbb{R} \mid \underline{a} \leq a \leq \overline{a}\}$, avec $\underline{a}, \overline{a} \in \mathbb{R}$. L'ensemble des intervalles de \mathbb{R} est noté \mathbb{IR} .

Comme pour les réels, les opérations mathématiques élémentaires sont étendues aux intervalles. Le résultat d'une opération entre deux intervalles de bornes finies est obtenu en travaillant uniquement sur leurs bornes.

$$[a] \circ [b] = \{a \circ b \mid a \in [a], b \in [b]\}. \quad (2)$$

Le milieu d'un intervalle $[a]$ est défini par $mid([a]) = (\bar{a} + \underline{a})/2$ et son rayon par $rad([a]) = (\bar{a} - \underline{a})/2 \geq 0$.

A. Fonctions d'inclusion

Soit une fonction $\mathbf{f} : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_y}$. L'évaluation de \mathbf{f} sur un pavé $[\mathbf{x}]$ est donnée par l'ensemble :

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) = \{\mathbf{f}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in [\mathbf{x}]\}. \quad (3)$$

Une extension de \mathbf{f} aux intervalles, généralement appelée fonction d'inclusion, notée $[\mathbf{f}]$, est définie comme une fonction de $\mathbb{I}\mathbb{R}^{n_x}$ dans $\mathbb{I}\mathbb{R}^{n_y}$, vérifiant $\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \subset [\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$.

En général, la fonction d'inclusion n'est pas unique et dépend de la manière dont \mathbf{f} est écrite. L'intervalle obtenu peut donc être pessimiste et l'évaluation de \mathbf{f} , sur $[\mathbf{x}]$, est dite conservatrice. Ce problème majeur de l'algèbre des intervalles est dû principalement au phénomène de *dépendance*, qui peut être illustré en considérant l'opération $x - x = 0$, valable pour tout $x \in [x] = [-1, 1]$, mais pour $[x] - [x]$, on obtient $[-2, 2]$ et au phénomène d'*enveloppement* qui caractérise le pessimisme dû à la représentation d'un ensemble quelconque par un pavé.

L'objectif de l'analyse par intervalles est donc de pouvoir utiliser des fonctions d'inclusion peu pessimistes dans le sens où la taille de $([\mathbf{f}]([\mathbf{x}]) - \mathbf{f}([\mathbf{x}]))$ est assez petite. Une fonction d'inclusion est minimale si pour tout $[\mathbf{x}]$, $[\mathbf{f}]([\mathbf{x}])$ est le plus petit pavé qui contient $\mathbf{f}([\mathbf{x}])$.

Une fonction d'inclusion de f peut être obtenue en remplaçant chaque variable réelle par son domaine et chaque opération arithmétique par son extension aux intervalles. Une telle fonction, appelée fonction d'inclusion naturelle, est minimale si $n_y = 1$, f est composée de fonctions continues et si toutes les variables sont mono-occurentes.

B. Fonction d'inclusion "pente"

Dans un cadre plus général, on trouve dans la littérature (voir par exemple [5]), différentes fonctions d'inclusion dont la forme générale est donnée par :

$$\mathbf{f}([\mathbf{x}]) \triangleq \mathbf{f}(\mathbf{x}_o) + [\mathbf{g}]([\mathbf{x}] - \mathbf{x}_o), \quad (4)$$

où $[\mathbf{g}]$ est une fonction d'inclusion d'une fonction "pente" non nécessairement identique à la jacobienne de \mathbf{f} et le point \mathbf{x}_o n'appartient par forcément à $[\mathbf{x}]$.

Dans la suite, nous utiliserons une forme centrée de (4) pour effectuer une approximation qLPV d'une large classe de systèmes non linéaires à temps continu.

III. APPROXIMATION GARANTIE D'UN MODÈLE NON LINÉAIRE PAR UN MODÈLE qLPV

Les modèles LPV constituent une classe de modèles linéaires permettant de décrire des procédés dont les caractéristiques dynamiques évoluent en fonction des conditions de fonctionnement [6], [7]. Plus précisément, l'approche LPV désigne des modèles dont la représentation d'état dépend d'un vecteur de paramètres $\boldsymbol{\rho}(t)$ borné et susceptible de varier dans le temps. Ces systèmes ont fait l'objet de nombreux travaux depuis ces dernières années, aussi bien en commande [8], [9] qu'en observation (voir [10]).

Les modèles LPV sont des modèles linéaires dont les paramètres varient dans le temps. Ils sont décrits par des équations de la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (5)$$

où $\boldsymbol{\rho}(t) : [0, t_N] \rightarrow \mathcal{P}$ est une fonction dont on connaît le support et $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^{n_\rho}$ est un ensemble compact de \mathbb{R}^{n_ρ} .

Lorsque la fonction $\boldsymbol{\rho}$ dépend explicitement du vecteur d'état \mathbf{x} , le modèle (5) est appelé représentation quasi-LPV (qLPV). Les modèles qLPV sont par conséquent des modèles non linéaires écrits sous une forme linéaire avec une matrice dynamique dépendant de l'état. Ainsi, le terme «quasi» est plus approprié pour définir cette catégorie de modèles. Cette classe est souvent utilisée pour des transformations de modèles non linéaires.

Pour de plus amples détails sur la représentation LPV et ses propriétés, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple à [11], [12].

Soit un système non linéaire, non autonome incertain décrit par (1). Si on note (sans perte de généralité) $\boldsymbol{\rho}(t) = (\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))^T$, la linéarisation garantie de l'équation d'état de (1) peut être obtenue en utilisant la fonction d'inclusion moyenne de \mathbf{f} ; on a alors :

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t)) \in \mathbf{f}(\mathbf{x}_c, \mathbf{u}_c) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{x}}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}])(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c) + [\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{u}}]([\mathbf{x}], [\mathbf{u}])(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c) \quad (6)$$

où $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{x}}]$ et $[\mathbf{J}_{\mathbf{f}\mathbf{u}}]$ sont les fonctions d'inclusion des jacobienes de \mathbf{f} par rapport à \mathbf{x} et \mathbf{u} .

Ainsi, pour le domaine de variation $[\boldsymbol{\rho}] = [\mathbf{x}] \times [\mathbf{u}]$, connu *a priori*, il existe des matrices :

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t)) \in \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))}{\partial \mathbf{x}(t)} \right]_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}]}}, \quad \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t)) \in \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\boldsymbol{\rho}(t))}{\partial \mathbf{u}(t)} \right]_{\substack{\mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}] \\ \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}]}}$$

En posant les changements de variables $\boldsymbol{\chi}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_c$ et $\boldsymbol{\mu}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_c$, on obtient alors :

$$\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\chi}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t), \mathbf{p})\boldsymbol{\mu}(t), \quad \boldsymbol{\rho}(t) \in [\boldsymbol{\rho}] \quad (7)$$

Une démarche similaire peut être entreprise afin d'obtenir l'approximation qLPV de l'équation de mesure du modèle (1) pour un domaine de variation $[\mathbf{x}] \times [\mathbf{u}]$.

IV. OBSERVATEURS INTERVALLES

Dans cette section, nous allons présenter une méthodologie de conception d'observateurs intervalles pour une classe de systèmes non linéaires. Étant donné que la trajectoire du système original (non linéaire) est à l'intérieur des trajectoires de l'approximation qLPV développée dans la section précédente, nous utilisons cette approximation pour développer un couple d'observateurs $(\underline{\mathcal{Q}}, \overline{\mathcal{Q}})$, fournissant une estimation inférieure $\underline{\mathbf{x}}(t)$ et supérieure $\overline{\mathbf{x}}(t)$ de l'ensemble des trajectoires admises par l'approximation qLPV pour $\boldsymbol{\rho}(t) \in [\boldsymbol{\rho}]$.

Nous proposons de construire ces observateurs en utilisant la propriété de coopérativité [13], [14], [15], qui permet d'assurer que pour tout couple d'états initiaux ordonnés, les états générés resteront ordonnés quel que soit t .

Définition 1 : Un système dynamique décrit par (1) est coopératif (voir par exemple [13], [16]) si :

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u})_{i \neq j} \geq 0, \quad \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{D}, \forall \mathbf{u} \in \mathbb{U} \quad (8)$$

Notons que dans le cas des systèmes linéaires décrits par $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ avec $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n_x \times n_x}$, l'étude de la coopérativité revient à vérifier les signes des éléments hors-diagonaux de

A. Ainsi, un système linéaire est coopératif si $a_{ij} \geq 0$ pour $i \neq j$.

Propriété 2 : [17] Soit un système linéaire décrit par :

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\lambda}(t); \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (9)$$

où \mathbf{A} est une matrice coopérative et $\boldsymbol{\lambda}(t) > 0$. Si $\mathbf{x}_0 > 0$, alors $\mathbf{x}(t) > 0$ pour tout $t > 0$.

A. Structure de l'observateur

En admettant que les perturbations sur les mesures sont bornées et de bornes $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ et $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ connues *a priori*, le domaine admissible de la sortie est $\mathbb{Y}(t) = [\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, \mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}]$, où $\mathbf{y}^m(t)$ est le vecteur de mesure.

Pour estimer un encadrement de l'état du système qLPV et prendre en compte les perturbations, nous proposons deux observateurs inférieur et supérieur basés sur une structure de Luenberger. Ils sont donnés par :

$$\underline{\mathcal{O}}: \begin{cases} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) = \underline{\mathbf{C}}\underline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (10)$$

$$\overline{\mathcal{O}}: \begin{cases} \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}(t) + (\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ \overline{\mathbf{y}}(t) = \overline{\mathbf{C}}\overline{\mathbf{x}}(t) + \overline{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (11)$$

Les gains $\underline{\mathbf{L}}$ et $\overline{\mathbf{L}}$ ne sont pas forcément les mêmes et sont choisis en fonction des bornes des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} .

Les observateurs $\underline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ fournissent des bornes inférieure et supérieure du vecteur d'état \mathbf{x} du système qLPV si l'inégalité :

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \overline{\mathbf{x}}(t), \quad \forall t \geq 0, \forall \mathbf{x}(t) \in [\mathbf{x}], \quad (12)$$

est toujours vraie.

Par souci de clarté, nous allons prendre le même gain, $\mathbf{L} = \underline{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{L}}$, pour les deux observateurs $\underline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$. Néanmoins, la généralisation peut se faire sans difficulté.

B. Erreurs d'estimation

Les observateurs donnés par (10) et (11) sont garantis si les estimées $\underline{\mathbf{x}}$ et $\overline{\mathbf{x}}$ calculées par $\underline{\mathcal{O}}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ vérifient la condition (12) à chaque instant. Dans la suite, nous allons présenter une méthodologie pour déterminer un ensemble de valeurs du gain \mathbf{L} permettant d'assurer la garantie de l'encadrement calculé par $\underline{\mathcal{O}}$, $\overline{\mathcal{O}}$.

En utilisant (11), la dynamique de l'erreur supérieure $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) &= \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &= (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}(t) + (\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \\ &\quad - \mathbf{A}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{u}(t). \end{aligned} \quad (13)$$

Par définition, les matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} sont bornées; elles peuvent donc se réécrire sous la forme $\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}(t)) + \Delta_{\overline{\mathbf{M}}}(t)$, où \mathbf{M} est l'une des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} ou \mathbf{D} avec l'inégalité terme à terme $0 \leq (\Delta_{\overline{\mathbf{M}}}(t))_{ij} \leq (w([\mathbf{M}]_{ij}))$. Ainsi, en se basant sur cette relation, on a :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{M}(\boldsymbol{\rho}(t))\mathbf{x}(t) &= \overline{\mathbf{M}}\overline{\mathbf{x}}(t) - (\overline{\mathbf{M}} - \Delta_{\overline{\mathbf{M}}}(t))\mathbf{x}(t) \\ &= \overline{\mathbf{M}}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \Delta_{\overline{\mathbf{M}}}(t)\mathbf{x}(t). \end{aligned} \quad (14)$$

En injectant la relation (14) dans (13), l'équation dynamique de l'erreur supérieure peut se réécrire sous la forme :

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(t) = (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) + \overline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t), \quad (15)$$

avec :

$$\overline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) = (\Delta_{\overline{\mathbf{A}}}(t) - \overline{\mathbf{L}}\Delta_{\overline{\mathbf{C}}}(t))\mathbf{x}(t) + (\Delta_{\overline{\mathbf{B}}}(t) - \overline{\mathbf{L}}\Delta_{\overline{\mathbf{D}}}(t))\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Ainsi, si le gain \mathbf{L} est choisi tel que $(\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})$ soit coopérative et $\overline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t)$ positif, alors la condition initiale $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(0) \geq 0$ implique que l'erreur $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)$ reste positive à chaque instant. Par conséquent, l'observateur (11) donne une estimation majorante de la trajectoire d'état du modèle qLPV.

L'ensemble \mathbb{L}_1 des valeurs du gain \mathbf{L} , satisfaisant la condition (12), est défini par la relation :

$$\mathbb{L}_1 = \{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid (\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})_{ij, i \neq j} \geq 0, (\overline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t))_i \geq 0\} \quad (16)$$

Une démarche similaire peut être entreprise pour l'observateur minorant en utilisant la relation (10).

L'ensemble \mathbb{L}_2 des valeurs du gain \mathbf{L} satisfaisant la condition (12) pour (10) est alors donné par :

$$\mathbb{L}_2 = \{\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{C}})_{ij, i \neq j} \geq 0, (\underline{\boldsymbol{\lambda}}_e(t))_i \leq 0\} \quad (17)$$

Ainsi, l'ensemble \mathbb{L} des valeurs du gain \mathbf{L} , permettant d'assurer la garantie de l'estimation donnée par le couple d'observateurs $(\underline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{O}})$, est défini par la relation $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$.

L'utilisation d'un gain \mathbf{L} vérifiant (16) et (17) permet de construire deux observateurs coopératifs même si le modèle qLPV du système ne l'est pas. De plus, le gain introduit un paramètre de réglage pouvant agir sur la dynamique des observateurs $(\underline{\mathcal{O}}, \overline{\mathcal{O}})$, *i.e.* la convergence de l'estimation, et ainsi réduire le pessimisme de l'encadrement des valeurs admissibles $\mathbb{X}(t)$ du vecteur d'état.

C. Convergence de l'estimation

La stabilité asymptotique de l'observateur intervalle est assurée si les trajectoires inférieure et supérieure des observateurs (10) et (11) convergent l'une vers l'autre. L'étude de la stabilité de l'observateur est donc équivalente à l'étude de la stabilité de l'erreur totale :

$$\mathbf{e}(t) = \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) = \overline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t). \quad (18)$$

On note respectivement par $\hat{\mathbf{x}}(t)$ et $\mathbf{R}_e(t)$ le centre et le rayon de l'estimée intervalle à l'instant t , ils sont donnés par :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t) &= (\overline{\mathbf{x}}(t) + \underline{\mathbf{x}}(t))/2, \\ \mathbf{R}_e(t) &= (\overline{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t))/2 = (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}(t))/2. \end{aligned} \quad (19)$$

En utilisant (10), (11) et (19), les dynamiques du centre $\hat{\mathbf{x}}(t)$ et du rayon $\mathbf{R}_e(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) &= \frac{1}{2} \left((\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}(t) + (\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right. \\ &\quad \left. + (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) + (\underline{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}_e(t) &= \frac{1}{2} \left((\overline{\mathbf{A}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{C}})\overline{\mathbf{x}}(t) + (\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{L}}\overline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) + \overline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \overline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right. \\ &\quad \left. - (\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{C}})\underline{\mathbf{x}}(t) - (\underline{\mathbf{B}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{D}})\mathbf{u}(t) - \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{y}^m(t) + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Or, par définition les bornes inférieure et supérieure des matrices \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} et \mathbf{D} peuvent s'écrire sous la forme :

$$\underline{\mathbf{M}} = \left(\text{mid}([\mathbf{M}]) - \frac{w([\mathbf{M}])}{2} \right), \quad \overline{\mathbf{M}} = \left(\text{mid}([\mathbf{M}]) + \frac{w([\mathbf{M}])}{2} \right) \quad (22)$$

avec $\mathbf{M} \in \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}\}$.

En injectant la relation (22) dans (20) et (21), l'équation dynamique de l'observateur intervalle, représenté par son centre et son rayon, s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\mathbf{R}}_e(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_e \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \mathbf{R}_e(t) \end{pmatrix} + \boldsymbol{\lambda}_e(t) \quad (23)$$

avec :

$$\mathbf{A}_e = \begin{pmatrix} 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) & (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) \\ (w[\mathbf{A}] - \mathbf{L}w[\mathbf{C}]) & 2(\text{mid}[\mathbf{A}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{C}]) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_e(t) = \begin{pmatrix} \text{mid}[\mathbf{B}] - \mathbf{L}\text{mid}[\mathbf{D}] \\ (w[\mathbf{B}] - \mathbf{L}w[\mathbf{D}]) \end{pmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{pmatrix} \mathbf{L}(\text{mid}[\boldsymbol{\varepsilon}] + \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{L}w[\boldsymbol{\varepsilon}] \end{pmatrix}$$

Si le gain \mathbf{L} est choisi tel que la matrice \mathbf{A}_e soit stable et que $\lambda_e(t)$ soit borné par un vecteur positif $\boldsymbol{\Lambda}_e$, alors l'estimation converge asymptotiquement vers une boule de centre $\hat{\mathbf{x}}_{max}$ et de rayon $\mathbf{R}_{e_{max}}$. Si \mathbf{A}_e est inversible, cette boule est définie par la relation : $(\hat{\mathbf{x}}_{max} \quad \mathbf{R}_{e_{max}})^T = -\mathbf{A}_e^{-1} \boldsymbol{\Lambda}_e$.

Ainsi, l'ensemble \mathbb{L}_3 des valeurs du gain \mathbf{L} , garantissant la convergence asymptotique de l'observateur intervalle vers une boule de centre $\hat{\mathbf{x}}_{max}$ et de rayon $\mathbf{R}_{e_{max}}$, est défini par la relation :

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid \max_{\forall t > 0} (w(\lambda_e(t))) \leq \boldsymbol{\Lambda}_e \right\}. \quad (24)$$

On peut noter que si la largeur de $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{D}]$ est nulle (*i.e.* les matrices ne dépendent pas de $\boldsymbol{\rho}$) et si $w[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0$ (*i.e.* le bruit de mesure est nul) alors l'erreur totale $\mathbf{e}(t) = \bar{\mathbf{e}}(t) - \underline{\mathbf{e}}(t) = 2 * \mathbf{R}_e(t)$, tend vers zéro. C'est à dire que les trajectoires des observateurs $(\underline{\mathcal{O}}, \bar{\mathcal{O}})$ convergent vers la "vraie" trajectoire d'état du système. Par conséquent, si la coopérativité est respectée, le centre $\hat{\mathbf{x}}(t)$ de l'observateur intervalle converge vers l'état du système.

L'utilisation d'un gain \mathbf{L} appartenant à l'intersection des ensembles définis par les relations (16), (17) et (24) :

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2 \cap \mathbb{L}_3, \quad (25)$$

permet de construire un observateur intervalle fournissant un encadrement garanti de l'état du système observé et qui converge vers une boule dont le rayon est inférieur à $\mathbf{R}_{e_{max}}$.

L'expression (25) revient à caractériser un ensemble \mathbb{L} de valeurs admissibles du gain \mathbf{L} sous les contraintes de coopérativité et de stabilité de l'observateur intervalle composé de (10) et (11) pour un domaine $[\boldsymbol{\rho}] \subset \mathbb{R}^{n_\rho}$ d'évolution du méta-paramètre $\boldsymbol{\rho}(t)$. Le problème (25) peut être formulé sous la forme d'un problème de satisfaction de contraintes (CSP).

Notons que le conservatisme de l'approximation qLPV dû aux phénomènes de dépendance et d'enveloppement peut engendrer une solution vide pour \mathbb{L} . Dans un tel cas, un observateur intervalle basé sur l'approximation qLPV et dont la dynamique de l'erreur est coopérative, ne peut être construit. Pour surmonter cet inconvénient, deux stratégies peuvent être adoptées :

- deux gains distincts $\underline{\mathbf{L}}$ et $\bar{\mathbf{L}}$ pourraient être utilisés pour les observateurs minorant et majorant ;
- En ajoutant un second retour, permettant d'agir sur l'erreur entre les bornes inférieure et supérieure.

V. TESTS DE COHÉRENCE BASÉS SUR L'UTILISATION D'OBSERVATEURS INTERVALLES

Dans cette section, nous exploitons les observateurs basés sur l'approximation qLPV garantie, développés précédemment, afin de déterminer une expression analytique de l'amplitude du plus petit défaut détectable par un test de cohérence entre l'estimation intervalle d'une sortie et la mesure correspondante.

Les défauts considérés dans la suite sont supposés de type additif. L'approximation qLPV d'un modèle non linéaire en présence d'un vecteur de défauts additifs est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\boldsymbol{\phi}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t) \end{cases} \quad (26)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{B}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$, $\mathbf{C}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ et $\mathbf{D}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ sont des matrices variantes dans le temps, données dans la section III et dont on connaît les bornes. \mathbf{F} et \mathbf{H} sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $\boldsymbol{\phi}(t) \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ est le vecteur de défauts, pour lequel aucune hypothèse *a priori* n'est faite. Le terme $\mathbf{F}\boldsymbol{\phi}(t)$ est censé modéliser l'impact de défauts de type "actionneur" ou "composant" alors que $\mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t)$ modélise plutôt les défauts des chaînes d'instrumentation et de capteurs.

A. Tests de cohérence basés sur la génération de résidus intervalles

Dans le cas linéaire, la génération de résidus, quelque soit la méthode utilisée, revient à filtrer les signaux entrée-sortie par deux filtres linéaires \mathbf{H}_u et \mathbf{H}_y , tel que $\mathbf{r} = \mathbf{H}_u \mathbf{u} + \mathbf{H}_y \mathbf{y}$.

La construction des filtres \mathbf{H}_u et \mathbf{H}_y dépend du modèle utilisé et de la technique de génération employée (voir par exemple [18]). Dans une seconde phase, les résidus sont structurés et évalués par des tests de décision.

Dans un contexte à erreurs bornées, l'observateur fournit des valeurs minorante $\underline{\mathbf{y}}$ et majorante $\bar{\mathbf{y}}$ de la sortie. Dans ce cas, la détection d'incohérence est effectuée par un test d'appartenance. En effet, l'estimation est incompatible avec les mesures si, à un instant t_k , on a $\mathbf{y}(t_k) \notin [\underline{\mathbf{y}}(t_k), \bar{\mathbf{y}}(t_k)]$, où \mathbf{y} est le vecteur de sortie. Ce test peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$0 \notin [\underline{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t)] - \mathbf{y}(t) \Rightarrow 0 \notin [\mathbf{r}(t)], \quad (27)$$

où \mathbf{r} est le vecteur de résidu. Notons que dans ce cas le résidu n'est pas un vecteur ponctuel mais un intervalle $[\mathbf{r}(t)]$.

B. Dynamique du résidu intervalle

La borne supérieure du résidu $\mathbf{r}(t)$ est donnée par $\bar{\mathbf{r}}(t) = \bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$ où $\bar{\mathbf{y}}(t)$ est calculée à l'aide de l'observateur (11). La dynamique de la borne supérieure du résidu est décrite par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\boldsymbol{\phi}(t) \\ \bar{\mathbf{r}}(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{e}} + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) - \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t) \end{cases} \quad (28)$$

avec les termes

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) = (\Delta_{\bar{\mathbf{A}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\bar{\mathbf{C}}}(t))\mathbf{x}(t) + (\Delta_{\bar{\mathbf{B}}}(t) - \mathbf{L}\Delta_{\bar{\mathbf{D}}}(t))\mathbf{u}(t) + \mathbf{L}\bar{\boldsymbol{\varepsilon}},$$

$$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) = \Delta_{\bar{\mathbf{C}}}(t)\mathbf{x}(t) + \Delta_{\bar{\mathbf{D}}}(t)\mathbf{u}(t),$$

caractérisent les effets des incertitudes dues à l'approximation qLPV et $((\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\boldsymbol{\phi}(t), \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t))$ représentent les effets des défauts sur la borne supérieure du résidu.

Afin de distinguer les effets des erreurs de modélisation et des défauts, la représentation (28) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{e}}}^o(t) &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}}^o + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t) \\ \bar{\mathbf{r}}^o(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{e}}^o + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_r(t) \\ \dot{\bar{\mathbf{e}}}^d(t) &= (\bar{\mathbf{A}} - \mathbf{L}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}}^d - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})\boldsymbol{\phi}(t) \\ \bar{\mathbf{r}}^d(t) &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{e}}^d - \mathbf{H}\boldsymbol{\phi}(t) \end{cases} \quad (29)$$

où l'on note $\bar{\mathbf{e}}^o$ le vecteur d'erreur tenant compte des incertitudes $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e$ et $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_r$, et $\bar{\mathbf{e}}^d$ le vecteur d'erreur généré par un défaut ϕ . Ainsi, $\bar{\mathbf{r}}^d(t)$ et $\bar{\mathbf{r}}^o(t)$ représentent respectivement les effets du défaut et des incertitudes sur la borne supérieure du résidu. Notons que le résidu n'est généralement pas nul même en l'absence de défaut.

Par ailleurs, $\bar{\mathbf{r}}^o(t)$ peut être interprété comme un "seuillage adaptatif". En effet, un défaut est détecté via la borne supérieure de $\mathbf{r}(t)$ si : $\bar{\mathbf{r}}(t) \leq 0 \Leftrightarrow \bar{\mathbf{r}}^d(t) \leq -\bar{\mathbf{r}}^o(t)$.

La même démarche est appliquée à la borne inférieure $\underline{\mathbf{r}}(t) = \underline{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t)$ de $[\mathbf{r}(t)]$. Ainsi le résidu intervalle peut se réécrire sous la forme suivante :

$$[\mathbf{r}(t)] = \begin{cases} [\underline{\mathbf{r}}^o(t), \bar{\mathbf{r}}^o(t)] & t < t_d \\ [\underline{\mathbf{r}}^o(t) + \underline{\mathbf{r}}^d(t), \bar{\mathbf{r}}^o(t) + \bar{\mathbf{r}}^d(t)] & t \geq t_d \end{cases} \quad (30)$$

où t_d est l'instant d'apparition du défaut.

En d'autres termes, pour un fonctionnement non défaillant, la taille de $[\mathbf{r}(t)]$ est non nulle et dépend du conservatisme dû à l'approximation qLPV ainsi qu'aux bornes de l'erreur de mesure. Dans le cas d'un fonctionnement non défaillant, le test d'appartenance $0 \in [\mathbf{r}(t)]$ est toujours vrai. Cependant, il n'est pas possible de garantir l'absence de défauts dans ce cas. L'effet d'un défaut de faible amplitude peut être masqué par les erreurs de modélisation, ceci est également corrélé à un problème de détectabilité. Par contre, si à un instant t_d , le test n'est plus vrai (*i.e.* $0 \notin [\mathbf{r}(t)]$), alors on conclura à la présence d'un défaut. La principale caractéristique de cette approche est qu'aucune fausse alarme ne peut être signalée, sous l'hypothèse que les bornes des perturbations sur les mesures soient valides.

Dans la suite, nous allons quantifier la "taille" du plus petit défaut détectable pour la méthode présentée. En particulier, l'effet du gain de l'observateur sera analysé.

C. Étude analytique du "plus petit" défaut détectable

Comme nous l'avons vu dans la section précédente le résidu généré est souvent non nul. En effet, les termes $\underline{\mathbf{r}}^o(t)$ et $\bar{\mathbf{r}}^o(t)$, qui représentent l'effet des erreurs de modélisation sont non nuls. Il apparaît donc important de déterminer quel est le plus petit défaut détectable en fonction des erreurs d'approximation et du gain \mathbf{L} .

Dans la suite, on appelle le plus petit défaut détectable par la borne supérieure (respectivement par la borne inférieure), le plus petit défaut dont l'effet sur le résidu $\bar{\mathbf{r}}$ (resp. $\underline{\mathbf{r}}$) entraîne $\bar{\mathbf{r}}^o(t) + \bar{\mathbf{r}}^d(t) \leq 0$ ($\underline{\mathbf{r}}^o(t) + \underline{\mathbf{r}}^d(t) \geq 0$). Nous allons établir la relation entre la taille de ce plus petit défaut détectable, le gain \mathbf{L} et les erreurs d'approximation. Pour cela, considérons un défaut dont l'effet peut être représenté par une variation du $j^{\text{ème}}$ élément de $\phi(t)$, tel que $\phi(t) = (0, \dots, 0, \varphi_j(t), 0, \dots, 0)^T$. L'effet de $\varphi_j(t)$ sur la $j^{\text{ème}}$ composante de la borne supérieure du résidu est donné par la relation dynamique suivante :

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) &= (\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})\bar{\mathbf{e}} - (\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})_j \varphi_j(t) \\ \bar{r}_i^d(t, \varphi_j) &= \bar{C}_i \bar{\mathbf{e}} - H_{ij} \varphi_j(t) \end{cases} \quad (31)$$

où $(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})_j$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de $(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})$ et \bar{C}_i est la $j^{\text{ème}}$ ligne de $\bar{\mathbf{C}}$.

Considérons un défaut apparaissant sous la forme d'un échelon d'amplitude $\bar{\varphi}_{ji}$. En régime permanent, on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{r}_i^d(t, \varphi_{j|step}) = (\bar{C}_i(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})_j - H_{ij}) \bar{\varphi}_{ji}.$$

Par ailleurs, nous avons montré précédemment qu'un

défaut est détecté par la borne supérieure de la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu si $\bar{r}_i^o(t) - \bar{r}_i^d(t) \leq 0$.

Ainsi, en utilisant les deux relations précédentes, la taille du plus petit défaut $\varphi_j(t)$ détectable par la borne supérieure de la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu, est donnée par :

$$\bar{\varphi}_{ij} = (\bar{C}_i(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})_j - H_{ij})^{-1} \bar{r}_i^o, \quad (32)$$

où \bar{r}_i^o est la valeur maximale du "seuillage adaptatif" donnée par $\bar{r}_i^o = -\bar{C}_i(\bar{\mathbf{A}} - \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1}\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e + \bar{\boldsymbol{\lambda}}_{r_i}$, avec $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e$ et $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_r$ les valeurs maximales de $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_e(t)$ et $\bar{\boldsymbol{\lambda}}_r(t)$.

Une démarche similaire est effectuée pour la borne inférieure de la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu. En considérant un défaut se manifestant par une variation de type échelon sur le $j^{\text{ème}}$ élément de $\phi(t)$, la plus petite amplitude du défaut détectable par la $i^{\text{ème}}$ composante de la borne inférieure du résidu $[\mathbf{r}(t)]$ est donnée par :

$$\underline{\varphi}_{ij} = (\underline{C}_i(\underline{\mathbf{A}} - \underline{\mathbf{L}}\underline{\mathbf{C}})^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{H})_j - H_{ij})^{-1} \underline{r}_i^o. \quad (33)$$

Enfin, l'amplitude du plus petit défaut détectable par la $i^{\text{ème}}$ composante du résidu intervalle, tel que $0 \notin [r_i(t)]$, peut être définie par $\varphi_{ijmin} = \max(|\underline{\varphi}_{ij}|, |\bar{\varphi}_{ij}|)$.

Notons que dans l'hypothèse où le plus petit défaut détectable est spécifié dans le cahier des charges, il est possible d'ajouter une contrainte supplémentaire au problème de synthèse d'un observateur intervalle ($\underline{\mathcal{Q}}, \bar{\mathcal{O}}$) donné dans la section IV. Ainsi, l'ensemble \mathbb{L} des valeurs admissibles du gain \mathbf{L} peut être déterminé tel que les conditions de garantie (16, 17), de convergence (24) et pour une amplitude du plus petit défaut détectable φ_{ijmin} soient assurées. L'ensemble \mathbb{L} peut être réécrit tel que : $\mathbf{L} \in \mathbb{L} = \bigcap_{i=1}^4 \mathbb{L}_i$, où \mathbb{L}_4 est donné par :

$$\mathbb{L}_4 = \{ \mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y} \mid \max(|\underline{\varphi}_{ij}(\mathbf{L})|, |\bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{L})|) \leq \varphi_{ijmin} \} \quad (34)$$

avec $(\underline{\varphi}_{ij}(\mathbf{L}), \bar{\varphi}_{ij}(\mathbf{L}))$ représentant l'expression du plus petit défaut détectable donnée par (33) pour la borne inférieure $\underline{r}_i(t)$ et par (32) pour la borne supérieure $\bar{r}_i(t)$.

Remarque 1 : Lors de la résolution du CSP permettant de caractériser \mathbb{L} , un ensemble solution vide peut être causé par :

- une amplitude du plus petit défaut détectable trop faible ;
- une incertitude sur l'erreur de sortie $[\varepsilon]$ trop élevée ;
- une approximation qLPV trop conservatrice.

VI. APPLICATION

Afin d'illustrer la procédure proposée, une application à un procédé hydraulique de laboratoire, appelé maquette 3 cuves, est présentée dans cette partie.

Le système se compose de trois cuves cylindriques T_1 , T_2 et T_3 de sections identiques. Les cuves sont connectées entre elles à l'aide de deux tubes cylindriques. Le liquide s'écoulant dans ces cuves est recueilli dans le réservoir T_0 , qui approvisionne les deux pompes P_1 et P_2 . Ces deux pompes alimentent les cuves 1 et 2 avec des débits Q_1 et Q_2 . Les trois niveaux d'eau dans les trois cuves, sont notés par h_1 , h_2 et h_3 . Seuls les niveaux h_1 , h_2 sont mesurés. Les tubes d'interconnexion entre les différentes cuves sont dotés de trois vannes de sections ajustables permettant de simuler diverses défaillances telles que des fuites plus ou moins importantes sur chaque cuve.

Sous l'hypothèse $h_1 > h_3 > h_2$, ce système peut être modélisé par la représentation d'état non linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -\frac{a_{13}}{S_c} \sqrt{x_1(t) - x_3(t)} + \frac{1}{S_c} u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{a_{32}}{S_c} \sqrt{x_3(t) - x_2(t)} - \frac{a_{20}}{S_c} \sqrt{x_2(t)} + \frac{1}{S_c} u_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{a_{13}}{S_c} \sqrt{x_1(t) - x_3(t)} - \frac{a_{32}}{S_c} \sqrt{x_3(t) - x_2(t)} \\ y(t) = (x_1(t), x_2(t))^T + (v_1(t), v_2(t))^T \end{cases} \quad (35)$$

où $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (h_1, h_2, h_3)^T$ représente le vecteur d'état, $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T = (Q_1, Q_2)^T$ le vecteur de commande, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ le vecteur de mesure et $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ le bruit de mesure. Les coefficients d'écoulement normalisés sont $a_{13} = a_{z13} S_n \sqrt{2g} / S_c$, $a_{32} = a_{z32} S_n \sqrt{2g} / S_c$ et $a_{20} = a_{z20} S_n \sqrt{2g} / S_c$.

Le système fonctionne en boucle fermée, sous l'action d'un régulateur de type proportionnel intégral. La commande est de type rectangulaire avec une amplitude pouvant varier à chaque nouveau créneau. Les éléments du bruit de mesure $\mathbf{w}(t)$ sont supposés appartenir à l'intervalle $[-0.5cm, 0.5cm]$. Ce domaine de variation a été déterminé en effectuant des essais à commande nulle, pour différents points de fonctionnement.

Le scénario que nous proposons dans la suite concerne l'apparition d'un défaut de type fuite sur la cuve 1 à $t = 500s$ (ouverture de la vanne "a1"). Cette fuite est modélisable par un terme additif $-a_{10} \sqrt{x_1(t)}$ sur l'équation d'état de x_1 du modèle (35), avec le coefficient d'écoulement a_{10} ayant une valeur proportionnelle à a_{20} ($a_{10} = 1 * a_{20}$: la vanne "a1" est ouverte, $a_{10} = 0 * a_{20}$: la vanne "a1" est fermée).

L'ensemble \mathbb{L} des valeurs admissibles du gain est déterminé tel que les conditions de garantie $\mathbb{L}_1 \cap \mathbb{L}_2$ et de convergence \mathbb{L}_3 soient respectées. Pour les simulations, le gain :

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.0463 & -0.0003 \\ -0.3287 & 0.7494 \\ 0.0074 & 0.0074 \end{pmatrix} \quad (36)$$

est choisi avec une valeur de l'amplitude du plus petit défaut détectable par la première composante du résidu intervalle de : $\varphi_{11min} = 0.187$ (ouverture de la vanne "a1" de 18.7%).

Les résultats de l'estimation des sorties y_1 et y_2 sont représentés sur la figures 1 pour la simulation d'un défaut correspondant à l'ouverture de la vanne "a1" de 10%. Notons qu'une incohérence est détectée par le test sur la sortie y_1 ; toutefois il existe un retard à la détection de six secondes. Il est également important de noter qu'aucune fausse alarme n'a été détectée (pour $t < 500s$).

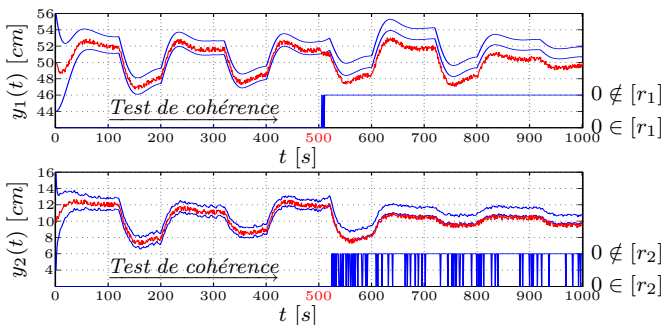


Fig. 1. Test de cohérence pour une fuite de 10% sur la vanne "a1"

VII. CONCLUSION

Dans ce papier, nous nous sommes intéressés à l'élaboration de tests de cohérence pour des systèmes non linéaires à temps continu. Pour cela, nous nous sommes appuyés sur une méthodologie de synthèse d'observateurs fournissant des bornes minorante et majorante. Celle-ci est fondée sur l'utilisation d'une approximation qLPV "garantie" (basée sur l'analyse par intervalles) et sur la théorie des systèmes coopératifs. Cette approche permet de propager les incertitudes sur l'estimée intervalle. Dans le cas de la détection garantie de défauts, la propagation peut être interprétée comme un "seuillage adaptatif". Ainsi, sous certaines hypothèses de modélisation des défauts, la taille du plus petit défaut détectable peut être caractérisée.

RÉFÉRENCES

- [1] S. X. DING : *Model-based Fault Diagnosis Techniques*. Design Schemes, Algorithms, and Tools. Springer, Heidelberg, Berlin, 2008.
- [2] G. VIDEAU, T. RAÏSSI et A. ZOLGHADRI : Interval observers design for consistency checks of nonlinear continuous-time systems. *Automatica*, 46(3):518–527, 2010.
- [3] R. E. MOORE : *Interval analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.
- [4] T. SUNAGA : Theory of an interval algebra and its applications to numerical analysis. In K. KONDO, éditeur : *RAAG Memoirs*, volume 2, pages 29–46. Ggijutsu Bunken Fukuy-kai, Tokyo, Japan, 1958.
- [5] R. E. HANSEN : *Global optimization using interval analysis*, second edition. CRC, 2004.
- [6] J. S. SHAMMA et M. ATHANS : Analysis of gain scheduled control for nonlinear plants. *IEEE Transaction On Automatic Control*, 35(8):898–907, 1990.
- [7] J. S. SHAMMA et M. ATHANS : Gain scheduling : Potential hazard and possible remedies. *IEEE Control Syst. Mag.*, 12:101–107, 1992.
- [8] P. APKARIAN, J-B. BIANNIC et P. GAHINET : Self scheduled h ∞ control of missile via linear matrix inequalities. *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 18(3):532–538, Mai-juin 1995.
- [9] P. APKARIAN, P. GAHINET et G. BECKER : Self-scheduled h ∞ control of linear parameter-varying systems : a design example. *Automatica*, 31(9):1251–1261, 1995.
- [10] C. DARENGOSSE et Ph. CHEVREL : Expérimentation d'un observateur h ∞ lpv pour la machine asynchrone. *APII-Jesa, Numéro spécial. Commande et observation de la machine asynchrone - Résultats expérimentaux*, 36(5):641–655, 2002.
- [11] A. MARCOS et J. BALAS : Development of linear-parameter-varying models for aircraft. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 27(2), 2004.
- [12] J. SHAMMA et J. CLOUTIER : Gain-scheduled missile autopilot design using linear parameter varying transformations. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(2):256–261, 1993.
- [13] H. L. SMITH : Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems. In American Mathematical SOCIETY, éditeur : *Mathematical Surveys and Monographs*, volume 41. Providence, Rhode Island, 1995.
- [14] J. L. GOUZÉ, A. RAPAPORT et M. Z. HADJ-SADOK : Interval observers for uncertain biological systems. *Ecological Modelling*, 133:46–56, 2000.
- [15] M. KIEFFER et E. WALTER : Guaranteed nonlinear state estimation for continuous-time dynamical models from discrete-time measurements. Toulouse, 2006. ROCOND.
- [16] D. ANGELI et E. D. SONTAG : Monotone control systems. *IEEE Transactions on automatic control*, 48(10):1684–1698, 2003.
- [17] A. RAPAPORT et J. L. GOUZÉ : Practical observers for uncertain affine output injection systems. *Proceedings of the European Control Conference*, 1999.
- [18] J. CHEN et R. J. PATTON : *Robust model-based fault diagnosis for dynamic systems*. Kluwer Academic Publishers, 1999.