

# Commande robuste non linéaire et à basculement de gains pour le suivi de trajectoire

Vincent MAHOUT, Damien BILY

CNRS LAAS 7 avenue colonel Roche F-31077 Toulouse, France  
Université de Toulouse; UPS; INSA; INP; ISAE; LAAS F-31077 Toulouse, France  
*vmahout@laas.fr, dbily@laas.fr*

**Résumé**— Ce papier se situe dans le domaine de la robustification de loi de commande non linéaire (commande plate). La commande robuste additive est une commande linéaire sur l'écart à la trajectoire de référence, de type retour d'état et à basculement de gains. Chacun des gains est calculé sur un modèle linéaire local autour d'un point donné de la trajectoire, l'ensemble permettant de couvrir l'intégralité de la trajectoire imposée. Ces différents modèles linéaires locaux sont obtenus à partir d'une approximation bornée en norme des fonctions non linéaires du modèle. Ce papier montre comment le recours aux techniques *LMI* permet de calculer les approximations bornées en norme ainsi que le calcul du correcteur globalement robuste. Cette approche est illustrée par des résultats de simulation sur un système de lévitation magnétique.

**Mots-clés**— Système Non Linéaire, Contrôle Robuste, LMI, Platitude, Suivi de Trajectoire, Approximation bornée en norme.

## I. INTRODUCTION

La recherche en automatique sur le *gain scheduling* est (ou reste) une activité forte dans la communauté scientifique internationale. La figure (Fig.1) montre sur les 6 dernières années le nombre de publications que l'on peut trouver sur la base IEEE Xplore. On peut noter qu'environ 25% d'entre elles font également apparaître le mot-clé *robust*, ce qui semble montrer qu'une des préoccupations des concepteurs de ce genre de loi de commande concerne la garantie de stabilité et de performances.

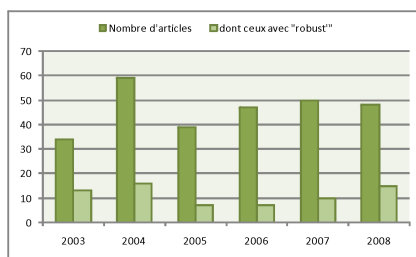


Fig. 1. Évolution du nombre de papiers sur le *gain scheduling* dans la base IEEE Xplore

Le travail présenté dans ce papier s'inscrit totalement dans cette voie et cherche à utiliser l'intérêt de ces techniques pour le contrôle de systèmes non linéaires. En s'appuyant sur les théories de la commande robuste pour les systèmes linéaires [1], il s'agit d'exploiter au mieux les avancées récentes dans le domaine de l'optimisation convexe par l'emploi de solveur LMI [2]. En 2000, W.J. Rugh and J.S. Shamma ont publié une étude de synthèse [9] sur les techniques de commande à basculement de gains en relevant principalement les différents inconvénients de cette approche. Notamment le problème de la validité lo-

cale stricte d'un contrôleur à séquençement de gains global oblige le concepteur à le vérifier en le simulant pour obtenir par la suite un résultat acceptable. Ce papier vise à prolonger un algorithme précédemment exposé [4], [7], pour garantir une transition stable entre deux points de fonctionnement d'un système non linéaire général de la forme :

$$\dot{X} = f(X) + g(X)U \quad (1)$$

L'algorithme proposé ici s'appuie toujours sur une approximation bornée en norme des fonctions non linéaires, sans tenir compte d'incertitude sur le vecteur paramètre, mais introduit la notion de suivi de trajectoire. En effet, dans l'algorithme initial le déplacement d'un point à un autre se fait le long de la variété d'équilibre du système. Cette approche est non seulement non optimale mais de plus elle n'offre aucune maîtrise possible de la vitesse de déplacement. L'utilisation des propriétés supposées de platitude du modèle [6] permet de concevoir un correcteur global robuste. La platitude est employée ici pour engendrer une trajectoire (et une commande de type boucle ouverte) de référence, d'autres approches (commande optimale par exemple) n'offrant pas non plus de propriétés de robustesse suffisante pourraient être éventuellement utilisées. Un système de bille en lévitation magnétique est utilisé pour illustrer l'approche. Ce dispositif offre l'avantage, pour illustrer les propriétés de robustesse du correcteur, d'être instable en boucle ouverte.

Ce papier présentera dans un premier temps une description de l'algorithme général permettant de concevoir le correcteur à basculement de gains. Pour cette description, la notion de platitude d'un système est tout d'abord rapidement énoncée. Ensuite les techniques d'approximation normée en borne d'une fonction non linéaire ainsi que celles de calcul des correcteurs locaux, toutes deux basées sur l'utilisation d'inégalités matricielles, sont exposées. Ces correcteurs permettent de robustifier la commande plate initiale. En dernier lieu, l'algorithme complet qui permet de construire la suite de correcteurs locaux est donné. La seconde partie de ce papier propose d'illustrer cette approche par des résultats de simulation sur le processus de lévitation magnétique.

## II. DESCRIPTION DE L'ALGORITHME DE SYNTHÈSE

### A. Platitude et trajectoires de référence

L'approche présentée dans ce papier concerne la variété de système décrit par l'équation (Eq. 1) mais il doit également avoir des propriétés de platitude. La platitude différentielle, développée par M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin et P. Rouchon en 1992 [3] est une propriété intrinsèque

d'un système dynamique. Cette propriété s'accompagne de la capacité à pouvoir formuler l'inverse de la dynamique de ce système sans avoir recours à la résolution numérique de l'équation différentielle d'origine mais simplement et directement à partir des dérivées successives d'un jeu de variables de sortie particulières appelées *sorties plates*.

Soit le système commandé non linéaire, de la forme générale :

$$\dot{X} = \varphi(X, U) \quad (2)$$

avec les vecteurs d'état et de sortie décrits par  $X = [x_1 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  et  $U = [u_1 \ \cdots \ u_m]^T \in \mathbb{R}^m$ .

Ce système est *différentiellement plat* si et seulement si il existe un vecteur de sortie  $Y \in \mathbb{R}^m$  et trois entiers  $\alpha, \beta, \delta$  tels que :

$$\begin{cases} X = \mathcal{F}(Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(\alpha)}) & (a) \\ U = \mathcal{G}(Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(\beta)}) & (b) \end{cases} \quad (3)$$

avec  $Y$  de la forme :

$$Y = \mathcal{H}(X, U, \dot{U}, \ddot{U}, \dots, U^{(\delta)}) \quad (4)$$

La sortie  $Y$  est appelée *sortie plate* du système (Eq. 2), et sa dimension est obligatoirement égale au nombre d'entrées (on a donc  $Y \in \mathbb{R}^m$ ).

Il a été montré (pour avoir une bonne synthèse de cette approche, on peut se référer à [10],[8]) que la commande :

$$U(t) = \mathcal{G}(Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, V) \quad (5)$$

linéarise le système (Eq. 2) entre la sortie plate  $Y$  et une entrée auxiliaire  $V$  dans la forme de Brunovsky :

$$y_j^{(\alpha_j+1)} = v_j \quad j = 1, \dots, \dim(u) \quad (6)$$

Le suivi de trajectoire peut alors s'implémenter à partir de la sortie plate désirée  $Y_d(t)$  et, en stabilisant le transfert avec l'entrée auxiliaire  $V$ , par un retour de la sortie plate et de ses dérivées successives :

$$v_j = y_{d,j}^{(\alpha_j+1)} + \sum_{k=1}^{\alpha_j} \sigma_j^k \left( y_j^{(k)} - y_{d,j}^{(k)} \right) \quad j = 1, \dots, \dim(u) \quad (7)$$

où  $\sigma_j^k$  correspond aux coefficients d'un polynôme de type Hurwitz.

Il sera donc nécessaire de définir une trajectoire de référence en utilisant les équations (Eq. 3). Cette trajectoire  $\gamma(t)$  est paramétrée par le temps de parcours  $t_f$  comme :

$$\gamma : t \in [0, t_f] \mapsto \gamma(t) = [X_d(t), U_d(t)] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (8)$$

avec

$$\begin{cases} \gamma(0) &= [X_d(0), U_d(0)] \\ \gamma(t_f) &= [X_d(t_f), U_d(t_f)] \end{cases} \quad (9)$$

Il est à noter que cette caractérisation est nécessaire pour la synthèse des correcteurs. Par la suite, lors de la phase de simulation ou d'expérimentation, le temps "joue" son rôle naturel et la trajectoire désirée ainsi que l'évolution

du système ainsi commandé ne sont plus soumises à cette paramétrisation.

$U_d$  permet de faire suivre au système nominal (Eq. 2) la trajectoire préalablement définie. Cependant en cas d'erreur (perturbation, bruit, incertitude,...) cette commande ne permet pas d'obtenir une stabilité asymptotique. La platitude n'est pas naturellement robuste. Le travail présenté dans ce papier propose de construire une commande stabilisante sur l'erreur de trajectoire :

$$\epsilon(t) = X_d(t) - X(t) \quad (10)$$

*B. Approximation bornée en norme d'une fonction non linéaire*

Les synthèses de commande utilisent les techniques de commande robuste des systèmes linéaires. Il est donc nécessaire de passer par une phase d'approximation du système non linéaire par des modèles linéaires. L'approximation bornée en norme est la solution retenue. Supposons une fonction non linéaire  $\xi$  quelconque

$$\xi : Z \in \mathbb{R}^p \rightarrow \xi(Z) \in \mathbb{R}^q \quad (11)$$

Supposons un domaine d'approximation linéaire autour d'un point de référence  $Z^*$ , ce domaine correspond à un hypercube  $\mathcal{P}_{Z^*}(\delta_Z)$  donné par ses demi cotés

$$\mathcal{P}_{Z^*}(\delta_Z) = \{Z, |z_i - z_i^*| \leq \delta_{zi}\}, \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (12)$$

Notation : L'écart au point de référence est noté par la suite  $\tilde{Z} \equiv Z - Z^*$ .

Deux sortes d'approximation sont considérées dans la suite, elles se distinguent par l'ordre (zéro ou premier) utilisé de la série de Taylor pour la fonction  $\xi$  au point  $Z^*$ . L'utilisation de cette série permet de trouver une majoration de l'erreur faite sur l'ensemble du domaine  $\mathcal{P}_{Z^*}(\delta_Z)$ . La majoration est calculée sur un nombre  $k$  (fini) de points ; l'ensemble du domaine est donc discrétisé par  $k$  points sur chacune des dimensions du vecteur  $Z$ , ce qui représente  $k^p$  points. L'ensemble de ces approximations et leur majoration s'exprimera lors de la phase de synthèse des correcteurs, à l'écriture d'une condition suffisante sous forme de  $\mathcal{LM}$ .

**B.1 Approximation d'ordre 0**

$$\xi(Z) = \xi(Z^* + \tilde{Z}) = \xi(Z^*) + \Delta^0 \xi(\tilde{Z}) \quad (13)$$

$\mathbf{M}_\xi^0$  est une approximation qui majore  $\Delta^0 \xi^T(\tilde{Z}) \Delta^0 \xi(\tilde{Z})$  sur le domaine choisi si elle vérifie :

$$\mathbf{M}_\xi^0 T \mathbf{M}_\xi^0 = \sup_{\tilde{Z} \in \mathcal{P}_0(\delta_Z)} \Delta^0 \xi^T(\tilde{Z}) \Delta^0 \xi(\tilde{Z}) \quad (14)$$

**B.2 Approximation d'ordre 1**

$$\xi(Z) = \xi(Z^* + \tilde{Z}) = \xi(Z^*) + L\tilde{Z} + \Delta^1 \xi(\tilde{Z}) \quad (15)$$

Cette approximation se définit donc avec une matrice linéaire  $\mathbf{L}$  ( $q \times p$ ) et une matrice symétrique définie positive  $\mathbf{M}_\xi^1$  telle que l'erreur doit vérifier :

$$\Delta^1 \xi^T(\tilde{Z}) \Delta^1 \xi(\tilde{Z}) \leq \tilde{Z}^T \mathbf{M}_\xi^1 Z, \quad \forall \tilde{Z} \in \mathcal{P}_0(\delta_Z) \quad (16)$$

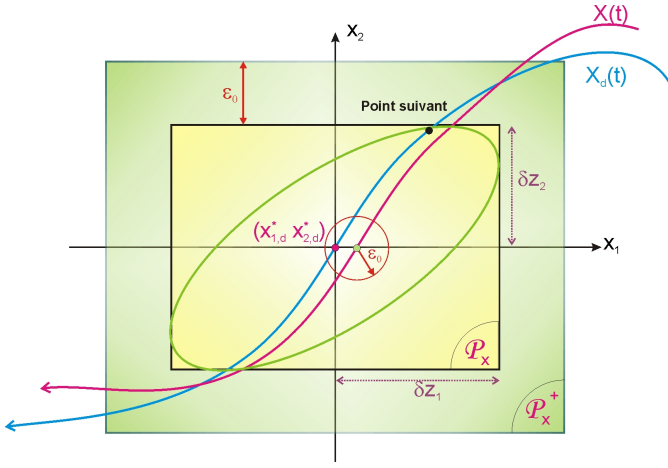


Fig. 2. Linéarisation autour d'une trajectoire

c'est à dire

$$(\xi(Z^* + \tilde{Z}) - \xi(Z^*) + \mathbf{L}\tilde{Z})^T (\xi(Z^* + \tilde{Z}) - \xi(Z^*) + \mathbf{L}\tilde{Z}) \leq \tilde{Z}^T \mathbf{M}_\xi^1 \tilde{Z} \quad (17)$$

ce qui peut être réécrit en utilisant le lemme de Schur comme la  $\mathcal{LMI}$

$$\begin{pmatrix} \tilde{Z}^T \mathbf{M}_\xi^1 \tilde{Z} & \xi^T(Z^* + \tilde{Z}) - \xi^T(Z^*) + \tilde{Z}^T \mathbf{L}^T \\ \xi(Z^* + \tilde{Z}) - \xi(Z^*) + \mathbf{L}\tilde{Z} & \mathbf{I}_q \end{pmatrix} \geq 0 \quad (18)$$

Cette  $\mathcal{LMI}$  dépend de la variable  $\tilde{Z}$ , elle est donc de dimension infinie. Il est cependant envisageable d'en réduire la complexité en ne l'exprimant que sur la discrétisation des  $k^p$  points différents  $\tilde{Z} \in \mathcal{P}_0(\delta_Z)$ . L'objectif fixé pour calculer cette approximation est une minimisation d'une combinaison convexe de  $\text{Trace}(\mathbf{M}_\xi^1)$  et de  $\lambda_{max}(\mathbf{M}_f^1)$ .

La série de Taylor de  $\xi$  en  $Z^*$  s'écrit alors :

$$\xi(Z) = \xi(Z^*) + \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial Z}}_{\mathbf{L}} \Big|_{Z^*} \tilde{Z} + \Delta^1 \xi(\tilde{Z}) \quad (19)$$

La matrice  $\mathbf{L}$  est considérée comme une variable du problème d'optimisation. Cela permet d'obtenir une représentation de l'approximation de la fonction  $\xi$  plus proche de la forme non linéaire d'origine.

### B.3 Approximation du système d'écart

Supposons le système (Eq. 1) suivant la trajectoire de référence (Eq. 8). Dans le voisinage polyédrique  $\mathcal{P}_{X_d^*}$  d'un point  $X_d^* \in \mathbb{R}^n$  (**Fig.2**), nous pouvons écrire en utilisant une approximation d'ordre 1 pour  $f$  et une d'ordre 0 pour  $g$  :

$$\begin{cases} f(X) = f(X_d^*) + A(X - X_d^*) + \Delta^1 f(X - X_d^*) \\ g(X) = g(X_d^*) + \Delta^0 g(X) \end{cases} \quad (20)$$

Dans ce même voisinage, la trajectoire de référence vérifie :

$$\begin{cases} f(X_d) = f(X_d^*) + A(X_d - X_d^*) + \Delta^1 f(X_d - X_d^*) \\ g(X_d) = g(X_d^*) + \Delta^0 g(X_d) \end{cases} \quad (21)$$

On obtient alors l'approximation linéaire de la dynamique de l'erreur :

$$\dot{\epsilon} = A\epsilon + \Delta^1 f(X_d - X_d^*) - \Delta^1 f(X_d - X_d^*) + g(X_d^*)\delta u + \Delta^0 g(X_d)u_d - \Delta^0 g(X)u \quad (22)$$

Il s'agit donc de trouver une matrice majorante  $\mathbf{M}$  sur  $\mathcal{P}_{X_d^*}$  telle que :

$$\begin{aligned} \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon)^T \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) &\leq \epsilon^T \mathbf{M} \epsilon, \quad \forall [X, X_d]^T \in \mathcal{P}_{X_d^*} \\ \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) &= [\Delta^1 f(X_d - \epsilon - X_d^*) - \Delta^1 f(X_d - X_d^*)] \end{aligned} \quad (23)$$

Il devient numérique difficile (explosion combinatoire sur les conditions  $\mathcal{LMI}$ ) de vouloir combiner  $k^n$  points pour  $X \in \mathcal{P}_{X_d^*}$  avec  $k^n$  points pour  $X_d \in \mathcal{P}_{X_d^*}$  pour calculer l'approximation de cette fonction non linéaire. Cependant en considérant l'hypothèse suivante, le problème peut alors se simplifier.

**Hypothèse** : on suppose que le correcteur final est suffisamment robuste pour que le système évolue en décrivant une trajectoire  $x(t)$  suffisamment proche de  $X_d(t)$  et qu'à tout instant  $t$  on vérifie :

$$\|X(t) - X_d(t)\| < \epsilon_0, \quad \forall t > 0 \quad (24)$$

L'écart de trajectoire  $\epsilon_0$  sera un des paramètres de l'algorithme de synthèse. Il peut être considéré comme un élément du cahier des charges, à savoir l'écart maximum admissible pour le suivi de trajectoire.

En utilisant cette hypothèse et en introduisant (**Fig.2**) le domaine étendu  $\mathcal{P}_{X_d^*}^+$  :

$$\mathcal{P}_{X_d^*}^+ = \{X, |x_i - \epsilon_0 - x_i^*| \leq \delta_{xi}\}, \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (25)$$

Il est possible d'écrire :

$$\begin{aligned} \Delta^1 f(X - X_d^*)^T \Delta^1 f(X - X_d^*) \\ \leq (X - X_d^*)^T \mathbf{M}_A (X - X_d^*) \quad \forall X \in \mathcal{P}_{X_d^*}^+ \end{aligned} \quad (26)$$

de même

$$\begin{aligned} \Delta^1 f(X_d - X_d^*)^T \Delta^1 f(X_d - X_d^*) \\ \leq (X_d - X_d^*)^T \mathbf{M}_A (X_d - X_d^*) \quad \forall X_d \in \mathcal{P}_{X_d^*}^+ \end{aligned} \quad (27)$$

On en déduit alors :

$$\Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon)^T \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) \leq \epsilon^T \mathbf{M}_A \epsilon, \quad \forall [X, X_d]^T \in \mathcal{P}_{X_d^*}^+ \quad (28)$$

L'approximation consiste donc à calculer les matrices  $A$  et  $\mathbf{M}_A$  en exprimant les  $k^n$  conditions suffisantes sous forme de  $\mathcal{LMI}$  :

$$\begin{pmatrix} (X_d - X_d^*)^T \mathbf{M}_A (X_d - X_d^*) & \Lambda^T(X, X_d^*) \\ \Lambda(X, X_d^*) & \mathbf{I}_q \end{pmatrix} \geq 0 \quad (29)$$

avec  $\Lambda(X, X_d^*) = f(X_d) - f(X_d^*) + A(X_d - X_d^*)$  pour  $k^n$  points  $X_d$  inclus dans le polyèdre  $\mathcal{P}_{X_d^*}^+$  centré sur  $X_d^*$

En appliquant un raisonnement similaire sur l'approximation d'ordre 0 pour le fonction  $g(X)$ , à savoir que l'approximation de  $g(X)$  sur  $\mathcal{P}_{X_d^*}$  est incluse dans l'approximation de  $g(X_d)$  sur  $\mathcal{P}_{X_d^*}^+$ , le système (Eq. 22) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon} &= A\epsilon + \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) \\ &\quad + (g(X_d^*) + \Delta^0 g(X_d)) \delta u \\ &= F(X_d^*) + G(X_d^*) \delta u\end{aligned}\quad (30)$$

avec

$$\begin{cases} F(X_d^*) = A\epsilon + \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) \\ G(X_d^*) = g(X_d^*) + \Delta^0 g(X_d) \end{cases}$$

#### B.4 Synthèse de correcteur

Les commandes de stabilisation autour de la trajectoire de référence sont des commandes par retour d'état  $\delta u = \mathbf{K}\epsilon$ , le système en boucle fermée est de la forme :

$$\dot{\epsilon} = (A + G(X_d^*)\mathbf{K})\epsilon + \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) \quad (31)$$

Si maintenant on se donne une fonction de Lyapounov quadratique

$$V(\epsilon) = \epsilon^T \mathbf{P} \epsilon \quad \mathbf{P} > 0 \quad (32)$$

alors

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \epsilon^T \mathbf{P} [(A + G(X_d^*)\mathbf{K})\epsilon + \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon)] \\ &\quad + [\epsilon^T (A + G(X_d^*)\mathbf{K})^T + \Upsilon^T(X_d, X_d^*, \epsilon)] \mathbf{P} \epsilon \\ &= \epsilon^T \left[ \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}G(X_d^*)\mathbf{K} + \mathbf{K}^T G^T(X_d^*)\mathbf{P} \right] \epsilon \\ &\quad + \underbrace{\epsilon^T \mathbf{P} \Upsilon(X_d, X_d^*, \epsilon) + \Upsilon^T(X_d, X_d^*, \epsilon) \mathbf{P} \epsilon}_{\leq \epsilon^T [\mathbf{P}^2 + M_A] \epsilon} \\ &\leq \epsilon^T \left[ \mathbf{P}A + A^T \mathbf{P} + \mathbf{P}g(X_d^*)\mathbf{K} + \mathbf{K}^T g^T(X_d^*)\mathbf{P} \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{P}^2 + M_A + \underbrace{\mathbf{P} \Delta^0 g(X_d)\mathbf{K} + \mathbf{K}^T \Delta^0 g^T(X_d)\mathbf{P}}_{\leq \epsilon^T [\mathbf{P}^2 + \mathbf{K}^T \Delta^0 g^T(X_d) \Delta^0 g(X_d)\mathbf{K}] \epsilon} \right] \epsilon \\ &\leq \epsilon^T L_1 \epsilon\end{aligned}\quad (33)$$

en notant

$$\begin{cases} \mathbf{W} = \mathbf{P}^{-1} > 0 \\ \mathbf{Y} = \mathbf{K}\mathbf{W} \end{cases} \quad (34)$$

en prenant pour l'approximation de  $g$

$$\begin{cases} G(X_d^*) = g(X_d^*) + \Delta^0 g(X_d^*) \\ \Delta^0 g^T(X_d^*) \Delta^0 g(X_d^*) \leq \Delta B^T \Delta B = \sup_{X_d \in \mathcal{P}_{X_d^*}^+} \Delta^0 g^T(X_d^*) \Delta^0 g(X_d^*) \end{cases} \quad (35)$$

et appliquant la propriété de congruence à  $L_1$  par  $\mathbf{W}$

$$L_1 < 0 \iff \mathbf{W}^T L_1 \mathbf{W} < 0 \quad (36)$$

On obtient  $\dot{V} < 0$  si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + g(X_d^*)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T g^T(X_d^*) + 2\mathbf{I}_n \\ + \mathbf{W}M_A\mathbf{W} + \mathbf{Y}^T \Delta B^T \Delta B \mathbf{Y} < 0 \end{aligned} \quad (37)$$

qui s'écrit sous forme  $\mathcal{LMI}$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \mathbf{W}\sqrt{M_A} & \mathbf{Y}^T \Delta B^T \\ \sqrt{M_A}\mathbf{W} & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \\ \Delta B \mathbf{Y} & \mathbf{0}_n & -\mathbf{I}_n \end{pmatrix} < 0 \quad (38)$$

avec

$$c_{11} = \mathbf{A}\mathbf{W} + \mathbf{W}\mathbf{A}^T + g(X_d^*)\mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T g^T(X_d^*) + 2\mathbf{I}_n$$

Cette condition est suffisante et caractérise la stabilisabilité du système sur un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}_{X_d^*}$  par retour d'état statique. On récupère les valeurs de  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{K}$  suivantes

$$\begin{cases} \mathbf{P} = \mathbf{W}^{-1} \\ \mathbf{K} = \mathbf{Y}\mathbf{W}^{-1} \end{cases}$$

#### C. Algorithme de synthèse

L'algorithme de synthèse (**Fig.3**) se décompose donc comme suit :

- (①) Calcul d'une trajectoire de référence (on utilise les propriétés de platitude (Eq. 3) pour calculer les trajectoires d'état  $x_{i,d}(t)$  ainsi que la commande nominale  $u_d(t)$  qui permet en l'absence de perturbations et d'incertitudes de la suivre. Le point final de cette trajectoire est le premier point courant  $X_d^*$ .
- (②,⑤) On définit le polyèdre  $\mathcal{P}_{X_d^*}$  (Eq. 12) et son étendu  $\mathcal{P}_{X_d^*}^+$  (Eq. 25) autour du point courant.
- À partir de  $k$  points dans le polyèdre  $\mathcal{P}_{X_d^*}^+$ , on détermine (Eq. 29) les matrices d'approximation  $A$ ,  $M_A$  et  $\Delta B$  pour le point courant - Résolution d'une  $\mathcal{LMI}$  conséquente si le nombre  $k$  de points est important.
- (③,⑥) À partir de l'approximation linéaire ainsi établie, on détermine un retour d'état stabilisant (placement de pôles,  $H_2, \dots$ ) ainsi que l'ellipsoïde de stabilité à l'intérieur du polyèdre (Eq. 38).
- (④) On recherche le point de la trajectoire "le plus loin possible" inclus dans l'ellipsoïde, il devient le point courant.
- (⑦) Si le point final est inclus dans l'ellipsoïde courant, on termine sinon on reprend en 2.

### III. MISE EN ŒUVRE SUR UN MODÈLE DE LÉVITATION MAGNÉTIQUE

L'étude est menée sur un modèle identifié de maquette pédagogique (**feedback levitation system 33-006**) de lévitation magnétique. Ce système offre le double avantage de vérifier les propriétés de platitude et d'avoir un état complètement mesurable. Le système (**Fig.4**) est composé d'un électro-aimant qui développe une force électromagnétique  $F_m$ . Cette force dépend du courant qui parcourt la bobine (circuit RL) ainsi que de la position de la bille en acier que l'on doit sustenter. La commande  $U_{com}$  impose une tension aux bornes du circuit à travers un amplificateur. La position est mesurée par un dispositif optique raisonnablement linéaire sur les plages de variation de la position que l'on considère.

#### A. Modélisation

Les équations électriques du circuit RL sont données par

$$U_e = aU_{com} + b = Ri_m + \frac{d(Li_m)}{dt} \quad (39)$$

L'inductance  $L(y)$  dépend de la position de la bille. Les expériences ont conduit à considérer que cette dépendance s'exprime comme :

$$L(y) = L_1 + \frac{L_0}{y} \quad (40)$$

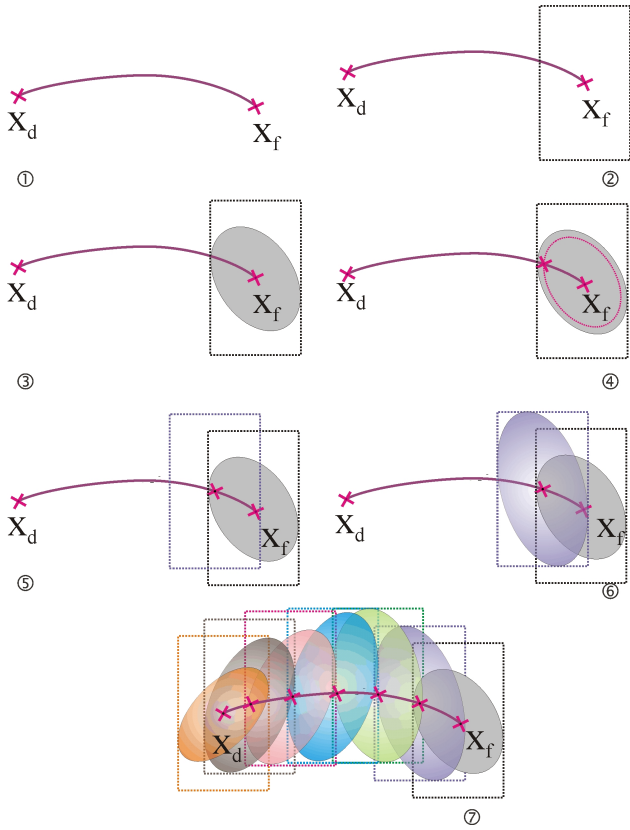


Fig. 3. Étape de construction de l'algorithme du correcteur global

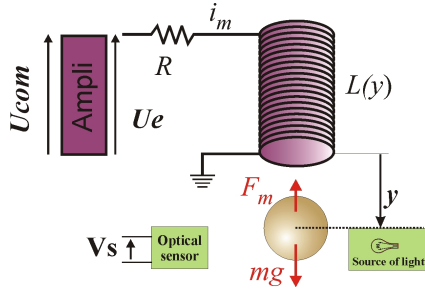


Fig. 4. Schéma de principe de la lévitation magnétique

L'équation électrique devient alors

$$U_e = aU_{com} + b = Ri_m + \left( L_1 + \frac{L_0}{y} \right) \frac{di_m}{dt} - \frac{L_0 i_m}{y^2} \frac{dy}{dt} \quad (41)$$

La force mécanique développée par l'électro-aimant est donnée par :

$$F_m = \frac{1}{2} i_m^2 \frac{\partial L}{\partial y} = -\frac{1}{2} i_m^2 \frac{L_0}{y^2} \quad (42)$$

L'équation dynamique mécanique s'écrit :

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = mg - \frac{1}{2} i_m^2 \frac{L_0}{y^2} \quad (43)$$

Posons  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$  and  $x_3 = i_m$  comme variables d'état et  $u = U_{com}$  la variable de commande, les équations non linéaires du système sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = g - \frac{L_0}{2m} \frac{x_3^2}{x_1^2} \\ \dot{x}_3 = \frac{-Rx_1^2 + L_0 x_2}{x_1(L_0 + L_1 x_1)} x_3 + \frac{x_1}{L_0 + L_1 x_1} (au + b) \end{cases} \quad (44)$$

Les différentes valeurs numériques trouvées pour ce système sont  $R = 20.4\Omega$ ,  $m = 21.5e^{-3}Kg$ ,  $a = 3.4$ ,  $b = 9.54$ ,  $L_1 = 0.61H$  et  $L_0 = 2.49H$ ,

### B. Platitude

Le système est plat avec la sortie réelle  $y$  comme sortie plate. On vérifie en effet pour l'état :

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = y^2 \sqrt{(g - \ddot{y})} \frac{2m}{L_0} \end{cases} \quad (45)$$

Le commande  $u$  dépend aussi uniquement de la sortie plate et de ses 3 dérivées successives puisqu'il est possible d'exprimer cette commande en fonction de  $x_1, x_2, x_3$  et  $\dot{x}_3$  :

$$u = \frac{1}{a} \left[ \left( \dot{x}_3 - \frac{-Rx_1^2 + L_0 x_2}{x_1(L_0 + L_1 x_1)} x_3 \right) \frac{L_0 + L_1 x_1}{x_1} - b \right] \quad (46)$$

L'utilisation des équations (Eq. 45) dans (Eq. 46) permet de déterminer l'expression de  $u$  en fonction de  $y, \dot{y}, \ddot{y}$  et  $y^{(3)}$ .

### C. Retour d'état linéaire robuste et séquencé

Pour déterminer la commande linéaire robuste suivant l'algorithme présenté dans la section précédente, il est nécessaire de définir une trajectoire de référence. La trajectoire choisie est périodique et est construite sur la base de splines trigonométriques [5]. Cette trajectoire oscille entre le point  $(x_1 = 3mm, x_2 = 0, x_3 = 1.23A)$  et le point  $(x_1 = 5mm, x_2 = 0, x_3 = 2.06A)$ .

Pour étudier les performances de la commande proposée, deux résultats de simulation sont proposés. Dans les deux études, les points de départ et d'arrivée sont strictement identiques ainsi que les différents paramètres de l'algorithme, seul diffère le temps  $t_f$  imposé pour décrire toute la trajectoire. Pouvoir choisir le temps de parcours est l'intérêt majeur de cette approche en comparaison de celle proposée dans [7] où le temps nécessaire pour atteindre le point final est libre et dépend uniquement de la dynamique propre du système et des performances intrinsèques des correcteurs synthésés.

Les paramètres utilisés pour l'algorithme de synthèse sont pour les approximations  $\delta_{x_1} = \delta_{x_2} = \delta_{x_3} = x_1 = 0.5$  et  $\epsilon_0 = 0.1$ . Les polyèdres d'incertitude  $\mathcal{P}_{X_d^*}$  et  $\mathcal{P}_{X_d^+}$  autour du point courant correspondent donc à des hypercubes symétriques. Cette valeur signifie, en ratio avec la trajectoire imposée, qu'au minimum 4 correcteurs seront nécessaires pour construire le correcteur global. En effet, le bassin d'attraction de chaque correcteur étant obligatoirement inclus dans le polyèdre d'incertitude  $\mathcal{P}_{X_d^*}$ , il n'est pas possible d'obtenir un nouveau point sur la trajectoire à moins de  $0,5mm$  du précédent.

Concernant la synthèse, les correcteurs mis en place sont des retours d'état avec placement de pôles. Cela nécessite donc l'ajout de conditions classiques  $\mathcal{LMI}$  d'appartenance à un secteur [2]. Le secteur choisi est  $(4, \frac{\pi}{4}, 60)$ .

Le dernier paramètre est le degré d'inclusion du point suivant dans l'ellipsoïde de stabilité du point courant. En effet pour s'assurer de la continuité de la stabilité ce point n'est pas choisi exactement sur la frontière de stabilité. Dans les exemples présentés, un coefficient de 90% d'inclusion est imposé. Lors des phases de simulation, le basculement de gains (donc le changement de correcteur) est lié uniquement au déroulement de la trajectoire imposée. Comme les différents domaines et les approximations successives sont faites relativement à cette trajectoire de référence, c'est cette dernière qui séquence le choix des correcteurs. Dans tous les cas une erreur sur la position initiale est imposée afin de tester les propriétés de convergence asymptotique du correcteur. Il est à noter que l'erreur initiale est supérieure en norme à la valeur  $\epsilon_0$ . On se place donc volontairement dans un cas où a priori la stabilité n'est pas assurée afin de mettre en évidence le conservatisme de la méthode (les correcteurs ont des bassins de stabilité plus important que ceux déterminés par la résolution des  $\mathcal{LMI}$ ).

#### IV. RÉSULTATS

##### A. Déplacement lent

Dans cette première simulation (**Fig.5**) et (**Fig.6**) le paramètre  $t_f$  est fixé à 1 seconde. C'est approximativement le temps nécessaire en utilisant l'algorithme se déplaçant le long de la variété d'équilibre [7]. L'algorithme de synthèse calcule 8 correcteurs. La trajectoire suit très correctement la trajectoire de référence ce qui est dû en grande partie à l'utilisation de la commande plate. Les différents correcteurs jouent cependant complètement leur rôle puisque l'écart initial est rapidement compensé.

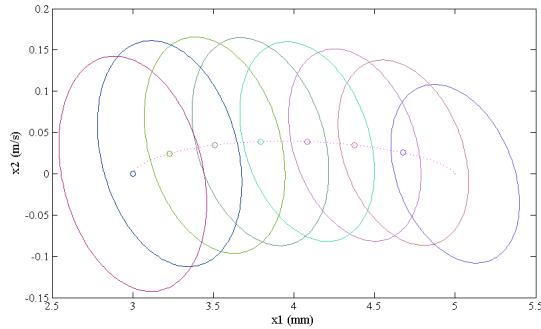


Fig. 5. Évolution des correcteurs et bassins d'attraction associés

##### B. Déplacement rapide

Dans ce second essai, la valeur de  $t_f$  a été divisée par 5. Le problème devient plus contraint. En effet, inévitablement les vitesses de description de la trajectoire sont plus élevées. Les différentes matrices d'approximation  $A$ ,  $M_A$  et  $\Delta B$  prennent donc des valeurs plus importantes, ce qui contraint le problème  $\mathcal{LMI}$ . Il est donc tout à fait cohérent (**Fig.7**) de trouver un nombre plus important de correcteurs (10 au lieu de 8) . Le tracé de la simulation (**Fig.8**) montre, outre que l'erreur initiale est là aussi compensée malgré son importance relative (par rapport à  $\epsilon_0$ ), qu'un dépassement relativement important lors du suivi.

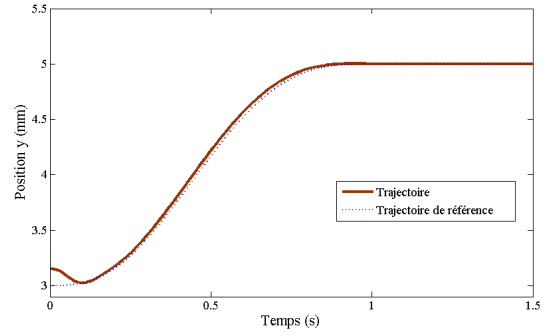


Fig. 6. Suivi de trajectoire ( $t_f = 1s$ )

Malgré un écart qui dépasse les limites théoriquement imposées par l'algorithme, la convergence vers le point final est tout de même vérifiée.

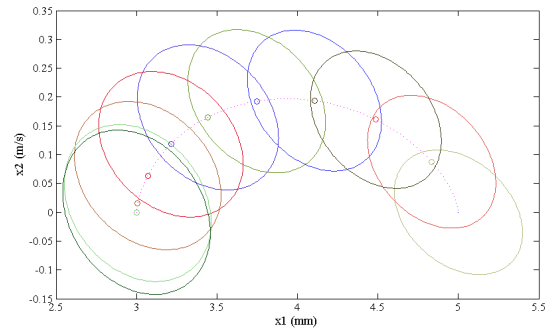


Fig. 7. Évolution des correcteurs et bassins d'attraction associés

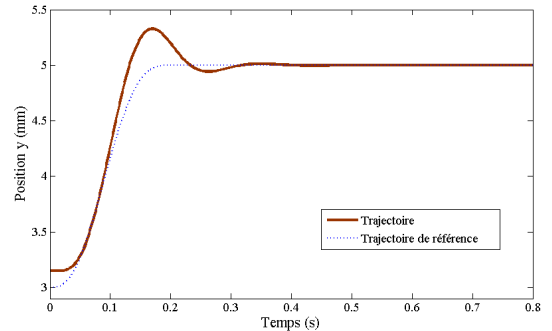


Fig. 8. Suivi de trajectoire ( $t_f = 0.2s$ )

#### V. CONCLUSION

Cette article a montré comment l'utilisation de l'approximation bornée en norme pouvait permettre d'obtenir une modélisation linéaire de l'erreur de suivi de trajectoire autour d'un point donné de cette trajectoire. Ainsi, à partir d'un ensemble de modèles linéaires (couvrant l'intégralité d'une trajectoire) et en exploitant les propriétés de platitude du système il a été montré comment il est possible de fabriquer un correcteur non linéaire robuste. Cette approche a été illustrée sur un système de lévitation magnétique. Les travaux actuels cherchent à introduire deux notions supplémentaires afin de rendre cette

technique de commande plus pragmatique et donc plus facilement utilisable dans l'industrie. La première idée est de pouvoir dissocier la phase de synthèse de la trajectoire à suivre. Il est en effet malcommode d'avoir à refaire la phase de synthèse à chaque fois que la trajectoire est régénérée. La seconde direction est d'introduire la notion d'incertitude paramétrique au niveau du système et ce afin d'avoir un robustesse de la commande également par rapport à des variations paramétriques. Cela passera certainement par l'ajout d'un intégrateur pur dans la commande afin de compenser les écarts dus à ces méconnaissances.

#### RÉFÉRENCES

- [1] J. Bernussou. *Commande Robuste : Développements et applications*. Hermès-sciences, 1995.
- [2] S.P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, volume 15. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 1994.
- [3] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, and P. Rouchon. Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples. *International Journal of Control*, 61(6) :1327–1361, 1995.
- [4] H. Khansah. *Sur la commande de systèmes non linéaires par gains robustes séquencés*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, 2007.
- [5] V. Mahout. Path planning for non linear systems using trigonometric splines. 2005.
- [6] V. Mahout. Commande plate, robuste et séquencée. Expérimentation sur une lévitation magnétique. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA 2008)*, 2008.
- [7] V. Mahout and D. Bily. Robust Nonlinear Control Based on Norm-Bounded Approximation and Gain-Scheduling. *European Control Conference, ECC'09*, 2009.
- [8] F. Rotella and I. Zambettakis. Commande des systèmes par platitude. In *Technique de l'ingénieur : www.techniques-ingenieur.fr*, page S7 450, 2007.
- [9] W.J. Rugh and J.S. Shamma. Research on gain scheduling. *Automatica*, 36(10) :1401–1425, 2000.
- [10] H. Sira-Ramírez and S. Kumar Agrawal. *Differentially Flat Systems (Control Engineering)*. Marcel Dekker Inc., 2004.