

Commande sans capteur du moteur pas-à-pas à base de modes glissants d'ordre supérieur

Christophe FITER^{1,2}, Thierry FLOQUET^{1,2}, Joachim RUDOLPH³

¹Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal
UMR 8146 CNRS

Ecole Centrale de Lille, BP 48, Cité Scientifique. 59651 Villeneuve d'Ascq, France.
christophe.fiter@centraiens-lille.org, thierry.floquet@ec-lille.fr

²Équipe projet ALIEN INRIA, France.

³Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik
Universität de la Sarre, Campus A5 1, 66123 Saarbrücken, Allemagne.
j.rudolph@lrs.uni-saarland.de

Résumé— Nous proposons une commande robuste du moteur pas-à-pas sans capteur de position ni de vitesse, et ne nécessitant que des mesures des courants et des tensions. Nous présentons dans un premier temps des observateurs basés sur des modes glissants du 2^e ordre estimant la position et la vitesse du rotor, puis nous établissons une loi de commande robuste, elle-même basée sur des modes glissants, et faisant intervenir ces estimations. La stabilité des observateurs et de la loi de commande est ensuite traitée. Des résultats obtenus en simulation démontrent l'intérêt et la robustesse de ces méthodes.

Mots-clés— Moteur pas-à-pas, observateur, commande, stabilité, robustesse, modes glissants, super twisting, platitude

I. INTRODUCTION

Les moteurs pas-à-pas (MPPs) sont très largement utilisés dans l'industrie et dans les appareils grand public, pour des applications demandant à la fois rapidité et précision. Pour réaliser une commande robuste pour un tel moteur, la connaissance de la position et de la vitesse est indispensable. Cependant, pour bien des applications, la mise en place de capteurs mécaniques mesurant ces données peut se révéler problématique, pour des raisons de place et de branchements tout d'abord, de fragilité, mais aussi car cela engendre un surcôt de matériel non négligeable. Pour toutes ces raisons, nous observons ces dernières années un intérêt grandissant de la recherche pour la mise en place d'observateurs et de commandes pour les MPPs seulement à partir de mesures des courants dans les enroulements du stator et des tensions d'entrée.

Dans un premier temps, plusieurs travaux ont porté sur la réalisation de commandes supposant connue la position du rotor ([5], [7], [15]), et ont donné des résultats très convaincants, tant au niveau de la robustesse des commandes que de leur précision. Récemment, plusieurs travaux portant sur la commande "sans capteur" ont été publiés, mettant en lumière différentes méthodes d'estimation de la position et de la vitesse du rotor, comme [4], [18], [20].

Un schéma synoptique décrivant les objectifs du travail présenté ici est donné figure 1. Tout d'abord, nous présentons un observateur basé sur des modes glissants du 2^e ordre, permettant de réaliser des estimations précises de la position et de la vitesse du MPP, à partir des variables

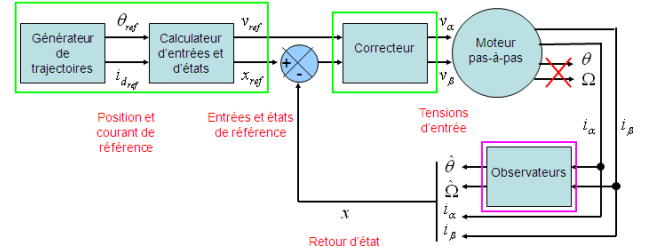


Fig. 1. Schéma global du système

électriques uniquement. Ensuite, nous proposons une commande, utilisant les variables observées, et basée également sur des modes glissants du 2^e ordre et sur la notion de platitude [9] pour réaliser un suivi de trajectoire. Le produit de notre travail est illustré par des résultats obtenus en simulation montrant la robustesse des méthodes proposées, même en présence de perturbations et de bruit.

Le papier est organisé comme suit. Dans la section II nous exposons les différents modèles du MPP que nous utilisons pour l'observation et la commande. Dans la section III nous présentons les observateurs que nous avons réalisés, et dans la section IV, une commande basée sur ces mêmes observateurs. Les résultats obtenus dans ces deux parties sont illustrés par des simulations. Enfin, nous terminons dans la section V par quelques remarques sur les résultats, les méthodes, et quelques améliorations pouvant être apportées.

II. EQUATIONS DES MODÈLES DU MPP

Avant de décrire les observateurs, nous présentons les deux modèles classiques du MPP que nous utilisons, et qui sont détaillés dans [11].

A. Modèle dans le repère fixe ($\alpha - \beta$)

Nous présentons tout d'abord le modèle que nous utilisons pour réaliser les observateurs :

$$\begin{cases} \frac{di_\alpha}{dt} = \frac{1}{L}(v_\alpha - Ri_\alpha + K\Omega \sin N\theta) \\ \frac{di_\beta}{dt} = \frac{1}{L}(v_\beta - Ri_\beta - K\Omega \cos N\theta) \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(K(i_\beta \cos N\theta - i_\alpha \sin N\theta) - f_v\Omega - C_T) \\ \frac{d\theta}{dt} = \Omega \end{cases} \quad (1)$$

dans lequel i_α et i_β sont les courants des enroulements dans les phases α et β , v_α et v_β sont les tensions d'entrée, θ est la position du rotor et Ω sa vitesse. Le paramètre R représente la résistance d'un enroulement, L son inductance, N le nombre de dents du rotor, J le moment d'inertie du rotor, f_v le coefficient de frottement visqueux, et C_r le couple résistant, que nous assimilerons dans la suite à des perturbations.

Ce modèle représente les grandeurs réelles du système : les entrées en tension, les courants de sortie auxquels nous aurons accès grâce à des capteurs, et la position et la vitesse du rotor, que nous allons estimer. Le lecteur pourra vérifier la commandabilité et l'observabilité (pour une vitesse non nulle) du système sans capteur mécanique.

B. Modèle dans le repère mobile ($d - q$)

A partir du modèle présenté ci-dessus, nous pouvons obtenir un modèle dans un repère mobile lié au rotor par une simple opération de rotation :

$$\begin{bmatrix} i_d \\ v_d \end{bmatrix}^T = M_p \begin{bmatrix} i_\alpha \\ v_\alpha \end{bmatrix}^T \quad \text{avec } M_p = \begin{pmatrix} \cos N\theta & \sin N\theta \\ -\sin N\theta & \cos N\theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les grandeurs représentées dans ce modèle sont fictives, il est impossible de les mesurer à l'aide de capteurs. Le modèle ainsi obtenu, que nous utilisons par la suite pour faciliter la mise au point des lois de commande, devient

$$\begin{cases} \frac{di_d}{dt} = \frac{1}{L}(v_d - Ri_d + NL\Omega i_q) \\ \frac{di_q}{dt} = \frac{1}{L}(v_q - Ri_q - NL\Omega i_d - K\Omega) \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J}(K i_q - f_v \Omega - C_r) \\ \frac{d\theta}{dt} = \Omega \end{cases} \quad (3)$$

Nous mettrons en évidence dans la section IV quelques propriétés intéressantes du système pour la commande grâce à ce modèle.

III. OBSERVATEUR PAR MODES GLISSANTS

Dans cette section, nous proposons la synthèse d'observateurs pour le MPP basés sur des modes glissants d'ordre supérieur. Avant de mettre en place ces méthodes d'estimation, nous offrons une brève description de ces techniques, et de l'algorithme du Super Twisting que nous utiliserons en particulier.

A. Modes Glissants et algorithme du Super Twisting

Les modes glissants [16] sont très utilisés dans le cadre de l'observation et la commande robustes des systèmes non linéaires. L'objectif est de contraindre le système à converger en temps fini et à rester sur une surface (appelée surface de glissement), sur laquelle la dynamique est celle souhaitée par le cahier des charges, le tout grâce à une commande discontinue. Les modes glissants d'ordre supérieur [8] permettent d'avoir une précision de convergence accrue, et d'effacer les problèmes de discontinuités de la commande qu'engendrent les modes glissants d'ordre 1 (sous certaines conditions liant le degré relatif du système par rapport à la variable de glissement S et l'ordre choisi du mode glissant). On peut maintenant trouver une littérature relativement importante concernant l'observation et la commande par mode glissants d'ordre deux avec des applications dans les

domaines de la mécanique, la robotique ou les machines électriques (voir par exemple [1], [2], [3], [6], [10], [12], [17], [19]). Dans ce qui suit, nous réaliserons des observateurs par modes glissants d'ordre supérieur, car ils permettent d'obtenir des estimations en temps fini sans introduire de filtre passe-bas (ce qui n'est pas le cas avec un mode glissant d'ordre 1 où il s'avère nécessaire de filtrer les oscillations à haute fréquence). En particulier, nous utiliserons l'algorithme du Super Twisting [14], qui est un algorithme par modes glissants d'ordre deux utilisé dans le cas d'un système de degré relatif 1 et défini par la fonction $u_{st}(S)$ suivante :

$$u_{st}(S) = u_1 + u_2 \quad (4)$$

avec

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -\alpha \text{sign}(S) \\ u_2 = -\lambda |S|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(S) \end{cases} \quad (5)$$

où S est la variable de glissement, et où α et λ sont deux paramètres devant vérifier certaines conditions dépendantes du système et de la surface de glissement choisie pour assurer une convergence en temps fini vers l'ensemble de glissement d'ordre 2 :

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R}^n : S = \dot{S} = 0\} \quad (6)$$

B. Observateur de position et de vitesse par modes glissants d'ordre 2

Pour réaliser l'observateur, l'idée est d'utiliser les 2 équations électriques du modèle (1), et de remplacer les termes inconnus par une injection de sortie basée sur l'algorithme par modes glissants d'ordre deux décrit ci-dessus. Ceci permet alors d'estimer en temps réel les termes inconnus. Nous écrivons la dynamique de l'observateur ainsi :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{i}_\alpha}{dt} = \frac{1}{L}(v_\alpha - Ri_\alpha) - \chi_1(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \frac{d\hat{i}_\beta}{dt} = \frac{1}{L}(v_\beta - Ri_\beta) - \chi_2(i_\beta - \hat{i}_\beta) \end{cases} \quad (7)$$

où les injections de sortie χ_1 et χ_2 sont deux algorithmes du Super Twisting définis précédemment :

$$\begin{cases} \chi_1(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \triangleq u_{st}(i_\alpha - \hat{i}_\alpha) \\ \chi_2(i_\beta - \hat{i}_\beta) \triangleq u_{st}(i_\beta - \hat{i}_\beta) \end{cases} \quad (8)$$

Les surfaces de glissement sont définies par les erreurs d'observation en courant :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = i_\alpha - \hat{i}_\alpha \\ \varepsilon_2 = i_\beta - \hat{i}_\beta \end{cases} \quad (9)$$

Celles-ci vérifient, en utilisant (1) et (7) :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 = \frac{K}{L}\Omega \sin N\theta + \chi_1(\varepsilon_1) \\ \dot{\varepsilon}_2 = -\frac{K}{L}\Omega \cos N\theta + \chi_2(\varepsilon_2) \end{cases} \quad (10)$$

Avec un bon réglage des paramètres des algorithmes du Super Twisting, nous obtenons la convergence des erreurs d'observation en temps fini vers l'ensemble de glissement défini en (6). Nous avons donc en temps fini $\varepsilon_1 = \dot{\varepsilon}_1 = 0$ et $\varepsilon_2 = \dot{\varepsilon}_2 = 0$, soit :

$$\begin{cases} \chi_1 = -\frac{K}{L}\Omega \sin N\theta \\ \chi_2 = \frac{K}{L}\Omega \cos N\theta \end{cases} \quad (11)$$

De ces deux équations, nous déduisons une estimation de la position θ et de la vitesse Ω du rotor :

$$\hat{\Omega} = \pm \frac{L}{K} \sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} \hat{\theta}_0 & \text{si } \hat{\Omega} = 0, \\ -\frac{1}{N} \arctan\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) & \text{si } \hat{\Omega}\chi_2 > 0, \\ \frac{1}{N} \arctan\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (12)$$

où $\hat{\theta}_0$ est la dernière valeur de $\hat{\theta}$ calculée.

Nous pouvons alors remarquer deux problèmes découlant de la non unicité des solutions du système composé des deux équations électriques de (1). Le premier est que le signe de la vitesse est indéterminé, puisque si (θ, Ω) est solution de (11), alors $(\theta \pm \frac{\pi}{N}, -\Omega)$ l'est aussi. Cela signifie par la même que si le signe de l'estimation de la vitesse n'est pas correct, l'estimation de la position sera décalée de $\pm \frac{\pi}{N}$. Le deuxième problème est que l'estimation de la position n'est calculée qu'à modulo $\frac{2\pi}{N}$ près puisque $\hat{\theta}$ est calculé dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}]$ d'après (12). Ceci peut se révéler problématique si l'on souhaite établir une loi de commande pour réaliser un suivi de trajectoire.

Cet observateur se révèle performant même en milieu perturbé et bruité, grâce aux algorithmes de Super Twisting, si l'on suppose connu le signe de la vitesse. Cependant, il reste encore les deux problèmes présentés ci-dessus à résoudre.

L'idée la plus évidente afin de résoudre le problème du signe de la vitesse est d'étudier l'évolution de la position. Pour cela, nous allons utiliser l'estimée de la position $\hat{\theta}$ que nous avons et un nouvel observateur basé sur l'algorithme du Super Twisting :

$$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = \chi_3(\hat{\theta} - \hat{\theta}) \quad (13)$$

où χ_3 est l'algorithme de Super Twisting.

En notant $\varepsilon_3 = \hat{\theta} - \hat{\theta}$ l'erreur d'observation, nous avons $\dot{\varepsilon}_3 = \frac{d\hat{\theta}}{dt} - \chi_3(\varepsilon_3)$.

Un bon réglage des paramètres du Super Twisting engendre la convergence en temps fini de l'observateur sur l'ensemble de glissement d'ordre 2 $\{\varepsilon_3 = \dot{\varepsilon}_3 = 0\}$ et donc : $\hat{\theta} = \hat{\theta}$ et $\hat{\Omega} = \chi_3(\varepsilon_3) = \frac{d\hat{\theta}}{dt}$.

Nous avons vu que lorsque l'on se trompe sur l'estimation du signe de la vitesse, nous avons aussi une erreur sur l'estimation de la position $\hat{\theta}$. Il est donc légitime de se demander si cette erreur ne va pas influencer sur le bon fonctionnement de l'observateur. Lorsque le signe de l'estimation de la vitesse est erroné, nous avons $\hat{\theta} = \theta \pm \frac{\pi}{N}$. La dérivée de $\hat{\theta}$ est donc bien égale à celle de θ , donc la nouvelle estimation $\hat{\Omega}$ converge bien vers la vitesse Ω .

Par conséquent, par cette méthode, le signe de la nouvelle estimation de la vitesse $\hat{\Omega}$ est pleinement déterminé, sauf localement autour des points de discontinuité de $\hat{\theta}$, pour lesquels nous sortons du régime glissant. C'est cette discontinuité qui engendre des erreurs d'estimation pour cet observateur. Pour résoudre ce problème, nous utilisons un algorithme pour détecter ces discontinuités sur la variable de glissement $\varepsilon_3 = \hat{\theta} - \hat{\theta}$ (voir figure 2).

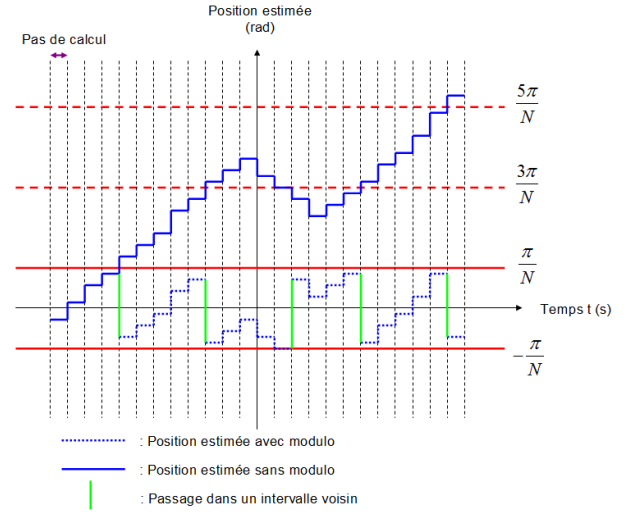


Fig. 2. Algorithme de détection de discontinuités et de reconstruction de la position

Un tel algorithme de détection de discontinuités est par nature sensible aux bruits de mesure. Cependant l'algorithme du Super Twisting utilisé pour l'observation de la position joue le rôle de filtre et permet d'obtenir, par construction, une nouvelle estimation de position $\hat{\theta}$ continue.

L'observateur ainsi établi permet donc d'obtenir des estimations de la position et de la vitesse, sans plus aucun problème de signe de la vitesse ni de problème d'intervalle ou de discontinuités de la position.

Les résultats obtenus en simulation pour un système avec de grosses perturbations ($C_r = \frac{C_m}{2} \sin(6\pi t)$, où C_m est le couple de maintien du moteur étudié) et du bruit de mesure (bruit blanc d'amplitude allant jusqu'à 5% du courant nominal) montrent l'intérêt de la méthode (voir figure 3).

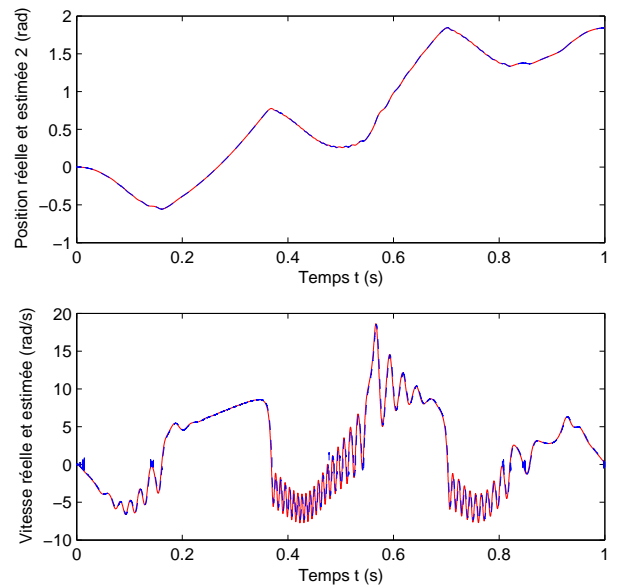


Fig. 3. Valeur réelle (en rouge) et estimée (en bleu) de θ et de Ω

IV. COMMANDE SANS CAPTEUR

Pour mettre en évidence l'utilité de l'observateur que nous avons mis au point, nous proposons dans cette section une commande robuste sans capteur mécanique et utilisant l'observateur défini précédemment.

L'objectif de la commande sera de réaliser un suivi de trajectoire. Nous remarquons tout d'abord que le système (3) est plat [9], avec pour sortie plate $z = [\theta, i_d]^T$ par exemple. Cela signifie que nous pouvons exprimer les états et les entrées du système seulement à partir de la sortie plate z et de ses dérivées. Grâce à cette propriété, nous pouvons très facilement définir une trajectoire de référence (notée Γ_r), vérifiant les dynamiques du système, et exprimer l'erreur de suivi :

$$e = [i_d - i_{d_r}, i_q - i_{q_r}, \Omega - \Omega_r, \theta - \theta_r]^T = [e_1, e_2, e_3, e_4]^T \quad (14)$$

qui a pour dynamique

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{1}{L}(\bar{v}_d - Re_1 + NL(e_3e_2 + e_3i_{q_r} + e_2\Omega_r)) \\ \dot{e}_2 = \frac{1}{L}(\bar{v}_q - Re_2 - NL(e_3e_1 + e_3i_{d_r} + e_1\Omega_r) - Ke_3) \\ \dot{e}_3 = \frac{1}{J}(Ke_2 - f_v e_3 - C_r) \\ \dot{e}_4 = e_3 \end{cases} \quad (15)$$

avec $\bar{v}_d = v_d - v_{d_r}$ et $\bar{v}_q = v_q - v_{q_r}$ les nouvelles entrées du système.

A. Commande par retour d'état

Pour la commande, nous adaptions au système sans capteur mécanique une commande par retour d'état réalisée dans [15], basée sur des modes glissants d'ordre 2, et pour laquelle la position et la vitesse sont mesurées.

Les variables de glissement sont définies par

$$\begin{cases} S_\theta = ke_4 + \dot{e}_4 \\ S_{i_d} = e_1 \end{cases}, k > 0 \quad (16)$$

dans le but de stabiliser l'erreur de suivi de position e_4 et d'annuler l'erreur de suivi du courant direct e_1 .

Pour assurer le suivi de la position, nous calculons

$$\ddot{S}_\theta = \frac{K}{JL}\bar{v}_q + \mu_\theta(e, \Gamma_r) - \left(\frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2}\right)C_r - \frac{1}{J}\frac{dC_r}{dt} \quad (17)$$

où

$$\mu_\theta(e, \Gamma_r) = \frac{k}{J}(Ke_2 - f_v e_3) - \frac{f_v}{J^2}(Ke_2 - f_v e_3) - \frac{K}{JL}(Re_2 + NL(e_3e_1 + e_3i_{d_r} + e_1\Omega_r) + Ke_3) \quad (18)$$

Le degré relatif du système par rapport à S_θ étant égal à 2, nous utilisons une commande basée sur un Twisting Échantillonné [13] :

$$\frac{K}{JL}\bar{v}_q = -\mu_\theta(e, \Gamma_r) + u_{te}(S_\theta, \Delta S_\theta) \quad (19)$$

L'algorithme de Twisting Échantillonné est défini par

$$u_{te}(S, \Delta S) = \begin{cases} -\lambda_m \text{sign}(S) & \text{si } S\Delta S \leq 0 \\ -\lambda_M \text{sign}(S) & \text{si } S\Delta S > 0 \end{cases} \quad (20)$$

où ΔS est la variation de S sur un pas d'échantillonnage.

Pour garantir une convergence de l'algorithme en temps fini (dont on peut estimer une borne) sur la surface $S_\theta = 0$, les paramètres λ_m et λ_M doivent vérifier les conditions

$$\begin{cases} \lambda_m > |(\frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2})C_r - \frac{1}{J}\frac{dC_r}{dt}|_{max} \\ \lambda_M > \lambda_m + 2|(\frac{k}{J} - \frac{f_v}{J^2})C_r - \frac{1}{J}\frac{dC_r}{dt}|_{max} \end{cases} \quad (21)$$

Une fois sur la surface $S_\theta = 0$, on obtient la convergence exponentielle de l'erreur de suivi en position e_4 , dont la vitesse est réglée par le paramètre k choisi.

De la même manière, nous calculons

$$\dot{S}_{i_d} = \dot{e}_1 = \frac{1}{L}\bar{v}_d + \mu_{i_d}(e, \Gamma_r) \quad (22)$$

où

$$\mu_{i_d}(e, \Gamma_r) = \frac{1}{L}(-Re_1 + NL(e_3e_2 + e_3i_{q_r} + e_2\Omega_r)) \quad (23)$$

Le degré relatif du système par rapport à S_{i_d} étant égal à 1, nous utilisons un algorithme de Super Twisting pour la commande :

$$\frac{1}{L}\bar{v}_d = -\mu_{i_d}(e, \Gamma_r) + u_{st}(S_{i_d}) \quad (24)$$

Pour assurer la convergence en temps fini sur la surface $S_{i_d} = 0$, les paramètres de cet algorithme de Super Twisting (décrit par les équations (4) et (5)) doivent vérifier $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$.

La commande ainsi définie garantit la convergence exponentielle de l'erreur de suivi pour un système où tout l'état est mesuré et est robuste aux perturbations et aux erreurs paramétriques (démonstré dans [15]).

B. Commande avec observateurs

Supposons maintenant que seules les dynamiques électriques sont mesurées. Nous reprenons la commande précédente et nous introduisons l'erreur entre les valeurs estimées par les observateurs décrits précédemment et les valeurs de référence des états :

$$\xi = [\hat{i}_d - i_{d_r}, \hat{i}_q - i_{q_r}, \hat{\Omega} - \Omega_r, \hat{\theta} - \theta_r]^T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4]^T \quad (25)$$

Nous rappelons aussi les erreurs d'estimation :

$$\varepsilon = [i_\alpha - \hat{i}_\alpha, i_\beta - \hat{i}_\beta, \hat{\theta} - \theta]^T = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T \quad (26)$$

L'état du système complet composé de l'erreur de suivi et des erreurs d'estimation

$$\Xi \triangleq [e_1, e_2, e_3, e_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3]^T \quad (27)$$

a alors pour dynamique

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \\ \dot{e}_4 \\ \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_2 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}e_1 + N(e_3e_2 + e_3i_{q_r} + e_2\Omega_r) \\ -\frac{R}{L}e_2 - N(e_3e_1 + e_3i_{d_r} + e_1\Omega_r) - \frac{K}{L}e_3 \\ \frac{1}{J}(Ke_2 - f_v e_3 - C_r) \\ e_3 \\ \frac{K}{L}(e_3 + \Omega_r) \sin(N(e_4 + \theta_r)) \\ -\frac{K}{L}(e_3 + \Omega_r) \cos(N(e_4 + \theta_r)) \\ e_3 + \Omega_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L}\bar{v}_d \\ \frac{1}{L}\bar{v}_q \\ 0 \\ 0 \\ \chi_1(\varepsilon_1) \\ \chi_2(\varepsilon_2) \\ \chi_3(\varepsilon_3) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Les valeurs des commandes \bar{v}_q et \bar{v}_d doivent être adaptées au système sans capteur. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \frac{K}{JL}\bar{v}_q &= -\hat{\mu}_\theta(\xi, \Gamma_r) + u_{te}(\hat{S}_\theta, \Delta \hat{S}_\theta) \\ \frac{1}{L}\bar{v}_d &= -\hat{\mu}_{i_d}(\xi, \Gamma_r) + u_{st}(\hat{S}_{i_d}) \end{aligned} \quad (29)$$

où \hat{S}_θ et \hat{S}_{i_d} sont des estimations des variables de glissement S_θ et S_{i_d} :

$$\begin{cases} \hat{S}_\theta = k\xi_4 + \dot{\xi}_4 \\ \hat{S}_{i_d} = \xi_1 \end{cases}, k > 0 \quad (30)$$

et où $\hat{\mu}_\theta(\xi, \Gamma_r)$ et $\hat{\mu}_{i_d}(\xi, \Gamma_r)$ sont données par

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_\theta(\xi, \Gamma_r) = & \frac{k}{J}(K\xi_2 - f_v\xi_3) - \frac{f_v}{J^2}(K\xi_2 - f_v\xi_3) \\ & - \frac{K}{JL}(R\xi_2 + NL(\xi_3\xi_1 + \xi_3i_{d_r} + \xi_1\Omega_r) + K\xi_3) \end{aligned} \quad (31)$$

et

$$\hat{\mu}_{i_d}(\xi, \Gamma_r) = \frac{1}{L}(-R\xi_1 + NL(\xi_3\xi_2 + \xi_3i_{q_r} + \xi_2\Omega_r)) \quad (32)$$

Pour prouver la stabilité de l'origine du système en temps fini, nous ne pouvons pas appliquer le principe de superposition puisque le système est non linéaire. La convergence séparée des deux systèmes observateur/commande n'implique donc pas la convergence du système complet.

Pour démontrer la stabilité exponentielle du système complet, nous allons prouver que ce dernier est borné en temps fini. Ensuite, puisque les observateurs que nous avons mis au point convergent en temps fini, le système se comportera au bout d'un certain laps de temps comme le système avec la commande par retour d'état décrit dans le paragraphe IV-A et sera donc exponentiellement stable.

Prouvons donc que le système complet (28) est bien borné en temps fini. Pour cela, nous allons exprimer ξ en fonction de l'état Ξ du système, de la trajectoire de référence Γ_r , et des commandes $\chi_1(\varepsilon_1)$, $\chi_2(\varepsilon_2)$, $\chi_3(\varepsilon_3)$, $u_{te}(\hat{S}_\theta, \Delta\hat{S}_\theta)$ et $u_{st}(\hat{S}_{i_d})$. Nous avons

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{i}_d \\ \hat{i}_q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i_{d_r} \\ i_{q_r} \end{pmatrix} \quad (33)$$

Or

$$\begin{pmatrix} \hat{i}_d \\ \hat{i}_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(N\hat{\theta}) & \sin(N\hat{\theta}) \\ -\sin(N\hat{\theta}) & \cos(N\hat{\theta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_\alpha \\ \hat{i}_\beta \end{pmatrix} \quad (34)$$

avec

$$\begin{cases} \hat{\theta} = -\frac{1}{N} \arctan\left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right) \\ \hat{i}_\alpha = i_\alpha - \varepsilon_1 \\ \hat{i}_\beta = i_\beta - \varepsilon_2 \end{cases} \quad (35)$$

Puisque nous avons aussi

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(N(e_4 + \theta_r)) & -\sin(N(e_4 + \theta_r)) \\ \sin(N(e_4 + \theta_r)) & \cos(N(e_4 + \theta_r)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \quad (36)$$

et que

$$\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 + i_{d_r} \\ e_2 + i_{q_r} \end{pmatrix} \quad (37)$$

nous obtenons donc

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \Phi(\chi_1, \chi_2) \left(\Psi(e_4 + \theta_r) \begin{pmatrix} e_1 + i_{d_r} \\ e_2 + i_{q_r} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \right) - \begin{pmatrix} i_{d_r} \\ i_{q_r} \end{pmatrix} \quad (38)$$

avec

$$\Phi(\chi_1, \chi_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^2}} & -\frac{\frac{\chi_1}{\chi_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^2}} \\ \frac{\frac{\chi_1}{\chi_2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^2}} & \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\chi_1}{\chi_2}\right)^2}} \end{pmatrix} \quad (39)$$

et

$$\Psi(e_4 + \theta_r) = \begin{pmatrix} \cos(N(e_4 + \theta_r)) & -\sin(N(e_4 + \theta_r)) \\ \sin(N(e_4 + \theta_r)) & \cos(N(e_4 + \theta_r)) \end{pmatrix} \quad (40)$$

De même, nous pouvons exprimer ξ_3 sous la forme

$$\xi_3 = \hat{\Omega} - \Omega_r = \chi_3 - \Omega_r \quad (41)$$

En réintégrant les équations des commandes \bar{v}_d et \bar{v}_q (29) avec les expressions (38) et (41) des erreurs entre les valeurs estimées et les valeurs de référence dans le système (28), nous obtenons un modèle ne dépendant plus que de l'état et des entrées de commande, du type :

$$\dot{\Xi} = F(\Xi, \Gamma_r, \chi_1, \chi_2, \chi_3, u_{te}(\hat{S}_\theta, \Delta\hat{S}_\theta), u_{st}(\hat{S}_{i_d})) \quad (42)$$

Nous allons à présent majorer ce terme.

Si l'on suppose la trajectoire de référence Γ_r bornée, nous avons grâce aux expressions (38) et (41)

$$\begin{cases} \xi_1 = O(e_1 + e_2 + \varepsilon_1) \\ \xi_2 = O(e_1 + e_2 + \varepsilon_2) \\ \xi_3 = O(\varepsilon_3) \end{cases} \quad (43)$$

De plus, si nous tenons compte d'hypothèses pratiques comme la saturation des courants i_d et i_q et de leurs estimées \hat{i}_d et \hat{i}_q , les erreurs de suivi en courant e_1 , e_2 et les erreurs d'estimation ε_1 , ε_2 sont bornées, donc ξ_1 et ξ_2 sont aussi bornés d'après (43).

De même, la commande basée sur le Twisting Échantillonné (20) est bornée ainsi que les algorithmes de Super Twisting (8), (13) et (24) puisque ce sont des fonctions continues à valeurs dans un ensemble compact.

Par conséquent, en réintégrant toutes ces dominations dans le système global (28), nous obtenons l'inégalité

$$\|\dot{\Xi}\| \leq Q \|\Xi\| + \bar{g} \quad (44)$$

où Q et \bar{g} sont des constantes positives.

En intégrant (44), nous avons alors

$$\|\Xi(t)\| \leq \|\Xi(0)\| + \int_0^t (Q \|\Xi(\tau)\| + \bar{g}) d\tau \quad (45)$$

et par application du lemme de Grönwall, nous obtenons

$$\|\Xi(t)\| \leq \|\Xi(0)\| \exp(Ct) + \frac{\bar{g}}{Q} \exp(Ct - 1) \quad (46)$$

où C est une constante positive.

Par conséquent, ceci montre que l'état Ξ du système complet est borné en temps fini, ce qui achève la preuve de stabilité exponentielle du système sans capteur mécanique.

Nous confirmons alors ce résultat théorique par quelques résultats obtenus en simulation. Nous présentons tout d'abord un résultat obtenu avec de fortes perturbations ($C_r = \frac{2}{3}C_m \sin(6\pi t)$, où C_m est le couple de maintien du moteur étudié), sans bruit de mesure ni incertitudes paramétriques, figure 4, puis un résultat obtenu avec le même couple de perturbations, en ajoutant cette fois-ci du bruit de mesure (bruit blanc d'amplitude allant jusqu'à 5% du courant nominal) et des erreurs paramétriques (de 5% sur les paramètres R , L , K , J et f_v), figure 5.

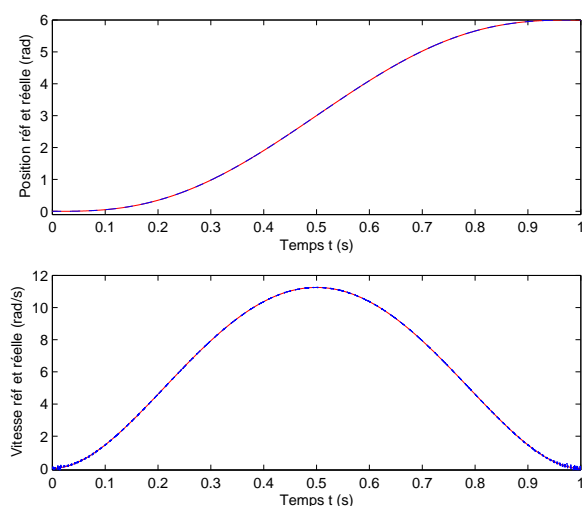


Fig. 4. Valeurs de référence (en rouge) et réelles (en bleu) de θ et Ω sans bruit de mesure ni erreurs paramétriques

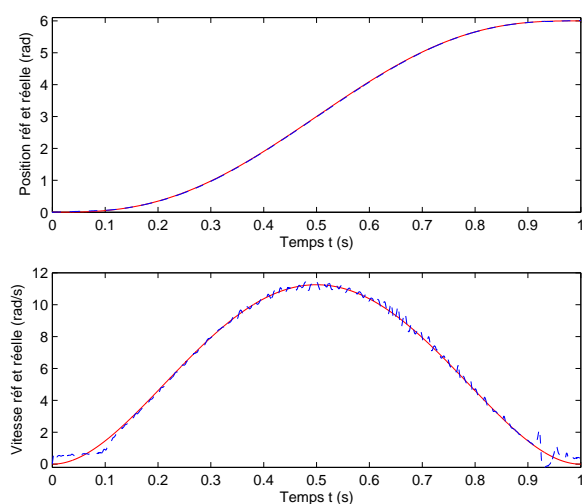


Fig. 5. Valeurs de référence (en rouge) et réelles (en bleu) de θ et Ω avec bruit de mesure et erreurs paramétriques

Comme nous pouvons l'observer, le suivi en position est précis, malgré les perturbations, le bruit, et les incertitudes paramétriques. La vitesse du rotor quant à elle se cale parfaitement à la vitesse de référence lorsqu'il n'y a pas de bruit, mais nous apercevons un phénomène de chattering lorsqu'il y a du bruit sur les capteurs, phénomène qui est d'autant plus important lorsque les bruits sont grands.

V. CONCLUSION

Nous avons étudié et présenté des observateurs basés sur des techniques par modes glissants d'ordre supérieur pour estimer les états mécaniques d'un moteur pas-à-pas, avant de présenter une commande stable sans capteur et utilisant ces observateurs. Les résultats obtenus en simulation pour l'observation et la commande en présence de perturbations et de bruits de mesure sont convaincants et montrent l'intérêt de la méthode. Nous pouvons cependant observer une influence non négligeable des erreurs paramétriques sur la stabilité de la commande. Des améliorations sur l'observateur et la loi de commande sont donc encore à appor-

ter, et c'est ce sur quoi nous travaillons en ce moment. L'implémentation de ces techniques sur un système réel est aussi en cours.

RÉFÉRENCES

- [1] Bartolini G., Pisano A., Punta E. et Usai E. A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems. *International Journal of Control*, vol. 76, n° 9-10, pp. 875-892, 2003.
- [2] Butt Q.R. et Bhatti A.I. Estimation of gasoline-engine parameters using higher order sliding mode. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, n° 11, pp. 3891-3898, 2008.
- [3] Canale M., Fagiano L., Ferrara A. et Vecchio C. Vehicle yaw control via second-order sliding-mode technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, n° 11, pp. 3908-3916, 2008.
- [4] Chen Z., Tomita M., Doki S. et Okuma S. New adaptive sliding observers for position and velocity-sensorless controls of brushless DC motors. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 47, n° 3, pp. 582-591, 2000.
- [5] Chiasson J. et Novotnak R. Nonlinear speed observer for the PM stepper motor. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, n° 10, pp. 1584-1588, 1993.
- [6] Defoort M., Floquet T., Kőkösy A. et Perruquetti W. Sliding mode formation control for cooperative autonomous mobile robots. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, n° 11, pp. 3944-3953, 2008.
- [7] Defoort M., Nollet F., Floquet T. et Perruquetti W. A third-order sliding-mode controller for a stepper motor. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, n° 9, pp. 3337-3346, 2009.
- [8] Emel'yanov S.V., Korovin S.K. et Levant A. High-order sliding modes in control systems. *Computational Mathematics and Modeling*, vol. 7, n° 3, pp. 294-318, 1996.
- [9] Fliess M., Lévine J., Martin P. et Rouchon P. Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. *C.R. Académie des Sciences*, vol. 315, pp. 619-624, 1992.
- [10] Floquet T., Barbot J. P. et Perruquetti W. Higher order sliding mode stabilization for a class of nonholonomic perturbed systems. *Automatica*, vol. 39, n° 6, pp. 1077-1083, 2003.
- [11] Kant M. et Vilain J.-P. Modélisation dynamique du moteur pas à pas. *Revue de physique appliquée*, vol. 25, n° 7, pp. 687-692, 1990.
- [12] Martinez R., Alvarez J. et Orlov Y. Hybrid sliding mode-based control of underactuated systems with dry friction *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, n° 11, pp. 3998-4003, 2008.
- [13] Levant A. Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, vol. 58, n° 6, pp. 1247-1263, 1993.
- [14] Levant A. Universal SISO sliding-mode controllers with finite-time convergence. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, n° 9, pp. 1447-1451, 2001.
- [15] Nollet F., Floquet T. et Perruquetti W. Observer-based second order sliding mode control laws for stepper motors. *Control Engineering Practice*, vol. 16, n° 4, pp. 429-443, 2008.
- [16] Perruquetti W. et Barbot J.-P. *Sliding mode control in engineering*, Edition Marcel Dekker, New York, 2002.
- [17] Pisano A., Davila A., Fridman L. et Usai E. Cascade control of PM DC drives via second order sliding mode technique. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 55, n° 11, pp. 3846-3854, 2008.
- [18] Poulain F., Praly L. et Ortega R. An observer for permanent magnet synchronous motors with current and voltages as only measurements. 47th IEEE Conference on Decision and Control, CDC2008, Cancún, Mexique, 9-11 Décembre 2008.
- [19] Riachy S., Orlov Y., Floquet T., Santiesteban R. et Richard J.-P. Second order sliding mode control of underactuated mechanical systems I : local stabilization with application to an inverted pendulum. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, vol. 18, n° 4-5, pp. 529-543, 2008.
- [20] Xu Z. et Rahman M.F. An adaptive sliding stator flux observer for a direct-torque-controlled IPM synchronous motor drive. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 54, n° 5, pp. 2398-2406, 2007.