

# Synthèse d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues pour les systèmes singuliers représentés par des multi-modèles

Habib HAMDI<sup>1</sup>, Mickael RODRIGUES<sup>2</sup>, Chokri MECHMECHE<sup>1</sup>, Naceur BENHADJ-BRAIEK<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d'Etude et Commande Automatique des Processus (LECAP), École Polytechnique de Tunisie, B.P. 743 - 2078 La Marsa, Tunisie.

*hammdihabib@yahoo.fr, chokri.mechmeche@esstt.rnu.tn, naceur.benhadj@ept.rnu.tn*

<sup>2</sup>Laboratoire d'Automatique et de Génie des Procédés (LAGEP), Université de Lyon, Lyon, F-69003, France ; Université Lyon 1, CNRS, UMR 5007, LAGEP, Villeurbanne, F-69622, France.

*rodrigues@lagep.univ-lyon1.fr*

**Résumé**— Ce papier traite de l'estimation d'état pour les systèmes singuliers représentés par des multi-modèles au travers la synthèse d'un observateur proportionnel intégral à entrées inconnues. L'approche développée ici est dédiée aux systèmes nonlinéaires singuliers représentés par des multi-modèles. Afin d'estimer le vecteur d'état ainsi que les entrées inconnues d'un tel système, un multi-observateur proportionnel intégral à entrées inconnues est synthétisé. Les gains de cet observateur sont calculés au travers la résolution d'Inégalités Matricielles Linéaires ou LMI. Un exemple de simulation illustrant la capacité de l'approche proposée à estimer les états ainsi que les entrées inconnues pour un disque roulant est présenté.

**Mots-clés**— Multi-modèles, système singulier, entrées inconnues, observateur proportionnel intégral, LMI

## I. INTRODUCTION

La dynamique des procédés physiques est souvent modélisée par des équations mathématiques. Mais si les états du procédé physique comportent des contraintes, comme par exemple les lois de Kirchhoff dans les réseaux électriques, ou des contraintes de position comme le mouvement d'une masse sur une surface, alors le modèle mathématique contient aussi des équations algébriques pour décrire ces contraintes. De tels systèmes étant composés d'équations algébriques et différentielles sont appelées des systèmes algébro-différentiels, équations implicites ou systèmes singuliers (descriptor systems).

Plusieurs approches ont proposé des observateurs pour les systèmes conventionnels ou ordinaires. De manière classique, l'observateur utilisé pour les systèmes linéaires est souvent de type Luenberger ou avec un gain proportionnel [6]. En présence de perturbations inconnues affectant le système [13], l'estimation d'état produite par ce type d'observateur est considérablement dégradée. Afin d'améliorer la synthèse de l'observateur en regard des perturbations sur le système, un observateur avec un gain proportionnel intégral peut alors être utilisé. En effet, cet observateur permet d'intégrer un certain degré de robustesse dans l'état estimé grâce à l'action intégrale [2].

De manière similaire à la théorie linéaire, le problème de la synthèse d'un observateur pour les systèmes singuliers linéaires a été traité par de nombreux auteurs. Des approches sont notamment basées sur la construction d'ob-

servateur d'ordre plein ou d'ordre réduit [11]. D'autres approches développent le concept de la décomposition en valeurs singulières et de la matrice inverse généralisée [8] afin de reconstruire le vecteur d'état pour cette classe de systèmes. Dans [7], les auteurs ont étudié le problème d'observation des états des systèmes singuliers linéaires à paramètres variants. L'observateur obtenu, a été appliqué pour le diagnostic. D'autres chercheurs ont aussi introduit le terme intégral dans la synthèse des observateurs pour les systèmes singuliers linéaires. En effet, dans [1], une approche de synthèse paramétrique pour des observateurs proportionnels intégral dédiés aux systèmes linéaires singuliers à temps continu a été proposée. Dans [5], les auteurs ont ainsi développé des techniques utilisant des observateurs de type Luenberger Proportionnel Intégral (PI) d'ordre plein et d'ordre réduit avec des entrées inconnues. Cependant, peu de travaux ont été effectués pour la synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers non linéaires tout en y effectuant un diagnostic de défaut [10]. Dans [16], les auteurs ont notamment suggéré et étendu une technique de linéarisation afin de résoudre le problème d'estimation du vecteur d'état des systèmes non linéaires singuliers avec une application sur un procédé physique : un convertisseur AC-DC. L'observateur PI à entrées inconnues a été traité par [4]. Cependant, la synthèse de cet observateur peut devenir très délicate voire impossible en fonction de la complexité (non linéaire) ainsi que le type du modèle employé, d'où l'importance de la modélisation mathématique du système qui doit en même temps être simple et au plus proche du système.

L'approche Multi-Modèles est une technique très performante pour la modélisation des systèmes non linéaires ; elle est notamment un bon compromis entre la précision du modèle et sa complexité [14]. Les multi-modèles sont connus par leur capacité de prise en compte des changements de points de fonctionnement du système et leur habilité de reproduire la dynamique de celui-ci avec précision sur une large plage de fonctionnement. De plus, leurs propriétés mathématiques sont très appréciables lors de la synthèse d'observateurs [13]. Ces propriétés tiennent en particulier dans le fait que l'on utilise des techniques linéaires qui sont utilisées pour traiter de systèmes non

linéaires. La représentation multi-modèles a été généralisée et utilisée dans de nombreux problèmes d'Automatique notamment pour la synthèse d'observateurs, de commande par retour d'état pour des systèmes singuliers sous la dénomination de modèles de type Takagi-Sugeno [3] et [17]. Dans ce papier, le concept d'observateur PI [5] sera étendu afin d'avoir une estimation d'état ainsi que des entrées inconnues pour un système non linéaire modélisé par un multi-modèles. L'idée centrale sera donc la synthèse d'un multi-observateur PI à entrées inconnues. Pour cela, il faut tout d'abord obtenir une représentation du système non linéaire sous une forme multi-modèles. Cette représentation est basée sur l'interpolation de modèles locaux linéaires, représentant la dynamique locale du système au travers l'utilisation de fonctions de pondération. Ensuite, un multi-observateur PI est développé pour l'estimation du vecteur d'état ainsi que des entrées inconnues. L'existence et les conditions de stabilité de ce multi-observateur PI sont étudiées.

Le papier est organisé comme suit : dans la section II, la présentation du problème est exposée sur l'aspect modélisation du système ainsi que les diverses hypothèses nécessaires. Dans la section III, nous présentons la synthèse du multi-observateur PI à entrées inconnues. La structure, la synthèse des différentes matrices et les conditions d'existence de cet observateur sont établies. Finalement, la section IV propose une méthode de synthèse de cet observateur et un exemple illustratif qui expose l'efficacité de la méthode développée ici.

## II. PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Soit le système singulier non linéaire suivant :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = F(x(t), u(t), d(t)) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (1)$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $u \in \mathbb{R}^p$  ( $p \leq n$ ) est le vecteur d'entrée,  $d \in \mathbb{R}^q$  est le vecteur des perturbations inconnues supposé constant et  $y \in \mathbb{R}^m$  ( $m \geq q$ ) est le vecteur de sortie. La fonction  $F$  est non linéaire continue et indéfiniment dérivable.  $E$  est une matrice singulière avec des paramètres constants et  $Rank(E) = r < n$ .

La dynamique du système non linéaire peut être caractérisée par une représentation couplée de modèles de type Takagi-Sugeno [12] composée de plusieurs modèles locaux. Ainsi, on définit les modèles locaux comme le premier terme du développement en série de Taylor des fonctions non linéaires autour des points de fonctionnement  $(x_i, u_i)$ . La formulation Multi-Modèles [14] du système singulier (1) est de la forme suivante :

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2)$$

avec  $A_i, B_i$  et  $R_i$  des matrices jacobienne définies autour du  $i$ ème point de fonctionnement.  $\Delta x_i$  est un vecteur dépendant du  $i$ ème point de fonctionnement. Les  $h_i(\xi(t))$  sont les fonctions de pondération qui assurent la transition entre les sous-modèles [17]. Elles possèdent les propriétés

suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) = 1 \\ 0 \leq h_i(\xi(t)) \leq 1 \end{cases} \quad (3)$$

Les variables de décision  $\xi(t)$  sont supposées accessibles en temps réel, dépendant de l'entrée de commande ou des états mesurés. D'autre part, avant d'explicitier les principaux résultats, nous allons faire les hypothèses suivantes :

*Hypothèse H1* : La matrice  $C$  est de plein rang ligne, i.e.,  $rank(C) = m$ .

*Hypothèse H2* : le triplet  $(E, A_i, C)$  est R-observable,  $\forall i = 1, \dots, h$  [11], i.e.,

$$rank \begin{bmatrix} sE - A_i \\ C \end{bmatrix} = n, \quad \forall s \in \mathcal{C}. \quad (4)$$

avec  $\mathcal{C}$  est l'ensemble des nombres complexes.

*Hypothèse H3* : Les termes impulsifs du système (2) sont observables (le triplet  $(E, A_i, C)$  est Impulse-observable),  $\forall i = 1, \dots, h$  [11], i.e.,

$$rank \begin{bmatrix} E & A_i \\ 0 & E \\ 0 & C \end{bmatrix} = n + rank(E) \quad (5)$$

Dans la partie suivante, une méthode de synthèse d'un observateur PI est présentée pour les systèmes singuliers multi-modèles sujets aux perturbations.

## III. MULTI-OBSERVATEURS PI À ENTRÉES INCONNUES POUR DES SYSTÈMES SINGULIERS SOUS FORME MULTI-MODÈLES

### A. Multi-Observateur PI à entrées inconnues

Dans le cas déterministe, le Multi-Observateur Proportionnel Intégral (MOPI) à entrées inconnues est caractérisé par un terme intégral sur l'erreur d'estimation de sortie [9]. Les équations qui gouvernent le MOPI sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i Z(t) + G_i u(t) + \Delta Z_i + L_i y(t) + H_i \hat{d}(t)) \\ \hat{x}(t) = Z(t) + M y(t) \\ \dot{\hat{d}}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \Phi_i (y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases} \quad (6)$$

avec  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$  et  $\hat{d} \in \mathbb{R}^p$  qui sont respectivement le vecteur d'état estimé, le vecteur d'état de l'observateur et les entrées inconnues estimées.  $N_i, G_i, \Delta Z_i, L_i, H_i, \Phi_i$  et  $M$  sont les matrices inconnues du MOPI qui doivent être synthétisées.

**Définition 1** : Les équations (6) définissent un Multi-Observateur Proportionnel Intégral (MOPI) à entrées inconnues pour le système (2) si pour des conditions initiales arbitraires  $x(0), Z(0)$  et une entrée arbitraires  $u(t)$ , les relations suivantes sont vraies :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (d(t) - \hat{d}(t)) = 0, \quad \forall \hat{d}(0) \quad (8)$$

Soit l'erreur d'estimation  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ , en utilisant (6) et l'égalité  $y(t) = Cx(t)$  on obtient :

$$e(t) = (I_n - MC)x(t) - Z(t) \quad (9)$$

Soit  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$  une matrice réelle telle que :

$$UE = I_n - MC \quad (10)$$

Alors l'erreur d'estimation s'écrit

$$e(t) = UEx(t) - Z(t) \quad (11)$$

A présent, supposons que les entrées inconnues sont bornées et à variation lente i.e  $\dot{d}(t) \simeq 0$ . Alors,

pour  $\zeta(t) = d(t) - \hat{d}(t)$ , la dérivée des entrées inconnues s'écrit

$$\dot{\zeta}(t) = -\dot{\hat{d}}(t) \quad (12)$$

La dynamique de l'erreur d'estimation d'état devient

$$\dot{e}(t) = UEx(t) - \dot{Z}(t) \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(UA_i x(t) + UB_i u(t) + U\Delta x_i \\ &+ UR_i d(t) - N_i Z(t) - G_i u(t) - \Delta Z_i - L_i y(t) - H_i \hat{d}(t)) \\ \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))((UA_i - L_i C - N_i UE)x(t) \\ &+ (UB_i - G_i)u(t) + U_i \Delta x_i - \Delta Z_i + (UR_i - H_i)d(t) \\ &+ H_i \xi(t) + N_i e(t)) \end{aligned} \quad (14)$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées

$$UA_i = N_i UE + L_i C \quad (15)$$

$$G_i = UB_i \quad (16)$$

$$\Delta Z_i = U\Delta x_i \quad (17)$$

$$H_i = UR_i \quad (18)$$

$$I_n = UE + MC \quad (19)$$

A partir des équations (6), (12) et (14), les dynamiques de l'erreur d'estimation d'état et des entrées inconnues deviennent

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(N_i e(t) + H_i \zeta(t)) \quad (20)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(\Phi_i C(x(t) - \hat{x}(t))) \quad (21)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -\sum_{i=1}^h h_i(\xi(t))(\Phi_i C)e(t) \quad (22)$$

Les égalités (20) et (22) peuvent s'écrire de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -\Phi_i C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \quad (23)$$

L'erreur d'estimation d'état (23) converge asymptotiquement vers zéro si les matrices  $\begin{bmatrix} N_i & H_i \\ -\Phi_i C & 0 \end{bmatrix}$  sont stables. On peut conclure que  $e(t) \rightarrow 0$  et  $\zeta(t) \rightarrow 0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

#### A.1 Synthèse des matrices du multi-observateur PI

Sous l'hypothèse que  $(E, A_i, C)$  est im-observable et pour  $E$  une matrice de plein rang ligne, on peut avoir  $\text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n$ . De ce fait et à partir de (19), on a

$$\begin{bmatrix} U & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = I_n \quad (24)$$

Il vient alors

$$\begin{bmatrix} U & M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix}^+ \quad (25)$$

avec le superscript  $+$  qui représente la matrice inverse généralisée. Aussi à cet instant de la synthèse, nous pouvons obtenir les matrices  $U$  et  $M$ . Les matrices  $G_i$  et  $\Delta Z_i$  sont données respectivement par les équations (16) et (17). La matrice  $H_i$  peut être obtenue par (18). En substituant (19) dans l'équation (15), on obtient

$$UA_i = N_i(I_n - MC) + L_i C \quad (26)$$

$$N_i = UA_i - (L_i - N_i M)C \quad (27)$$

Soit

$$K_i = L_i - N_i M \quad (28)$$

alors,

$$N_i = UA_i - K_i C \quad (29)$$

En utilisant l'expression du gain  $K_i$ ,

$$L_i = K_i + N_i M \quad (30)$$

Afin de calculer les gains  $K_i$  et  $\Phi_i$  en utilisant (28) et (29), les erreurs d'estimation (23) peuvent être réécrites de la façon suivante

$$\begin{bmatrix} \dot{e}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \quad (31)$$

L'équation ci-dessus (31) s'écrit alors

$$\dot{e}_a(t) = \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) e_a(t) \quad (32)$$

avec

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} UA_i & H_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{K}_i = \begin{bmatrix} K_i \\ \Phi_i \end{bmatrix}, \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_a(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \text{ et } H_i = UR_i.$$

Par la suite, il reste à déterminer les gains  $\bar{K}_i$  telle que l'erreur d'estimation converge asymptotiquement vers zéro. Aussi, afin de déterminer ces gains, il faut s'assurer de la détectabilité des paires  $(\bar{A}_i, \bar{C})$ ,  $\forall i = 1, \dots, h$ .

#### A.2 Conditions d'existence

Le Multi-Observateur Proportionnel Intégral (6) à entrées inconnues existe si et seulement si les paires  $(\bar{A}_i, \bar{C})$  sont détectables  $\forall i = 1, \dots, h$ . Le Théorème suivant résume ces conditions.

**Théorème 1 :** Le Multi-Observateur Proportionnel Intégral (MOPI) à entrées inconnues (6) du système singulier multi-modèles (2) converge asymptotiquement vers zéro si et seulement si la condition suivante est vérifiée [5]

$$\text{rank} \begin{bmatrix} sE - A_i & R_i \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} = n + q, \quad \forall s \in \text{et } \text{Re}(s) \geq 0$$

$$\text{avec : } \text{rang} \begin{bmatrix} E \\ C \end{bmatrix} = n.$$

**Preuve :** Etant donné que  $\text{rang} \begin{bmatrix} U & M \end{bmatrix} = n$ , alors quelque soit  $s$  complexe, on a

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} U & 0 & M & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & -sI \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} sE - A_i & R_i \\ 0 & sI_q \\ sC & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i & R_i \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rang} \begin{bmatrix} sI_n - UA_i & UR_i \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} sE - A_i & R_i \\ 0 & sI_q \\ C & 0 \end{bmatrix}$$

Ce qui est équivalent à la propriété de détectabilité des paires  $(\bar{A}_i, \bar{C})$ . La dernière égalité est obtenue en considérant séparément les cas où  $s = 0$  et  $s \neq 0$ . Aussi, il reste à déterminer le gain  $\bar{K}_i$  du MOPI afin d'assurer la convergence de l'erreur d'estimation.

**Théorème 2 :** Le Multi-Observateur Proportionnel Intégral (6) à entrées inconnues est asymptotiquement stable s'il existe une matrice symétrique et définie positive  $Q$  et des matrices  $W_i = Q\bar{K}_i$  remplissant les conditions LMI suivantes

$$\bar{A}_i^T Q + Q\bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} < 0, \forall i \in \{1, \dots, h\} \quad (33)$$

**Preuve :** Considérons la fonction de Lyapunov avec la forme quadratique suivante :  $V(t) = e_a^T(t) Q e_a(t)$ .

La condition de stabilité de l'erreur d'estimation est que la dérivée temporelle de la fonction Lyapunov doit être négative. En utilisant l'équation (32), la fonction  $\dot{V}(t)$  s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e_a^T Q \dot{e}_a + e_a^T(t) Q \dot{e}_a(t) \\ &= \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) \{ e_a^T ((\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C})^T Q + Q(\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C})) e_a^T \} \end{aligned} \quad (34)$$

La dérivée de la fonction de Lyapunov est négative si l'inégalité suivante est vraie  $\forall h_i(\xi(t))$ , avec

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) &= 1, h_i(\xi(t)) \geq 0 \text{ et } \forall e_a(t) \neq 0 : \\ \sum_{i=1}^h h_i(\xi(t)) (e_a^T ((\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C})^T Q + Q(\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C})) e_a^T) &< 0 \end{aligned} \quad (35)$$

Alors, (35) est vérifiée si

$$(\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C})^T Q + Q(\bar{A}_i - \bar{K}_i \bar{C}) < 0, \forall i = 1, \dots, h$$

En posant  $W_i = Q\bar{K}_i$ , les inégalités ci-dessus deviennent

$$\bar{A}_i^T Q + Q\bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} < 0, \forall i \in \{1, \dots, h\}.$$

Cette inégalité peut être résolue à l'aide de la boîte LMI Toolbox afin d'obtenir les matrices  $W_i$  et  $Q$  adéquates. Les gains de l'observateur peuvent alors être calculés de la façon suivante :  $\bar{K}_i = Q^{-1} W_i$ . Ainsi, la synthèse de l'observateur MOPI est terminée et les paramètres sont donnés par (29), (30), (16), (17) et (25).

Afin d'assurer une vitesse de convergence de l'erreur d'estimation, on peut définir une surface  $S$  à gauche du plan complexe délimitée par une droite d'abscisse  $(-\alpha)$  où  $\alpha \in R^+$ . Les LMIs (33) sont alors remplacées par les LMIs suivantes :

$$\bar{A}_i^T Q + Q\bar{A}_i - \bar{C}^T W_i^T - W_i \bar{C} + 2\alpha Q < 0, \forall i \in \{1, \dots, h\} \quad (36)$$

Le MOPI présenté donne alors une estimation asymptotique à la fois du vecteur d'état du système mais aussi des entrées inconnues.

#### IV. MÉTHODE DE SYNTHÈSE ET APPLICATION

Dans cette partie, nous allons rapidement résumer la méthode de synthèse de l'observateur MOPI et donner un exemple inspiré d'un disque roulant ainsi que les résultats obtenus.

##### A. Méthode de synthèse

Initialement, la méthode consiste à approximer un système singulier non linéaire par un multi-modèle de la forme (2) et on suppose que les hypothèses  $H1$ ,  $H2$  et  $H3$  sont remplies. Le MOPI est donné par (6). Il y a plusieurs paramètres à déterminer pour la synthèse de ce MOPI et notamment deux matrices qui sont : le gain proportionnel  $K_i$  et le gain intégral  $\Phi_i$ . Ces deux gains assurent la stabilité de l'erreur d'estimation. Les paramètres sont calculés de la façon suivante :

Etape (1) Obtenir  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{M}$  provenant de (25)

Etape (2) Vérifier les conditions du **Théorème 1**

Etape (3) Obtenir les matrices  $\mathbf{G}_i$ ,  $\Delta \mathbf{Z}_i$  et  $\mathbf{H}_i$  des équations respectives (16), (17) et (18).

Etape (4) Obtenir les gains  $\mathbf{K}_i$  et  $\Phi_i$  d'après le **Théorème 2** en résolvant les LMIs (36)  $\forall i \in \{1, \dots, h\}$

Etape (5) Obtenir les matrices  $\mathbf{N}_i$  et  $\mathbf{L}_i$  des équations respectives (29) et (30).

##### B. Exemple illustratif : Un disque roulant

Soit un système singulier non linéaire donné par l'ensemble des équations algèbro-différentielles (DAE). Le modèle décrit un disque roulant [15] sur une surface sans glissement Figure (1). Le disque est relié à un mur fixe par l'intermédiaire d'un ressort non linéaire et un amortisseur linéaire. Le ressort a un coefficient positif  $k$ . Le coefficient d'amortissement est donné par  $b$  qui est aussi positif. Le rayon du disque est noté  $r$ , son inertie est donnée par  $J$  et sa masse est notée  $m$ . Le vecteur d'état de ce modèle est alors :

$x_1(t)$  : la position du centre du disque

$x_2(t)$  : la vitesse de translation du disque

$x_3(t)$  : la vitesse angulaire du disque

$x_4(t)$  : la force de contact entre le disque et la surface.

$$(DAE) \left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-K}{m(1+x_1^2)} & \frac{-b}{m} & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & \frac{-b}{m} & \frac{-K}{m(1+x_3^2)} & \frac{-r^2}{J} + \frac{1}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{-r}{J} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \right.$$

L'entrée de commande est notée  $u$  : c'est le couple appliqué au centre du disque.

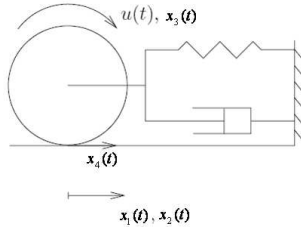


Fig. 1. Un disque roulant

Soient les valeurs suivantes :  $K = 100Nm^{-1}$ ,  $b = 30$ ,  $m = 40Kg$ ,  $r = 0.4m$  et  $J = 0.5.m.r^2 = 3.2Kgm^2$ .

### B.1 Représentation Multi-modèles

Ce modèle non linéaire peut être approximé par un multi-modèles composé de modèles locaux définis autour de 3 points de fonctionnement. Le multi-modèles du disque roulant est alors donné par la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x_3(t))(A_i x(t) + B_i u(t) + R_i d(t) + \Delta x_i) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

Les valeurs numériques de ces matrices sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.508 & -0.75 & 0 & 0.025 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.75 & -4.1329 & -0.075 \end{bmatrix}, \Delta x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0002 \\ 0 \\ 0.7578 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.2532 & -0.75 & 0 & 0.025 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.75 & -2.8267 & -0.075 \end{bmatrix}, \Delta x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1591 \\ 0 \\ -0.6579 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2.7147 & -0.75 & 0 & 0.025 \\ 0 & 1 & -0.4 & 0 \\ 0 & -0.75 & -3.6904 & -0.075 \end{bmatrix}, \Delta x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0242 \\ 0 \\ -0.3163 \end{bmatrix}$$

$$B_i = B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -0.125 \end{bmatrix}, R_i = R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les fonctions de pondération sont définies comme suit :

$$h_i(x_3(t)) = \frac{\mu_i(x_3(t))}{\sum_{i=1}^3 \mu_i(x_3(t))}$$

où  $\mu_i(x_3(t))$  sont eux-mêmes définis par

$$\mu_1(x_3(t)) = \exp(-1/2(\frac{x_3 + 5}{2})^2)$$

$$\mu_2(x_3(t)) = \exp(-1/2(\frac{x_3}{2})^2)$$

$$\mu_3(x_3(t)) = \exp(-1/2(\frac{x_3 - 5}{2})^2)$$

$$\begin{cases} u(t) = 2 \text{ pour } 0 \leq t \leq 2 \\ u(t) = 0 \text{ pour } t > 2 \end{cases}$$

et  $d(t)$  une entrée inconnue appliquée dans l'intervalle temporel  $5 \leq t \leq 10$ .

Afin de montrer l'efficacité du multi-modèles proposé, nous

présentons les résultats sur les figures (2-6). On peut voir que la modélisation Multi-Modèles est correcte aux vues des différentes estimations des états non linéaires. Toutefois, pour des raisons de contraintes de place, nous avons dû présenter toutes les courbes sur les mêmes figures : les légendes aident néanmoins à retrouver et à visualiser correctement la bonne courbe.

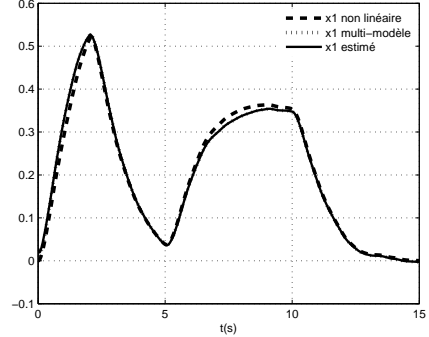


Fig. 2. L'état  $x_1(t)$  du Multi-Modèles, l'état non linéaire  $x_1^{NL}(t)$  et son estimé  $\hat{x}_1(t)$

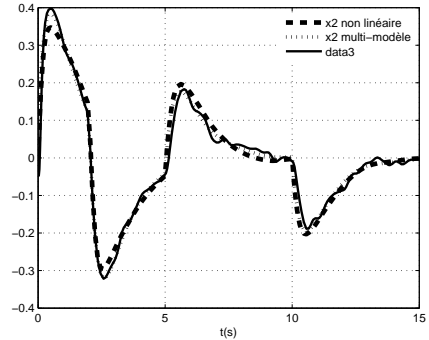


Fig. 3. L'état  $x_2(t)$  du Multi-Modèles, l'état non linéaire  $x_2^{NL}(t)$  et son estimé  $\hat{x}_2(t)$

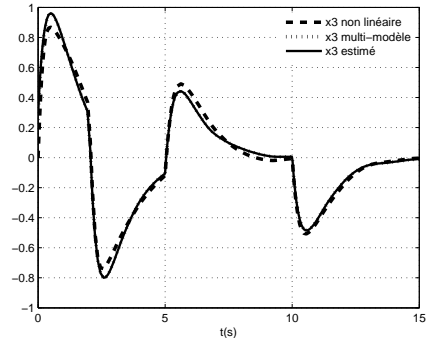


Fig. 4. L'état  $x_3(t)$  du Multi-Modèles, l'état non linéaire  $x_3^{NL}(t)$  et son estimé  $\hat{x}_3(t)$

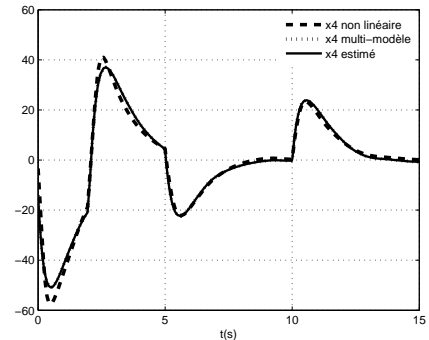


Fig. 5. L'état  $x_4(t)$  du Multi-Modèles, l'état non linéaire  $x_4^{NL}(t)$  et son estimé  $\hat{x}_4(t)$

## B.2 Estimation des états et des entrées inconnues

Le Multi-Observateur PI est représenté par :

$$\begin{cases} \dot{Z}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x_3(t))(N_i Z(t) + G_i u(t) + \Delta Z_i + L_i y(t) + H \hat{d}(t)) \\ \hat{x}(t) = Z(t) + M y(t) \\ \hat{d}(t) = \sum_{i=1}^3 h_i(x_3(t)) \Phi_i (y(t) - \hat{y}(t)) \end{cases}$$

L'existence est vérifiée à l'aide du Théorème 1. Une solution satisfaisant l'inégalité (36) peut être trouvée par la LMI Toolbox qui nous permet de déterminer les gains suivants :

$$K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0287 & -0.0387 & -0.0003 \\ 0.4565 & -0.651 & -0.0081 \\ -0.0128 & 0.0227 & 0.0001 \\ -0.456 & 0.6504 & 0.0126 \end{bmatrix}$$

$$K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0288 & -0.0386 & -0.0003 \\ 0.4571 & -0.6489 & -0.0081 \\ -0.0129 & 0.0228 & 0.0001 \\ -0.4566 & 0.6483 & 0.0126 \end{bmatrix}$$

$$K_3 = 10^3 \begin{bmatrix} 0.0284 & -0.0395 & -0.0003 \\ 0.4473 & -0.6597 & -0.0081 \\ -0.0122 & 0.0224 & 0.0001 \\ -0.4469 & 0.6591 & 0.0126 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 1.5879 & -2.261 & -0.0345 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 1.5927 & -2.2562 & -0.0345 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = 10^3 \begin{bmatrix} 1.557 & -2.2919 & -0.0345 \end{bmatrix}$$

où les matrices  $K_i$  sont les gains proportionnels et les matrices  $\Phi_i$  sont les gains intégraux. Les autres matrices du MOPI sont données par (16) – (18), (25), (29) et (30). Afin d'évaluer les performances du MOPI pour l'estimation des états et des entrées inconnues, les résultats de simulation sont présentés avec les mêmes fonctions de pondérations que le multi-modèles (IV-B.1) ainsi qu'un ajout de bruit blanc gaussien centré de variance 0.001.

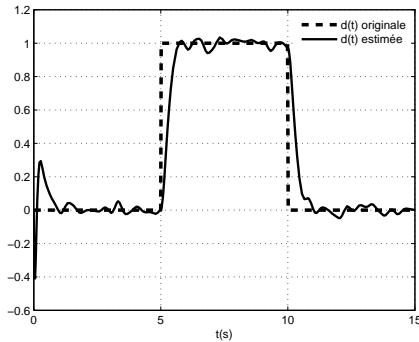


Fig. 6. L'entrée inconnue  $d(t)$  et son estimée venant du MOPI  $\hat{d}(t)$  avec bruit sur la sortie

Les figures (2-5) représentent aussi les estimations des états du système non linéaire : on peut voir que les estimations sont tout à fait correctes. D'autre part, la figure (6) montre l'entrée inconnue ainsi que son estimation bruitée provenant du MOPI. On peut voir clairement d'après cette figure que l'observateur synthétisé estime non seulement correctement les états du système mais aussi qu'il produit une estimation de bonne qualité de l'entrée inconnue.

## V. CONCLUSION

La synthèse d'un Multi-Observateur Proportionnel Intégral (MOPI) basé sur une approche Multi-Modèles a

été étudiée. L'application de cette approche sur un système non linéaire singulier (un disque roulant) a produit de bons résultats mettant en évidence l'efficacité et la capacité double de cet observateur en estimant correctement les états du système non linéaire mais aussi en estimant très correctement l'entrée inconnue sur un tel système malgré la présence de bruit. La stabilité de l'erreur d'estimation ainsi que la synthèse des gains de cet observateur est assurée par la résolution de LMI.

## RÉFÉRENCES

- [1] AI-Guo Wu, Guang-Ren Duan and Yan-Ming Fu, Generalized PID Observer Design for Descriptor Linear Systems, IEEE Transactions on Systems, man, and cybernetics-part b : cybernetics, vol. 37, No. 5, October 2007, 1390-1395.
- [2] A. Morales and J. Alvarez-Ramirez, A PI observer for a class of nonlinear oscillators, Physics Letters A 297 (2002) 205-209, Elsevier Science.
- [3] B. Marx, D. Koenig and J. Ragot, Design of observers for Takagi-Sugeno descriptor systems with unknown inputs and application to fault diagnosis, IET Control Theory Appl., Vol. 1, No. 5, September 2007.
- [4] D. Koenig, Observer Design for Unknown Input Nonlinear Descriptor Systems via Convex Optimization, IEEE Transactions on Automatic control, vol. 51, No.6, pp 1047- 1052, June 2006.
- [5] D. Koenig and S. Mammar, Design of Proportional-Integral Observer for Unknown Input Descriptor Systems, IEEE transactions on automatic control, vol. 47, No. 12, december 2002.
- [6] D. V. Schrick, PI-Observer-based Reconstruction of Effect-variables and Construction of characteristic Curves, Safety Control Engineering.
- [7] H. Hamdi, M. Rodrigues, C. Mechmeche, D. Theilliol and N. Ben-Hadj Braiek, State Estimation for Polytopic LPV Descriptor Systems : Application to Fault Diagnosis, the 7th IFAC Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes, Barcelona, Spain, June 30 - July 3, 2009 pp 438-443.
- [8] H. Muller, P. C. Muller, Observer Design for Descriptor Systems, IEEE transactions on automatic control, vol. 44, No. 1, january 1999.
- [9] H. S. Kim, T. K. Yeu, and S. Kawaji, Fault Detection in Linear Descriptor Systems Via Unknown Input PI Observer, Transactions on Control, Automation and Systems Engineering, Vol.3, No.2, June, 2001.
- [10] J. Jung, K. Huh and T. Shim, Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems, Automatica 43 (2007).
- [11] M. Darouach, M. Zasadzinski, and M. Hayar, Reduced-Order Observer Design for Descriptor Systems with Unknown Inputs, IEEE transactions on automatic control, vol. 41. No. 7, july 1996.
- [12] R. Orjuela, B. Marx, J. Ragot and D. Maquin, State estimation for non-linear systems using a decoupled multiple model, International Journal of Modelling, Identification and Control, Vol. 4, No. 1, 2008, pp.59-67.
- [13] M. Rodrigues, D. Theilliol and D. Sauter, Design of a Robust Polytopic Unknown Input Observer for FDI : Application to Non-linear Systems described by a Multi-Models Representation, 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference ECC, Sevilla, Spain, pp 6268-6273, December 2005.
- [14] M. Rodrigues, M. Adam-Medina, D. Theilliol and D. Sauter, A Fault Detection and Isolation Scheme for Industrial Systems based on Multiple Operating Models, Control Engineering Practice, Vol 16, p 225-239, 2008.
- [15] S. Johan and G. Torkel, Computing the Controllability Function for Nonlinear Descriptor systems, Proceedings of the 2006 American Control Conference Minneapolis, Minnesota, USA, June 14-16, 2006.
- [16] S. Kaprielian and J. Turi, An observer for a non linear descriptor system, CDC Tucson, Arizona (1992), 975-976.
- [17] T. Taniguchi, K. Tanaka, and H. O. Wang, Fuzzy Descriptor Systems and Nonlinear Model Following Control, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 8, No. 4, August 2000.